การพัฒนาแบบจำลองเพื่อควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้าน ที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ด้วยตัวควบคุมแบบ H-infinity

โดย

นายสิทธิโชค พัลลับโพธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ปีการศึกษา 2558

การพัฒนาแบบจำลองเพื่อควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้าน ที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ด้วยตัวควบคุมแบบ H-infinity

โดย

นายสิทธิโชค พัลลับโพธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ปีการศึกษา 2558

Development in H-infinity Control system for Double Inverted Pendulum on a Cart

BY

MR. SITTHICHOK PUNLABPHO

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF ENGINEERING

DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
THAMMASAT UNIVERSITY

ACADEMIC YEAR 2015

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์

วิทยานิพนธ์

ของ

นายสิทธิโชค พัลลับโพธิ์

เรื่อง

การพัฒนาแบบจำลองเพื่อควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้าน
ที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ด้วยตัวควบคุมแบบ H-infinity

ได้รับการตรวจสอบและอนุมัติ ให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

เมื่อ 18 พฤศจิกายน พ.ศ. 2558

ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ______________________

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทวัส ศตสุข)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ______________________

(รองศาสตราจารย์ ดร.ธีร์ เจียศิริพงษ์กุล)

กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ______________________

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มนต์ชัย พฤกษ์วิไลเลิศ)

กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ______________________

(รองศาสตราจารย์ ดร.อนันต์ สืบสำราญ)

คณบดี ______________________

(รองศาสตราจารย์ ดร. ประภัสสร์ วังศกาญจน์)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การพัฒนาแบบจำลองเพื่อควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ด้วยตัวควบคุมแบบ H-infinity
ชื่อผู้เขียน	นายสิทธิโชค พัลลับโพธิ์
ชื่อปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา/คณะ/มหาวิทยาลัย	ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รองศาสตราจารย์ ดร.ธีร์ เจียศิริพงษ์กุล
ปีการศึกษา	2558

บทคัดย่อ

รายงานนี้นำเสนอการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สาหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ และแบบสองก้านที่มีจุดหมุนบนตัวรถซึ่งเป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งโดยปกติระบบของชุดทดลองดังกล่าวจะไม่มีเสถียรภาพ ณ ตำแหน่งตั้งตรง จากนั้นทำการออกแบบระบบควบคุมเพื่อสร้างเสถียรภาพ ณ ตำแหน่งตั้งตรงสำหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันดังกล่าวให้เป็นไปตามข้อกำหนดของการออกแบบ

กรณีของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ ผู้วิจัยทำการเปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบที่ได้จากระบบควบคุมต่าง ๆ ดังนี้ ระบบควบคุมแบบพีดี-พีไอดี ระบบควบคุมแบบพีไอดี-พีไอดี ระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นที่มีเกนป้อนก้าวหน้า และระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวกระทำอินทิกรัล ซึ่งหลังจากทำการเปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบพบว่าระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นจะให้ผลตอบสนองของระบบที่ดีกว่าระบบควบคุมพีไอดี โดยเฉพาะอย่างยิ่งระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นที่มีตัวกระทำอินทิกรัล เป็นผลให้ระบบเข้าสู่สภาวะคงตัวเร็วขึ้นและระบบเกิดการแกว่งน้อยลง

กรณีของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนบนตัวรถ ผู้วิจัยทำการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น โดยเพิ่มการพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของค่าพารามิเตอร์ของระบบอีกด้วย การออกแบบระบบควบคุมแบบ H_∞ และนำมาประยุกต์ใช้กับชุดทดลองที่สร้างขึ้นในโปรแกรม LabVIEW หลังจากทำการทดสอบพบว่าผลตอบสนองที่ได้จากระบบควบคุม H_∞ ที่ได้สร้างขึ้นบนโปรแกรม LabVIEW นั้นสามารถควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถได้ดีสำหรับปัญหาระบบควบคุมแบบคงค่าและปรับค่าตามจุดอ้างอิง

คำสำคัญ: ลูกตุ้มผกผัน, ระบบควบคุมแบบพีไอดี, ระบบควบคุมแบบ H_∞

Thesis Title	Development in H-infinity Control system for Double Inverted Pendulum on a Cart
Author	Mr. Sitthichok Punlabpho
Degree	Master of Mechanical Engineering
Department/Faculty/University	Department of Mechanical Engineering Faculty of Engineering Thammasat University
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Dr.-Ing Thira Jearsiripongkul
Academic Years	2015

ABSTRACT

This report describes a study in the linearized mathematical model of single inverted pendulum on a cart (SIVP) and double inverted pendulum on a cart (DIVP). Actually, those systems had unstable at vertical upright position. Then, design control system to make system of SIVP and DIVP has stability at the upright position as follow in the design specification.

In case of SIVP, this report describes a comparison in the system response of each control system that consists of PD-PID control, PID-PID control, Linear Quadratic Regulator (LQR) control with feed-forward gain and LQR control with integral action. The simulation result shown that all of control systems can make good stable for SIVP system but LQR control can make system response better than PID control, especially LQR control with integral action. That control system can took SIVP system into steady-state faster and also it had less overshoot.

In case of DIVP, this report describes a study in the linearized mathematical model of DIVP which included by parametric uncertainty model, to design H∞ control system, and applied those systems on LabVIEW. The simulation result shown that H_∞ control system can make stable and performance for DIVP system as well.

Keywords: invertedpendulum, pid control, H-infinity control

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ ด้วยความช่วยเหลือและความกรุณาอย่างดีจาก รองศาสตราจารย์ ดร.ธีร์ เจียศิริพงษ์กุล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ประธานและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่าน ที่ได้กรุณาแนะนำ ตรวจสอบ และแก้ไขในข้อบกพร่องต่าง ๆ เสมอมา ผู้วิจัยมีความซาบซึ้งในความกรุณาเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณทุกท่านเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ผู้สอนหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่าน ที่ถ่ายทอดความรู้อันเป็นประโยชน์ยิ่งในการนำไปประยุกต์ใช้ในการทำงานต่าง ๆ ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่โครงการที่อำนวยความสะดวกเป็นอย่างดีเสมอมาจนสำเร็จการศึกษาเป็นอย่างดีและขอให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นอนุสรณ์แห่งความกตัญญูที่ผู้วิจัยมีแด่บิดามารดา ผู้เป็นแรงบันดาลใจสาหรับการจัดทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

นายสิทธิโชค พัลลับโพธิ์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	(1)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	(2)
กิตติกรรมประกาศ	(3)
สารบัญตาราง	(7)
สารบัญภาพ	(8)
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มา	1
1.2 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	2
1.3 วัตถุประสงค์	7
1.4 ขอบเขตงานวิจัย	8
1.5 ขั้นตอนการทำงาน	9
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	10
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	11
2.1 ฟังก์ชันถ่ายโอน	11
2.2 แบบจำลองรูปแบบสเตทสเปซ	12
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนและสมการสเตทสเปซ	15
2.4 การประมาณค่าเชิงเส้นของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น	16
2.5 ผลตอบสนองของระบบ	17
2.6 ระบบควบคุมแบบพีไอดี	18

2.7 วิธีการของซีกเลอร์-นิโคลส์ 19
2.7.1 วิธีการปฏิกิริยาของกระบวนการ (Process Reaction Method) 20
2.7.2 วิธีการวัฏจักรท้ายสุด (Ultimate Cycle Method) 21
2.8 วิธีการของโคเฮน-คูน 22
2.9 ระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับ 23
2.9.1 เกนขยายป้อนก้าวหน้า 23
2.9.2 ตัวกระทำแบบอินทิกรัล 24
2.10 ระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น 26
2.11 ระบบควบคุมแบบ H_∞ 29
2.11.1 ตัวถ่วงความอ่อนไหว 29
2.11.2 การเลือกค่าตัวถ่วง 30
2.11.3 ความต้องการแบบผสมผสาน 31
2.11.4 รูปแบบทั่วไปของระบบ 31
2.11.5 การแบ่งส่วนของระบบทั่วไป 33
2.11.6 การหาเมตริกซ์ N จากการวิเคราะห์ระบบปิด 33
2.11.7 ตัวควบคุมแบบ H_∞ 34
2.11.8 ตัวควบคุม H_∞ แบบเหมาะสมที่สุด 35
2.11.9 อัลกอลิทึมทั่วไปของ H_∞ 36
2.11.10 การหาค่า γ โดยวิธีวนซ้ำ 37

บทที่ 3 ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ 38

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 38
3.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของระบบสมการที่ไม่เชิงเส้น 40
3.3 ฟังก์ชันถ่ายโอน 40
3.4 แบบจำลองรูปแบบสเตทสเปซ 42
3.5 การออกแบบระบบควบคุมแบบพีไอดี 44
3.5.1 การควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัม 44
3.5.2 การควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ 47
(1) ระบบควบคุมแบบพีไอดี-พีไอดี 51
(2) ระบบควบคุมแบบพีดี-พีไอดี 53

3.6 การออกแบบระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น 55
3.6.1 การหาค่าเกนของระบบควบคุม 56
(1) การหาค่าเกนขยายป้อนก้าวหน้า 59
(2) การหาค่าเกนตัวกระทำแบบอินทิกรัล 61

บทที่ 4 ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ 67

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 67
4.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของระบบสมการ 71
4.3 ความไม่แน่นอนของระบบ 72
4.3.1 ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในบล็อก A1 72
4.3.2 ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในบล็อก A2 73
4.3.3 ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในบล็อก A3 74
4.4 การออกแบบระบบควบคุม H_∞ 80
4.4.1 การจัดเตรียมระบบก่อนการหาตัวควบคุม H_∞ 80
4.4.2 การหาค่าตัวควบคุมแบบ H_∞ ด้วย MATLAB 81
4.5 การประยุกต์ใช้งานบนโปรแกรม LABVIEW 86

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ 91

รายการอ้างอิง 93

ประวัติผู้เขียน 96

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

ตารางที่		หน้า
2.1	ผลกระทบของค่าเกนที่มีต่อพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของผลตอบสนองของระบบ	19
2.2	วิธีการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการปฏิกิริยาของกระบวนการโดยซีกเลอร์-นิโคลส์	21
2.3	วิธีการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการวัฏจักรท้ายสุดโดยซีกเลอร์-นิโคลส์	22
2.4	วิธีการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการของโคเฮนและคูน	22
3.1	เปรียบเทียบค่าผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบต่าง ๆ	66

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1.1	แบบต่าง ๆ ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผัน	2
1.2	ผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบพีไอดี	5
1.3	ผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบ LQR	6
1.4	ผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบ H_∞	7
2.1	ส่วนประกอบทั่วไปของระบบควบคุม	11
2.2	บล็อกไดอะแกรมของระบบเชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลา	14
2.3	ผลตอบสนองทั่วไปของระบบทางพลศาสตร์	18
2.4	ผลตอบสนองของระบบเมื่ออินพุทเป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วย (Unit-step response)	20
2.5	ผลตอบสนองของระบบที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้งคล้ายรูปตัว S	20
2.6	ระบบควบคุมป้อนกลับแบบสัดส่วน	21
2.7	บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับและเกนขยายป้อนก้าวหน้า	24
2.8	บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับและตัวกระทำแบบอินทิกรัล	24
2.9	บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น	27
2.10	ตัวถ่วงประสิทธิภาพแบบผกผัน	30
2.11	รูปแบบทั่วไปของระบบ P	32
2.12	รูปแบบทั่วไปของระบบควบคุม	32
2.13	บล็อกไดอะแกรมของระบบ $z = Nw$	33
3.1	แผนภาพวัตถุอิสระของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่	38
3.2	บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบป้อนกลับ	45
3.3	เส้นทางเดินของรากของระบบก้านเพนดูลัม	45
3.4	เส้นทางเดินของรากของระบบก้านเพนดูลัมหลังจากเพิ่มโพลที่จุดกำเนิด	46
3.5	เส้นทางเดินของรากของระบบก้านเพนดูลัมหลังจากเพิ่มโพลที่จุดกำเนิดและเพิ่มซีโร	46
3.6	ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบพีไอดี	48
3.7	ผลตอบสนองของตัวรถสืบเนื่องจากระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบพีไอดี	48
3.8	บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบป้อนกลับ	50

3.9 ผลตอบสนองของฟังก์ชันถ่ายโอน $G^*(s)$ 51
3.10 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบพีไอดี-พีไอดี 53
3.11 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบพีดี-พีไอดี 54
3.12 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับทุกค่า 55
3.13 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ เมื่อค่าเกนคือ [−1 −1.6567 18.6854 3.4594] 57
3.14 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ เมื่อค่าเกนคือ [−22.3607 −40.5543 310.6996 117.0419] 58
3.15 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับทุกค่าและเกนขยายป้อนก้าวหน้า 59
3.16 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบกำลังสองเชิงเส้น 60
3.17 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับทุกค่าและตัวกระทำแบบอินทิกรัล 61
3.18 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ เมื่อค่าเกนคือ [−7.5124 −7.4421 38.9323 8.1723] และ k_I = −3.1623 63
3.19 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบกำลังสองเชิงเส้นและตัวกระทำอินทิกรัล 64
3.20 เปรียบเทียบผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งตัวรถแบบต่าง ๆ 65
3.21 เปรียบเทียบผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบต่าง ๆ 65
4.1 แผนภาพวัตถุอิสระของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ 67
4.2 ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของก้านเพนดูลัม 68
4.3 บล็อกไดอะแกรมของระบบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ 72
4.4 บล็อกไดอะแกรมของระบบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถแบบรวมสมการความไม่แน่นอน 75
4.5 บล็อกไดอะแกรม LFT ของระบบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถแบบตามที่ระบุ และสมการระบบความไม่แน่นอน 79
4.6 บล็อกไดอะแกรมของระบบปิดของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ 80
4.7 การเชื่อมต่อระบบเปิดของชุดทดลอง 82

4.8 การเชื่อมต่อระบบปิดของชุดทดลอง 83

4.9 บล็อกไดอะแกรมสำหรับระบบทั่วไปของระบบสำหรับการหาค่าตัวควบคุม H_∞ 84

4.10 เปรียบเทียบตัวถ่วงประสิทธิภาพและฟังก์ชันความอ่อนไหว 86

4.11 แบบจำลองชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถบนโปรแกรม LABVIEW 87

4.12 ผลตอบสนองของระบบควบคุม H_∞ แบบคงค่า 89

4.13 ผลตอบสนองของระบบควบคุม H_∞ แบบปรับค่าตามจุดอ้างอิง 90

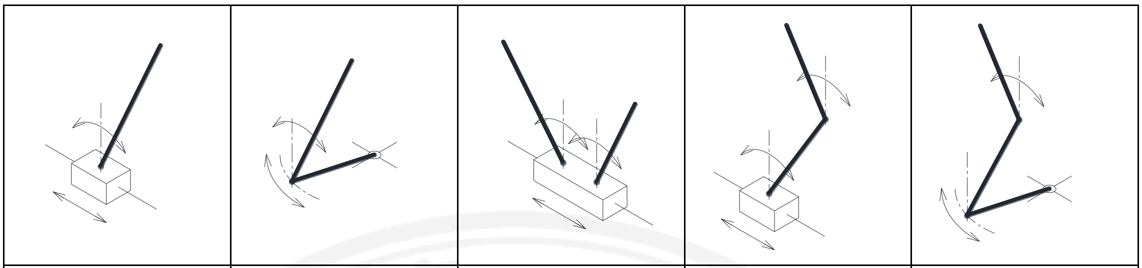
บทที่ 1
บทนำ

1.1.ความสำคัญและที่มา

ในการศึกษาระบบควบคุมทางวิศวกรรมนั้นจะประกอบไปด้วย 2 ส่วนหลักได้แก่ ระบบ (Plant) และชุดควบคุม (Controller) โดยระบบ (Plant) ที่ใช้ในการศึกษานั้นมีมากมายหลายแบบ เช่น ระบบทางเครื่องกลเคมี หรือไฟฟ้า ขึ้นอยู่กับสิ่งที่เราจะนำมาพิจารณาและอาจมีขนาดเล็กหรือใหญ่ก็ได้ส่วนระบบควบคุมนั้นปัจจุบันได้มีการคิดค้นและประดิษฐ์ขึ้นมาเป็นจำนวนมาก ซึ่งสำหรับระบบควบคุมในแต่ละแบบนั้นก็มีพฤติกรรมในการควบคุมที่ไม่เหมือนกันด้วย โดยในการเลือกระบบควบคุมส่วนใหญ่จะพิจารณาจากพฤติกรรมของระบบการประยุกต์ใช้ของระบบ หรือผลตอบสนองที่ได้จากระบบ

ในที่นี้ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ นั้นสามารถเป็นโจทย์ที่ดีสำหรับการศึกษาระบบควบคุมทางวิศวกรรม เพราะชุดทดลองนั้นเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น และเป็นระบบที่มีจำนวนตัวแปรเอาท์พุตมากกว่าตัวแปรอินพุต (Under-Actuated system) อีกด้วยซึ่งชุดทดลองลูกตุ้มผกผันนั้นก็มีด้วยกันหลายแบบเช่น

- ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ (Inverted pendulum on a Cart)
- ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง (Rotary Inverted pendulum)
- ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบ 2 ก้านและ 2 จุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ (Dual Inverted pendulum on a Cart)
- ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบ 2 ก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ (Double Inverted pendulum on a Cart)
- ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบ 2 ก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง (Double-Rotary Inverted pendulum on a Cart)
- อื่น ๆ



Single Inverted Pendulum on a Cart	Rotary Inverted Pendulum	Dual Inverted Pendulum on a Cart	Double Inverted Pendulum on a Cart	Double-Rotary Inverted Pendulum

ภาพที่ 1.1 แบบต่าง ๆ ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผัน

1.2 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันในแต่ละแบบนั้นได้มีการศึกษาและวิจัยในการสร้างระบบควบคุมเพื่อสร้างเสถียรภาพให้กับชุดทดลองกันอย่างแพร่หลายทั้งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และสร้างชุดทดลองจริงขึ้นมา

Mori[1] ได้ทำการศึกษาระบบเชิงกลที่ไม่มีเสถียรภาพ และต้องการที่จะแสดงให้เห็นว่าระบบควบคุมที่ได้ทำการศึกษามานั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับระบบจริง โดยระบบเชิงกลที่ว่านั้นคือชุดทดลองลูกตุ้มผกผัน (Inverted Pendulum) คณะผู้วิจัยได้ทำการสร้างชุดทดลองและชุดควบคุม เพื่อแสดงให้เห็นว่าระบบดังกล่าวนั้นสามารถมีเสถียรภาพ ณ. ตำแหน่งที่ก้านเพนดูลัมตั้งตรงได้ และยังสามารถแกว่งก้านเพนดูลัมขึ้นไปตั้งตรงเองได้อีกด้วย

Andrew K. Stimac[4] ได้ทำการศึกษาและพัฒนาวิธีควบคุมการเคลื่อนที่ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผัน(Inverted Pendulum)ให้สามารถแกว่งขึ้นไปยังตำแหน่งตั้งตรงได้ด้วยตัวเอง และคงสภาพให้อยู่ ณ. สภาวะสมดุลได้โดยการใช้ตัวควบคุมแบบ LQR และยังได้สร้างชุดทดลองลูกตุ้มผกผันโดยใช้ไมโครคอนโทรเลอร์ dSPACE DSP เป็นตัวประมวลผล โดยทำงานควบคู่กับโปรแกรม Simulink ในโปรแกรม Matlab ซึ่งผลที่ได้จากการทดลองนั้น ชุดทดลองสามารถแกว่งก้านเพนดูลัมจากตำแหน่งด้านล่างไปยังตำแหน่งตั้งตรงได้ด้วยตัวเอง โดยอาศัยวิธีการที่ผู้ทำการทดลองนั้นได้พัฒนาขึ้นเอง แล้วยังสามารถรักษาสภาพตั้งตรงได้อย่างมีประสิทธิภาพ

Mustafa Demirci[8] ได้ทำการวิเคราะห์และสร้างระบบควบคุมสำหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบ 2 ก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ (Double-Inverted pendulum) ให้มีเสถียรภาพ ซึ่งในการทดลองนี้ได้พิจารณาระบบควบคุม 2 แบบได้แก่ชุดควบคุมแบบ Pole Placement และ Linear Quadratic Regulator (LQR) จากการทดลองนั้นปรากฏว่าวิธีควบคุมทั้ง 2 แบบนั้นสามารถ

สร้างเสถียรภาพให้กับระบบ แต่วิธีควบคุมแบบ LQR นั้นจะสร้างเสถียรภาพให้กับระบบได้ดีกว่าวิธีควบคุมแบบ Pole Placement และทำให้การแกว่งของระบบนั้นลดลงด้วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิธีควบคุมแบบ Pole Placement นั้นมีความยุ่งยากในการพิจารณาและศึกษาพฤติกรรมของระบบควบคุม เพราะพฤติกรรมและผลตอบสนองของระบบนั้นเป็นผลสืบเนื่องมาจากค่าของ eigenvalue ที่ถูกเลือกมาใช้ ซึ่งในการทดลองนี้ใช้วิธีสุ่มเลือกค่าของ eigenvalue.

Johnny Lam[10] ได้ทำการสร้างเสถียรภาพให้กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ (Inverted Pendulum) และสามารถแกว่งขึ้นไปยังตำแหน่งตั้งตรงได้เอง โดยแบ่งระบบควบคุมเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนรักษาเสถียรภาพ ณ. ตำแหน่งตั้งตรงและส่วนที่ใช้แกว่งก้านเพนดูลัมให้เข้าสู่ตำแหน่งตั้งตรง โดยส่วนที่รักษาเสถียรภาพนั้นใช้ระบบควบคุมแบบ LQR Controller และในส่วนที่ใช้แกว่งก้านเพนดูลัมนั้น ผู้ทำการทดลองได้ทำการเปรียบเทียบใช้วิธีควบคุมแบบ Energy controller กับวิธีควบคุมแบบ Heuristic controller ซึ่งจากการทดลองได้แสดงให้เห็นว่าวิธีควบคุมการแกว่งก้านเพนดูลัมแบบ Energy controller นั้นให้ผลตอบสนองที่ดีกว่า

Alexander Bogdanov[9] ได้ทำการสร้างเสถียรภาพให้กับระบบของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบ 2 ก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ (Double-Inverted pendulum) โดยผู้วิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของชุดทดลองและตัวควบคุม เพื่อทำการเปรียบเทียบผลตอบสนองระหว่างชุดควบคุมแบบ LQR, State-Dependent Riccati Equation (SDRE), Neural Network (NN), แบบผสมผสานระหว่าง NN กับ LQR และแบบผสมผสานระหว่าง NN กับ SDRE และผลจากการจำลองนั้นแสดงให้เห็นว่าชุดควบคุมแบบ SDRE นั้นระบบสามารถกู้เพนดูลัมให้กับมายังสมดุลได้ดีกว่าชุดควบคุมแบบ LQR ชุดควบคุมแบบ NN สามารถให้ผลตอบสนองได้ดีกว่าชุดควบคุมแบบ LQR แต่ความสามารถในการกู้ก้านเพนดูลัมนั้นมีค่าเท่ากัน เพราะเนื่องจากขอบเขตของการประมาณค่าของ NN และในกรณีชุดควบคุมแบบผสมผสานนั้นไม่มีความแตกต่างกันระหว่างแบบ NN กับ LQR และแบบ NN กับ SDRE คือระบบสามารถกู้ก้านเพนดูลัมได้ในมุมที่กว้างขึ้นและให้ผลตอบสนองที่ดีขึ้นเช่นกัน เพราะเป็นผลมาจาก NN นั้นสามารถเรียนรู้ที่จะแก้ไขค่าของการชดเชยระบบซึ่งเกิดจากชุดควบคุม LQR (SDRE)

Lengare[15] ได้ทำการจำลองตัวควบคุม PID แบบปรับแต่งค่าพารามิเตอร์ (Kp, Ti และ Td) ได้โดยอัตโนมัติ โดยผู้วิจัยได้กล่าวว่า การปรับแต่งค่าพารามิเตอร์ของระบบควบคุม PID นั้นมีความสำคัญอย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งระบบที่มีขนาดใหญ่และมีความซับซ้อน. สำหรับงานวิจัยนี้คณะผู้วิจัยได้ทำการนำเสนอลำดับวิธีการปรับแต่งตัวควบคุม PID ด้วยการหาค่าพารามิเตอร์โดยใช้การคำนวณที่ไม่ซับซ้อนและน้อยที่สุด แต่ต้องอาศัยการวิเคราะห์ระบบอย่างต่อเนื่องเพื่อติดตามการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์บางตัว และปล่อยให้โปรแกรมที่ตั้งไว้ทำการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์

และควบคุมระบบต่อไป โดยที่ระหว่างนั้นจะมีการปรับปรุงค่าพารามิเตอร์ให้มีความเหมาะสมกับระบบมากที่สุด ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาระบบที่เป็นแบบ monotonic step response และที่เป็นแบบ underdamped step response และจากการทดสอบในแบบจำลองนั้น ลำดับวิธีการดังกล่าวนั้นได้ใช้เวลาน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับการหาค่าแบบผลกระทบชั่วครู่ (Step response test) สำหรับการปรับแต่งค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PID แบบต่อเนื่องด้วยการใช้ gain scheduling

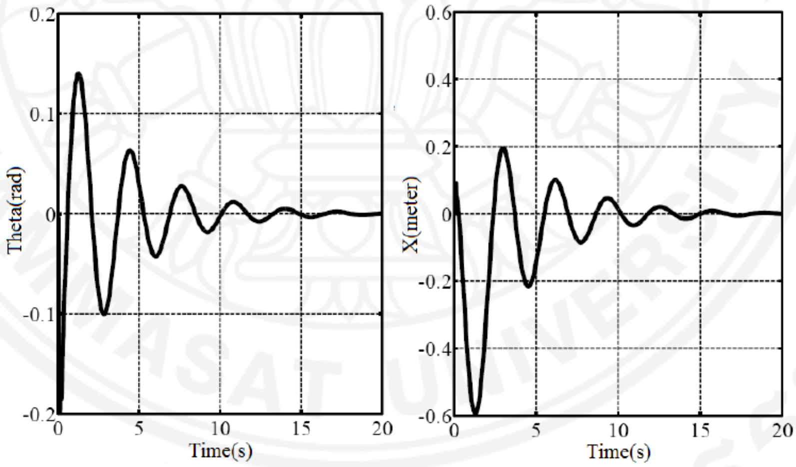
Bryan Kappa[16] มีงานทดลองชื่อ STATE SPACE CONTROL DESIGN FOR DUAL INVERTED PENDULUM ผู้ทดลองได้ทำการศึกษาชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบ 2 ก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ (Double-Inverted pendulum) โดยอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการทดลองบนชุดทดลองจริง ซึ่งใช้ระบบควบคุมแบบ Pole Placement โดยพิจารณาเป็น Discrete State-space. ในส่วนของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นใช้โปรแกรม LabVIEW ช่วยในการศึกษา และในสำหรับชุดทดลองใช้ไมโครคอนโทรเลอร์ของ ATmega8 ในการควบคุมระบบของชุดลอง

Nasir[17] ได้ทำการสร้างเสถียรภาพให้กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผัน โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างชุดควบคุมแบบ PD-PID กับชุดควบคุมแบบ Sliding Mode ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และจำลองการควบคุมในโปรแกรม Matlab และผลที่ได้จากแบบจำลองนั้นแสดงให้เห็นว่าชุดควบคุมทั้ง 2 แบบสามารถสร้างเสถียรภาพให้กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ (Inverted Pendulum) แต่ชุดควบคุมแบบ Sliding Mode นั้นผลตอบสนองที่ดีกว่าเมื่อเทียบกับชุดควบคุมแบบ PID

Kaveh Razzaghi[18] ได้ทำการทดลองการควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ (Inverted Pendulum) โดยใช้ชุดควบคุมแบบ PID และทำการจำลองระบบบนโปรแกรม Matlab เมื่อพิจารณาจากระบบนั้น ระบบมีตัวแปรควบคุมถึง 2 ตัวคือมุมของก้านเพนดูลัม และระยะการเคลื่อนที่ของตัวรถ ดังนั้นผู้ทดลองจึงพิจารณาแบ่งการทดลองออกเป็น 2 ส่วนโดยแบ่งตามลำดับของตัวแปรที่จะใช้ PID ในการควบคุมได้แก่ 1) ควบคุมการเคลื่อนที่ของตัวรถก่อนจึงไปควบคุมการเคลื่อนที่ของก้านเพนดูลัม 2) ควบคุมการเคลื่อนที่ของก้านเพนดูลัมก่อนจึงไปควบคุมการเคลื่อนที่ของตัวรถ. และจากการทดลองได้แสดงให้เห็นว่าการเรียงลำดับตัวแปรที่จะใช้ในการควบคุมระบบนั้นมีความสำคัญเช่นกัน โดยถ้าควบคุมการเคลื่อนที่ของก้านเพนดูลัมก่อนจึงไปควบคุมการเคลื่อนที่ของตัวรถ ค่าการแกว่งและค่า overshoot ของระบบ จะมีค่าลดลงรวมไปถึง ระบบนั้นสามารถเข้าสู่สภาวะสมดุลได้เร็วขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับการควบคุมการเคลื่อนที่ตัวรถก่อนจึงไปควบคุมการเคลื่อนที่ของก้านเพนดูลัม ซึ่งผู้ทำการทดลองได้สรุปว่า การควบคุมแบบ PID นั้นได้ถูกออกแบบให้เหมาะสมสำหรับระบบที่เป็น SISO-Single Input Single Output เท่านั้น แต่สำหรับระบบที่มีหลายตัวแปรควบคุมนั้นจำเป็นต้องใช้ตัวควบคุมหลายตัวเช่นกันโดยพิจารณาการจัดลำดับการควบคุมของ

ตัวแปรควบคุม ซึ่งถ้าเรารู้ว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรหลักของระบบ เราก็อาจควบคุมตัวแปรนั้นเป็นตัวแรกแล้วค่อยควบคุมตัวแปรที่เหลือตามลำดับ หรือเราอาจสามารถควบคุมระบบได้ด้วยตัวแปรนั้นตัวแปรเดียว

Thamer Ali Albahkali[19] ได้ทำการนำเสนอแนวคิดใหม่สำหรับระบบควบคุมสำหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ (Double Inverted pendulum) ซึ่งสามารถแกว่งขึ้นไปยังตำแหน่งสมดุลได้เอง ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า Impulse-Momentum โดยมีหลักการและแนวคิดดังนี้ 1) กำหนดค่าเริ่มต้นให้แก่ระบบ 2) ขยับตัวรถเพื่อให้ก้านเพนดูลัมชิ้นแรกแกว่ง จนเข้าสู่สภาวะสมดุล และรักษาสภาวะนั้นไว้โดยยอมให้มุมของก้านชิ้นแรกนั้นสามารถแกว่งได้เล็กน้อย และ ณ. ขณะนี้ยังไม่พิจารณาพฤติกรรมของก้านเพนดูลัมอันที่สอง 3) ขยับตัวรถเพื่อให้ก้านเพนดูลัมทั้งสองชิ้นเข้าสู่จุดสมดุลและรักษาสภาวะสมดุลนั้นต่อไปและผลจากแบบจำลองนั้นแสดงให้เห็นว่าชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่นั้นสามารถแกว่งขึ้นไปยังตำแหน่งสมดุลได้เองและเป็นไปตามแนวคิดที่ได้คิดไว้

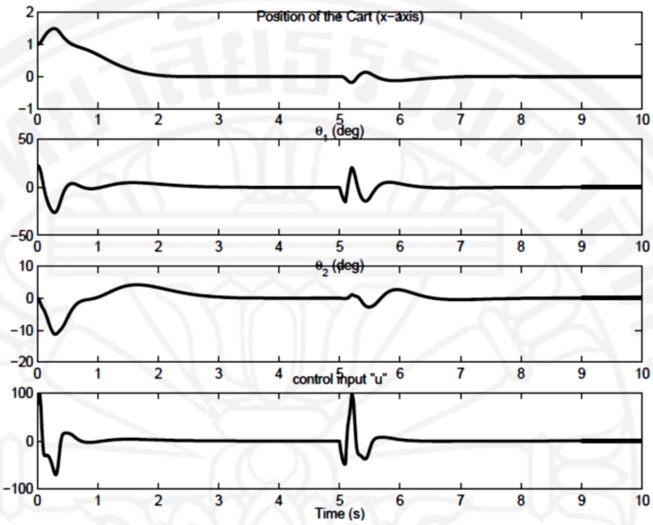


ภาพที่ 1.2 ผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบพีไอดี[18]

รายการอ้างอิง

[18] Razzaghi K, Jalali AA. A new approach on stabilization control of an Inverted Pendulum, using PID controller. Advanced Materials Research. 2011;403-408:4674-80.

Randy C. Hoover(12) ได้ทำการทดลองควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ โดยที่พิจารณาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น และใช้ระบบควบคุมแบบ LQR โดยทำการทดสอบโดยมีการเพิ่มสัญญาณรบกวนภายนอกเข้าในระบบด้วย ซึ่งผลตอบสนองได้แสดงตามภาพที่ 1.3

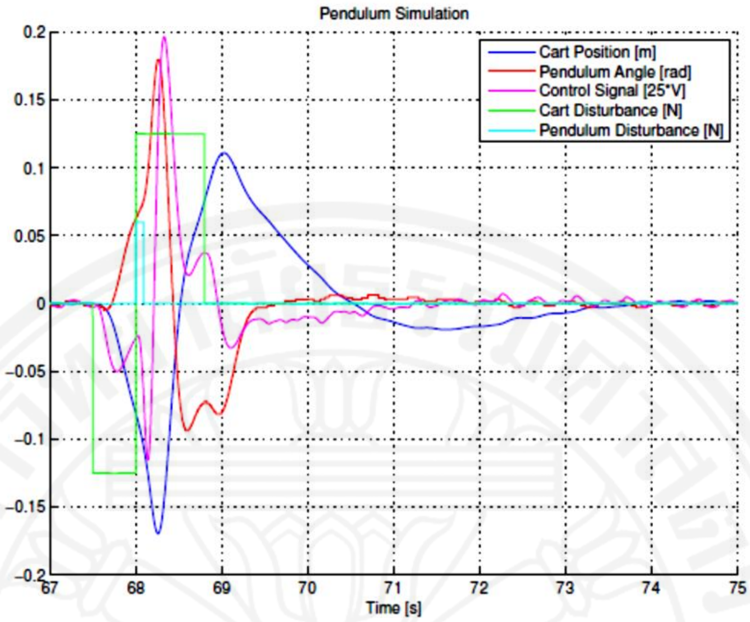


ภาพที่ 1.3 ผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบ LQR(13)

รายการอ้างอิง

[13] Skogestad S, Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control Analysis and design. NJ: Wiley; 2005.

Christopher Mayphew(23) ได้ทำการใช้ระบบควบคุมแบบ H_∞ กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่และใช้การทดสอบระบบแบบ μ สำหรับวิเคราะห์ประสิทธิภาพของความทนทานที่มีต่อระบบ และได้วิธีลองผิดลองถูกแบบ D-K เพื่อหาระบบควบคุม H_∞ ที่สร้างทั้งเสถียรภาพและประสิทธิภาพให้กับชุดทดลองนี้ ทั้งนี้ได้ทำการสร้างและทดสอบกับชุดทดลองจริงอีกด้วย ซึ่งได้ผลตอบสนองของระบบดังภาพที่ 1.4



ภาพที่ 1.4 ผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบ H_∞ [23]

รายการอ้างอิง

[23] Mayphew C. Robust Control of an Inverted Pendulum. [internet]. Available from: http://www.ece.ucsb.edu/

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวข้างต้น หากนำระบบควบคุมแบบพีไอดีที่หาค่าพารามิเตอร์ (Kp, Ti และ Td) ได้โดยอัตโนมัติมาควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่นั้น ก็สามารถช่วยลดขั้นตอนในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมแบบพีไอดี

1.3 วัตถุประสงค์

1.3.1 ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่

1.3.2 ออกแบบระบบควบคุม และประยุกต์ใช้สำหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ให้สามารถมีเสถียรภาพได้โดยใช้โปรแกรม LabVIEW

1.4 ขอบเขตงานวิจัย

1.4.1 ใช้ระบบควบคุมแบบ H_∞

1.4.2 สภาวะเริ่มต้นของชุดทดลองได้แก่ ตัวรถนั้นอยู่กับที่ ก้านเพนดูลัมที่ 1 และ 2 นั้นตั้งตรงและอยู่กับที่

1.4.3 ก้านเพนดูลัมทั้งสองก้านมีลักษณะและคุณสมบัติเหมือนกันทุกประการ

1.4.4 ข้อกำหนดในการออกแบบระบบควบคุมมีดังนี้

(1) ก้านเพนดูลัมทั้งสองก้านสามารถแกว่งตัวได้ไม่เกิน $\pm$ 0.05 เรเดียน จากตำแหน่งตั้งตรง

(2) Settling time มีค่าน้อยกว่า 5 วินาที สำหรับผลตอบสนองของก้านเพนดูลัม

(3) Rise time มีค่าน้อยกว่า 2 วินาที สำหรับผลตอบสนองของตัวรถ

(4) Steady-state error มีค่าน้อยกว่า 2% สำหรับผลตอบสนองของตัวรถและก้านเพนดูลัม

1.5 ขั้นตอนการทำงาน

ระยะเวลา (เดือน) / รายละเอียด	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ศึกษาพฤติกรรมและการทำงานของชุดทดลองลูกตุ้มผกผัน												
คำนวณหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบโดยใช้โปรแกรม MATLAB และ MATHEMATICA												
คำนวณหา Transfer Function ของระบบโดยใช้โปรแกรม MATHEMATICA												
ศึกษาชุดควบคุมแบบ Auto Tuning-PID และออกแบบให้เหมาะสมกับชุดทดลอง												
นำระบบควบคุมมาประยุกต์ใช้งานกับชุดทดลองโดยใช้โปรแกรม LabVIEW												
ทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดลอง												
สรุปผลการทดลองและจัดทำรูปเล่ม												

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

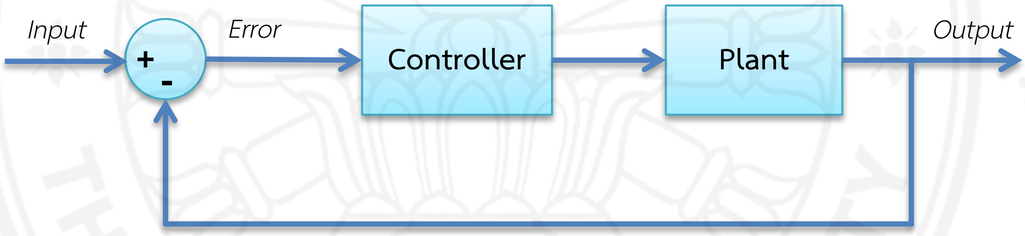
1.6.1 สามารถนำโปรแกรม LabVIEW มาสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ให้กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ได้

1.6.2 สามารถนำชุดควบคุมแบบพีไอดีมาประยุกต์ใช้กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่ได้

1.6.3 สามารถสร้างชุดควบคุมที่ทำให้ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันที่มีจุดหมุนเคลื่อนที่เกิดเสถียรภาพได้

บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ระบบควบคุมทั่วไปสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมตามรูปด้านล่างนี้ และเมื่อพิจารณาจากรูป สิ่งที่ได้ออกจากระบบ (Plant) คือสัญญาณเอาท์พุท (Output) ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งค่าของระยะการกระจัด อุณหภูมิ ความดันเป็นต้น แล้วเมื่อนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับค่าของสัญญาณอินพุท (Input) จะได้ค่าความผิดพลาด ค่าความผิดพลาดจะถูกส่งต่อไปยังตัวควบคุม (Controller) เพื่อสร้างสัญญาณควบคุมไปควบคุมระบบต่อไป โดยกระบวนการทั้งหมดนี้จะกระทำไปเรื่อยๆ จนกว่าค่าของสัญญาณเอาท์พุทจะมีค่าเท่ากับหรือใกล้เคียงกับค่าของสัญญาณอินพุท หรืออีกนัยหนึ่งคือค่าความผิดพลาดจะมีค่าลดลงหรือเท่ากับศูนย์



ภาพที่ 2.1 ส่วนประกอบทั่วไปของระบบควบคุม

2.1 ฟังก์ชันถ่ายโอน

ในทฤษฎีของระบบควบคุม ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) มักนิยมใช้ในการอธิบายคุณลักษณะความสัมพันธ์ของอินพุท-เอาท์พุทของอุปกรณ์หรือระบบที่เป็นสมการเชิงเส้นสมการไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา หรือ สมการอนุพันธ์

ฟังก์ชันถ่ายโอนเป็นอัตราส่วนระหว่างเอาท์พุทกับอินพุทของระบบ ที่ถูกแปลงลาปลาซเรียบร้อยแล้ว โดยที่สมมติให้สภาวะเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์

พิจารณาระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (time-invariant) ซึ่งถูกเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ดังนี้

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \quad (n \geq m) \qquad (2.1)$$

โดยที่ y คือเอาท์พุทของระบบ และ x คืออินพุท ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเป็นดังนี้

$$\text{Transfer function:} \qquad G(s) = \left.\frac{\mathscr{L}[\text{output}]}{\mathscr{L}[\text{input}]}\right|_{\text{zero initial conditions}}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{2.2}$$

ในกรณีที่เลขชี้กำลังของตัวแปร s ที่ตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าเท่ากับ n อาจเรียกระบบนั้นว่าเป็น ระบบอันดับที่ n

2.2 แบบจำลองรูปแบบสเตทสเปซ

การวิเคราะห์แบบจำลองที่อยู่ในรูปสเตทสเปซ (State-space) จะคำนึงถึงตัวแปร 3 ตัว ซึ่งมีความสัมพันธ์กันในแบบจำลองของระบบพลศาสตร์ได้แก่ ตัวแปรอินพุท (input variables) ตัวแปรเอาท์พุท (output variables) และ ตัวแปรสเตท (state variables)

ระบบพลศาสตร์จำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับองค์ประกอบที่สามารถจดจำค่าของสัญญาณอินพุทสำหรับ $t \geq t_1$ ได้ ถ้าให้อินทิเกรเตอร์ในระบบควบคุมแบบต่อเนื่องนั้นเป็นหน่วยความจำสัญญาณเอาท์พุทของอินทิเกรเตอร์สามารถพิจารณาเป็นตัวแปรที่แสดงถึงสถานะภายในของระบบพลศาสตร์ ซึ่งหมายความว่าเป็นตัวแปรสเตท และจำนวนของตัวแปรสเตทของระบบพลศาสตร์นั้นจะมีค่าเท่ากับจำนวนของอินทิเกรเตอร์ที่เกี่ยวข้องในระบบ

สมมติว่าในระบบที่มีสัญญาณอินพุทหลายทางและสัญญาณเอาท์พุทหลายทาง (MIMO-Multiple input multiple output) มีจำนวนอินทิเกรเตอร์เท่ากับ n ตัว มีสัญญาณอินพุทเท่ากับ r ตัวได้แก่ $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$ และมีสัญญาณเอาท์พุทเท่ากับ m ตัวได้แก่ $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ กำหนดให้สัญญาณเอาท์พุทของอินทิเกรเตอร์ n ตัวนั้นเป็นตัวแปรสเตทได้แก่ $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ดังนั้นระบบดังกล่าวอาจอธิบายเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\
&\;\;\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

สัญญาณเอาท์พุท $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ ของระบบอาจอธิบายเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

และถ้ากำหนดให้

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \\ . \\ . \\ . \\ g_m(x_1, x_2, \ldots x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการที่ (2.3) และ (2.4) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2.6}$$

โดยสมการที่ เรียกว่าสมการสเตท (state equation) และสมการที่ เรียกว่าสมการเอาท์พุท (output equation). ถ้าฟังก์ชันเวคเตอร์ $\mathbf{f}$ หรือ $\mathbf{g}$ นั้นเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา จะเรียกระบบนั้นว่าระบบที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (time-varying system)

ถ้าสมการที่ (2.5) และ (2.6) เป็นสมการเชิงเส้นที่จุดใช้งาน ดังนั้นสมการดังกล่าวสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้ หรือเขียนให้อยู่ในรูปบล็อกไดอะแกรมที่แสดงในภาพที่ 2.2

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.8}$$

โดยที่ $\mathbf{A}(t)$ เรียกว่า เมตริกซ์สเตท

$\mathbf{B}(t)$ เรียกว่า เมตริกซ์อินพุท

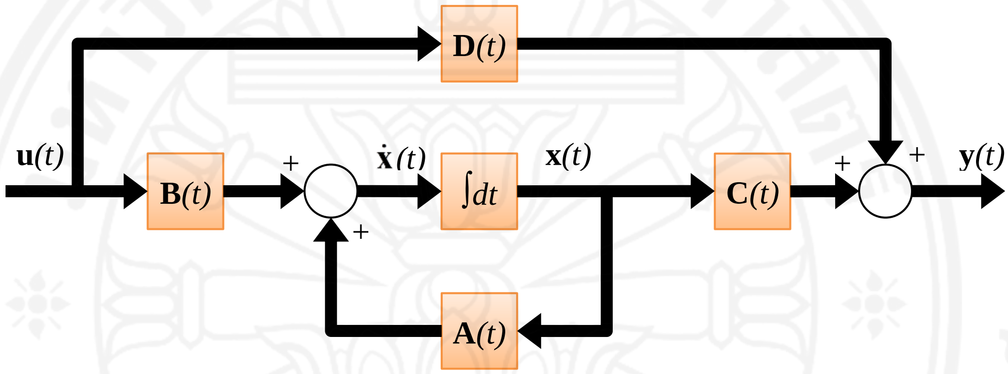
$\mathbf{C}(t)$ เรียกว่า เมตริกซ์เอาท์พุท

$\mathbf{D}(t)$ เรียกว่า the direct transmission matrix

และถ้าฟังก์ชันเวคเตอร์ $\mathbf{f}$ หรือ $\mathbf{g}$ นั้นเป็นฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับเวลา จะเรียกระบบนั้นว่าระบบที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (time-invariant system) ซึ่งสมการ (2.7) และ (2.8) สามารถลดรูปได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2.9}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{2.10}$$



ภาพที่ 2.2 บล็อกไดอะแกรมของระบบเชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลา

สภาพควบคุมได้และสภาพสังเกตได้

สภาพควบคุมได้ (Controllability) จะบ่งบอกถึงความสามารถของระบบ เมื่อมีเวกเตอร์ควบคุมแบบไม่มีเงื่อนไขมาขับเคลื่อนระบบจากสถานะเริ่มต้นใดๆ ไปยังอีกสถานะหนึ่งภายในเวลาที่กำหนดได้

สภาพสังเกตได้ (Observability) จะบ่งบอกถึงความสามารถที่จะสังเกตข้อมูลของตัวแปรสถานะเมื่อพิจารณาจากสัญญาณเอาท์พุทภายในเวลาที่กำหนดไว้

สมมติให้สมการของระบบคือ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

โดยที่ $\mathbf{x}$ เป็น เวคเตอร์สถานะ (state vector) (n-เวคเตอร์)

u เป็น สัญญาณควบคุม (ปริมาณสเกลาร์)

$\mathbf{A}$ เป็น เมตริกซ์ $n \times n$

$\mathbf{B}$ เป็น เมตริกซ์ $n \times 1$

$\mathbf{C}$ เป็น เมตริกซ์ $m \times n$

ระบบข้างต้นจะมีสภาพควบคุมได้ก็ต่อเมื่อ

$$\text{rank}(\mathbf{M}) = n$$

โดยที่

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB} & \vdots & \cdots & \vdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

หรือเรียกเมตริกซ์ $\mathbf{M}$ $(n \times n)$ ว่า เมตริกซ์ของสภาพควบคุมได้ (Controllability matrix) และระบบข้างต้นจะมีสภาพสังเกตได้ก็ต่อเมื่อ

$$\text{rank}(\mathbf{N}) = n$$

โดยที่

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \cdots \\ \mathbf{CA} \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

หรือเรียกเมตริกซ์ $\mathbf{N}$ $(n \times m)$ ว่า เมตริกซ์ของสภาพสังเกตได้ (Observability matrix)

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนและสมการสเตทสเปซ

พิจารณาจากระบบที่มีสัญญาณอินพุททางเดียวและสัญญาณเอาท์พุททางเดียว (SISO-Single input single output) ซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (2.13)$$

หรืออาจเขียนให้อยู่ในรูปสมการสเตทสเปซได้ดังนี้

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \quad (2.14)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + Du \quad (2.15)$$

โดยที่ $\mathbf{x}$ คือเวคเตอร์สถานะ u คือสัญญาณอินพุท และ $\mathbf{y}$ คือสัญญาณเอาท์พุท

จากนั้นทำการแปลงลาปลาซสมการที่ (2.14) และ (2.15) ได้ดังนี้ โดยที่สมมติให้สภาวะเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์

$$sX(s) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (2.16)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}X(s) + DU(s) \quad (2.17)$$

จากสมการที่ (2.16)

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})X(s) = \mathbf{B}U(s)$$

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (2.18)$$

จากนั้นนำสมการที่ (2.18) แทนค่าลงในสมการที่ (2.17) ได้ว่า

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)+DU(s)$$

$$= \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D\right]U(s)$$

$$\therefore \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+D \tag{2.19}$$

แทนค่า

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}$$

ดังนั้นสมการที่ (2.19) อาจเขียนใหม่ได้ว่า

$$G(s) = \frac{\mathbf{C}[adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})]\mathbf{B}}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}+D \tag{2.20}$$

เพราะฉะนั้นจากสมการข้างต้น สมการคุณลักษณะของระบบ $G(s)$ คือ $|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ หรือค่า eigen-value ของ A จะแสดงตำแหน่งโพลของระบบ $G(s)$.

2.4 การประมาณค่าเชิงเส้นของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ในการทำงานปกติระบบจะทำงาน ณ ตำแหน่งที่มีความสมดุล และสัญญาณที่ใช้ในการพิจารณาอาจจะใช้แค่บริเวณตำแหน่งที่ระบบมีความสมดุล ซึ่งอาจมีข้อยกเว้นในบางระบบ แต่อย่างไรก็ตามถ้าระบบทำงานปกติ ณ ตำแหน่งสมดุลและสัญญาณที่พบมีขนาดเล็กมาก ทำให้มีความเป็นไปได้ที่จะสามารถทำการประมาณค่าเชิงเส้นให้กับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยผลจากการประมาณค่าที่ได้สามารถเทียบเท่ากับระบบจริงที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่มีขอบเขต ณ บริเวณตำแหน่งสมดุลเท่านั้น

พิจารณาระบบโดยมีอินพุท $x(t)$ และเอาท์พุท $y(t)$ ซึ่งมีความสัมพันธ์ของ $x(t)$ และ $y(t)$ คือ

$$y = f(x) \tag{2.21}$$

และถ้าตำแหน่งที่ระบบทำงานปกติได้แก่ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ จากนั้นทำการกระจายสมการที่ (2.21) ณ ตำแหน่งดังกล่าวได้ว่า

$$y = f(x)$$

$$= f(\bar{x})+\frac{df}{dx}(x-\bar{x})+\frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x-\bar{x})^2+\cdots \tag{2.22}$$

สมมติถ้าการเปลี่ยนแปลงของ x ณ ตำแหน่ง $\bar{x}$ มีค่าน้อยมาก $(x-\bar{x}\approx 0)$ จึงทำให้เทอมอนุพันธ์ที่มีเลขชี้กำลังตั้งแต่สองเป็นต้นไปมีค่าน้อยมากหรือเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสามารถตัดเทอมอนุพันธ์ดังกล่าวทิ้ง ทำให้สมการที่ (2.23) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$y \;=\; f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) \tag{2.23}$$

จากสมการที่ (2.23) เป็นสมการเชิงเส้นที่ได้ทำการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ จากสมการที่ (2.22) ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ต่อมาเมื่อพิจารณาระบบสมการที่มีเอาท์พุท y และอินพุทซึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, \ldots, x_n$ โดยมีความสัมพันธ์คือ

$$y \;=\; f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.24}$$

และถ้าระบบมีตำแหน่งทำงานปกติได้แก่ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ และ $\bar{y}$ จากนั้นทำการกระจายสมการที่ (2.24) ณ ตำแหน่งใช้งานดังกล่าว และทำการตัดเทอมอนุพันธ์ที่มีเลขชี้กำลังตั้งแต่สองเป็นต้นไปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y \;=\; & f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) + \\ & \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \end{aligned} \tag{2.25}$$

จากสมการที่ (2.25) ระบบสมการเป็นแบบเชิงเส้นที่ได้ทำการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ และ $\bar{y}$

2.5 ผลตอบสนองของระบบ

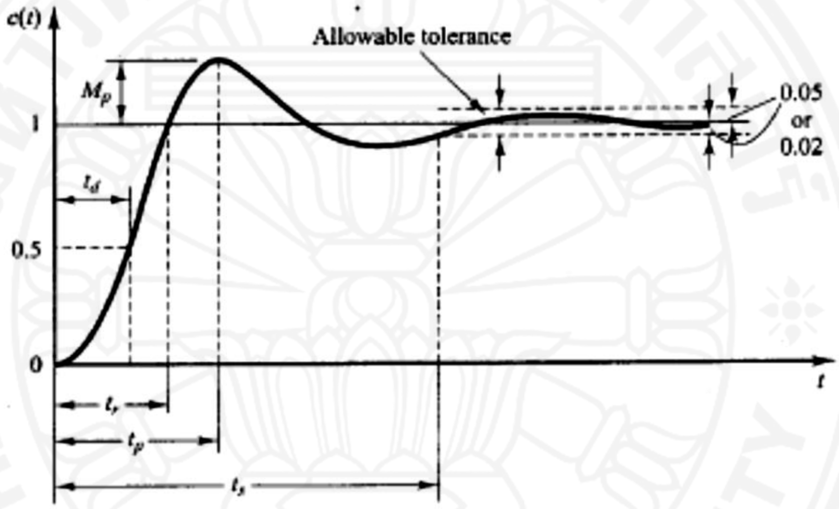
เมื่อพิจารณาจากภาพที่ 2.1 ผลลัพธ์ที่ได้ออกมาจากระบบคือเอาท์พุท โดยเอาท์พุทที่เกิดขึ้นนั้นจะเรียกว่าผลตอบสนองของระบบ ซึ่งเป็นผลสืบเนื่องจากอินพุทที่ส่งเข้าไปหรือสภาวะเริ่มต้น กล่าวคือผลตอบสนองของระบบจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีอินพุทให้กับระบบ หรือสภาวะเริ่มต้นของระบบนั้นไม่อยู่ในสภาวะสมดุล

และเมื่อระบบทางพลศาสตร์ทั่วไปได้รับสัญญาณอินพุทเป็นฟังก์ชั่นหนึ่งหน่วย (Unit-Step function) ผลตอบสนองของระบบสามารถแสดงได้ตามภาพที่ 2.3 และจากรูปผลตอบสนองทั่วไป พารามิเตอร์ต่างๆที่เกิดขึ้นสามารถอธิบายได้ดังนี้

1. Delay time, t_d คือ เวลาที่ผลตอบสนองมีค่าครึ่งหนึ่งของค่าที่กำหนดไว้
2. Rise time, t_r คือ ช่วงเวลาที่ผลตอบสนองมีค่า 10% - 90% หรือจาก 5% - 95% หรือจาก 0% - 100% โดยสำหรับระบบพลศาสตร์ที่มีผลตอบสนองเป็นแบบ overdamped ช่วงเวลาที่ใช้ในการพิจารณาคือ 10% - 90% แต่สำหรับระบบพลศาสตร์ที่มีผลตอบสนองเป็นแบบ underdamped ช่วงเวลาที่ใช้ในการพิจารณาคือ 0% - 100%

3. Peak time, t_p คือ เวลาที่ผลตอบสนองมีค่าสูงสุดเป็นค่าแรก
4. Maximum (percent) overshoot, M_p คือ อัตราส่วนของผลตอบสนองที่มีค่าสูงสุดเมื่อเปรียบเทียบกับค่าที่กำหนดไว้
5. Settling time, t_s คือ เวลาที่ผลตอบสนองมีค่าเข้าใกล้ค่าที่กำหนดไว้ โดยที่ผลต่างที่เกิดขึ้นอาจอยู่ในช่วง 2% ถึง 5%

ในการปรับแต่งค่าเกนต่างๆ ของตัวควบคุม มักจะนำพารามิเตอร์เหล่านี้มาประกอบในการพิจารณาด้วย



ภาพที่ 2.3 ผลตอบสนองทั่วไปของระบบทางพลศาสตร์[23]

รายการอ้างอิง

[23] Ogata K. Modern Control Engineering. 4th ed. NJ: Prentice Hall; 2002.

2.6 ระบบควบคุมแบบพีไอดี (PID Control)

ระบบควบคุมในภาคอุตสาหกรรมมากกว่าครึ่งหนึ่งได้มีการใช้ระบบควบคุมเป็นแบบพีไอดี หรือไม่ก็ระบบควบคุมแบบพีไอดีที่มีการปรับปรุงแล้ว เหตุผลคือตัวควบคุมแบบพีไอดีสามารถปรับแต่งค่าได้ที่หน้างาน มีวิธีการปรับแต่งค่าที่หลากหลายวิธี อีกทั้งวิธีการปรับแต่งค่าแบบอัตโนมัติก็ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่อง โดยที่ตัวควบคุมแบบพีไอดีบางแบบนั้นมีความสามารถในการปรับแต่งค่าแบบอัตโนมัติผ่านทางระบบออนไลน์ และในขณะเดียวกันระบบควบคุมแบบพีไอดีที่ได้มีการปรับปรุงแล้ว

เช่น ระบบควบคุมแบบไอพีดี (I-PD Control) และระบบควบคุมแบบพีไอดีสำหรับ two-degrees-of-freedom ได้มีการนำมาใช้ในภาคอุตสาหกรรมอยู่ในปัจจุบัน

$$G_c(s) = K_p(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s) \quad (2.26)$$

หรือ

$$G_c(s) = K_p+\frac{K_i}{s}+K_d s$$

โดยที่ $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ และ $K_d = K_p T_d$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีข้างต้น ตัวควบคุมแบบพีไอดีนั้นจะประกอบด้วยค่าเกนอยู่ 3 ค่าดังนี้

1. Proportional gain, K_p จะทำหน้าที่ควบคุมค่าความผิดพลาด ณ เวลาปัจจุบัน
2. Integral gain, K_i จะทำหน้าที่ควบคุมการสะสมของค่าความผิดพลาด
3. Derivative gain, K_d จะทำหน้าที่ควบคุมอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าความผิดพลาด

โดยค่าเกนดังกล่าวจะมีผลกระทบต่อพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้กำหนดคุณสมบัติเฉพาะสำหรับผลตอบสนองของระบบซึ่งแสดงตามตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 2.1 ผลกระทบของค่าเกนที่มีต่อพารามิเตอร์ต่างๆ ของผลตอบสนองของระบบ

ค่าเกน	**Rise time**	**Overshoot**	**Settling time**	**Steady-State error**
K_p	ลดลง	เพิ่มขึ้น	เปลี่ยนแปลงน้อยมาก	ลดลง
K_i	ลดลง	เพิ่มขึ้น	เพิ่มขึ้น	ลดลงอย่างมีนัยสำคัญ
K_d	ลดลงน้อยมาก	ลดลงน้อยมาก	ลดลงน้อยมาก	ไม่มีผลในทางทฤษฎี

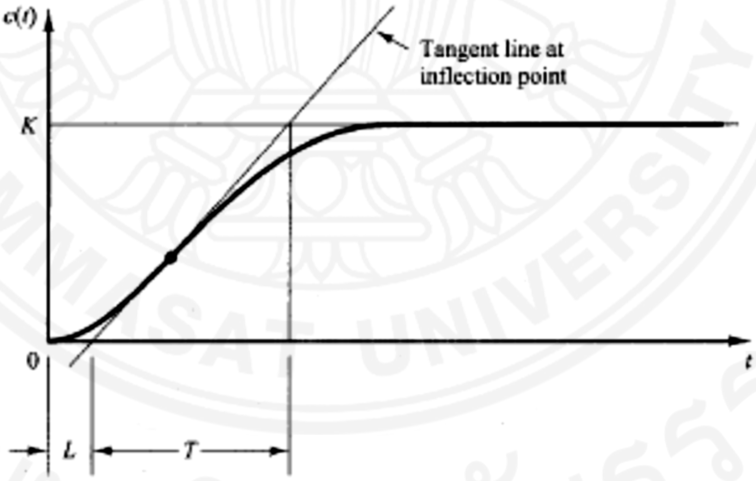
2.7 วิธีการของซีกเลอร์-นิโคลส์ (Ziegler-Nichols Tuning Rules)

ซีกเลอร์และนิโคลส์ได้นำเสนอวิธีการหาค่าของ Proportional gain, K_d, Integral time, T_i และ Derivative time, T_d ซึ่งพิจารณาจากลักษณะเฉพาะของผลตอบสนองชั่วครู่ของระบบ ซึ่งวิธีการปรับแต่งค่าของซีกเลอร์-นิโคลส์มีด้วยกัน 2 วิธีคือ

2.7.1 วิธีการปฏิกิริยาของกระบวนการ (Process Reaction Method)

ในการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการปฏิกิริยาของกระบวนการ จะทำการทดลองเพื่อพิจารณาผลตอบสนองของระบบโดยอินพุทเป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วย (Unit-step function) ซึ่งระบบที่นำมาพิจารณานั้นต้องเป็นระบบเปิด (Open-loop system) ได้แสดงตามภาพที่ 2.4 โดยวิธีการนี้สามารถนำมาวิเคราะห์ได้ก็ต่อเมื่อผลตอบสนองของระบบที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งคล้ายรูปตัว S (S-Shaped) ซึ่งแสดงตามภาพที่ 2.5

ภาพที่ 2.4 ผลตอบสนองของระบบเมื่ออินพุทเป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วย (Unit-step response)(23)



ภาพที่ 2.5 ผลตอบสนองของระบบที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้งคล้ายรูปตัว S(23)

รายการอ้างอิง

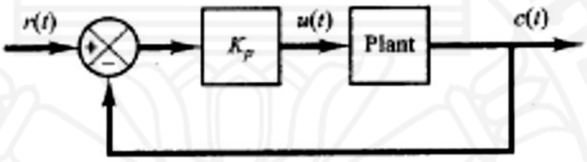
[23] Ogata K. Modern Control Engineering. 4th ed. NJ: Prentice Hall; 2002.

และจากภาพที่ 2.5 เส้นโค้งคล้ายรูปตัว S นี้จะประกอบด้วยค่าคงที่ 2 ตัวที่เป็นลักษณะเฉพาะคือ Delay time, L และ Time constant, T และสามารถหาค่าโดยการวาดเส้น

ความชันจากจุดที่มีความชันมากที่สุดไปตัดกับเส้นแกนของเวลา และตัดกับเส้น $c(t) = K$ หลังจากนั้นนำค่า L และ T ที่ได้มาคำนวณหาค่าเกนตามตารางที่ 2.2 ต่อไป

2.7.2 วิธีการวัฏจักรท้ายสุด (Ultimate Cycle Method)

ในการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการวัฏจักรท้ายสุด อันดับแรกให้ทำการตั้งค่า $T_i = \infty$ และ $T_d = 0$ เพราะว่าวิธีการนี้จะวิเคราะห์จากระบบควบคุมป้อนกลับแบบสัดส่วน (Proportion Control) เท่านั้นซึ่งแสดงตามภาพที่ 2.6



ภาพที่ 2.6 ระบบควบคุมป้อนกลับแบบสัดส่วน[23]

รายการอ้างอิง

[23] Ogata K. Modern Control Engineering. 4th ed. NJ: Prentice Hall; 2002.

หลังจากนั้นค่อยๆเพิ่มค่าเกน K_p จาก 0 จนกระทั่งถึงค่าเกนวิกฤต (Critical gain, K_{cr}) ซึ่งเป็นค่าที่ทำให้ผลตอบสนองของระบบนั้นเกิดการแกว่งด้วยแอมพลิจูดคงที่ (sustained oscillation) และขณะเดียวกันให้ทำการวัดคาบเวลา (P_{cr}) ของการแกว่งที่เกิดขึ้นซึ่งแสดงตามภาพที่ 2.6 หลังจากนั้นนำค่า K_{cr} และ P_{cr} ที่ได้มาคำนวณหาค่าเกนตามตารางที่ 2.3 ต่อไป

ตารางที่ 2.2 วิธีการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการปฏิกิริยาของกระบวนการโดยซีกเลอร์-นิโคลส์

ตัวควบคุม	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

ตารางที่ 2.3 วิธีการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการวัฏจักรท้ายสุดโดยซีกเลอร์-นิโคลส์

ตัวควบคุม	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{P_{cr}}{1.2}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

2.8 วิธีการของโคเฮน-คูน (Cohen-Coon Tuning Rules)

วิธีการนี้เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมรองจากวิธีการของซีกเลอร์และนิโคลส์. โคเฮนและคูนได้นำเสนอวิธีการปรับแต่งค่าพารามิเตอร์ ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้งานได้หลากหลายกว่าวิธีการของซีกเลอร์และนิโคลส์ โดยวิธีการของซีกเลอร์และนิโคลส์สามารถทำงานได้ดีเฉพาะระบบที่มี dead time น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของเวลาคงตัว ซึ่งวิธีการของโคเฮนและคูนสามารถทำงานได้ดีกับระบบที่มี dead time น้อยกว่า 3/4 เท่าของเวลาคงตัว และอีกยังได้เพิ่มวิธีการปรับแต่งของชุดควบคุมแบบพีดีอีกด้วย

วิธีการปรับแต่งของโคเฮนและคูนจะคล้ายคลึงกับวิธีการปฏิกิริยาของกระบวนการของซีกเลอร์และนิโคลส์ โดยกำหนดให้ $a = KL/T$ และ $\tau = L/(L+T)$ จากนั้นทำการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ตามตารางที่ 2.4 ต่อไป

ตารางที่ 2.4 วิธีการปรับแต่งค่าด้วยวิธีการของโคเฮนและคูน

ตัวควบคุม	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a}\left(1+\frac{0.35\tau}{1-\tau}\right)$	∞	0
PI	$\frac{0.9}{a}\left(1+\frac{0.92\tau}{1-\tau}\right)$	$\frac{3.3-3\tau}{1+1.2\tau}L$	0
PD	$\frac{1.24}{a}\left(1+\frac{0.13\tau}{1-\tau}\right)$	∞	$\frac{0.27-0.36\tau}{1-0.87\tau}L$
PID	$\frac{1.35}{a}\left(1+\frac{0.18\tau}{1-\tau}\right)$	$\frac{2.5-2\tau}{1-0.39\tau}L$	$\frac{0.37-0.37\tau}{1-0.81\tau}L$

2.9 ระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับ

สำหรับระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับ (State feedback control) นั้นจะทำงานได้ดีสำหรับปัญหาระบบควบคุมแบบคงค่า (regulator problem) แต่สำหรับปัญหาระบบควบคุมที่เป็นแบบปรับค่าตาม (tracking/servo problem) จะไม่สามารถทำงานได้ในบางระบบเท่านั้น เพราะเนื่องจากยังคงมีค่าความผิดพลาดของสถานะคงตัว (steady-state error) เหลืออยู่ จึงทำให้ผลตอบสนองของระบบยังคงมีความคลาดเคลื่อน ดังนั้นในการแก้ปัญหาดังกล่าว จำเป็นต้องเพิ่มอุปกรณ์ที่มีความสามารถกำจัดค่าความผิดพลาดของสถานะคงตัวนั้นทิ้งไปเช่น เกนขยายป้อนก้าวหน้า (feed-forward gain) หรือ ตัวกระทำแบบอินทิกรัล (Integral action)

2.9.1 เกนขยายป้อนก้าวหน้า

จากระบบพลศาสตร์ทั่วไปเขียนเป็นสมการสเตทสเปซได้ว่า

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}u(t) \qquad (2.27)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad (2.28)$$

ให้ $r(t)$ เป็นสัญญาณอ้างอิงเป็นฟังก์ชันแบบขั้น (step function) กระทำที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) และ ณ สภาวะคงตัวสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty)+\mathbf{B}u(\infty) \qquad (2.29)$$

$$y(\infty) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\infty) \qquad (2.30)$$

และจากตำแหน่งสภาวะคงตัวพบว่า $\dot{\mathbf{x}}(\infty)=0$ และ $y(\infty)=r$ จากนั้นกำหนดให้ $\mathbf{x}(\infty)=\mathbf{N}_x r$ และ $u(\infty)=N_u r$ แทนค่าข้างต้นลงในสมการที่ (2.29) และ (2.30) ได้ว่า

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{N}_x r+\mathbf{B}N_u r \qquad (2.31)$$

$$r = \mathbf{C}\mathbf{N}_x r \qquad (2.32)$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ เมื่อสัญญาณอ้างอิงเป็นฟังก์ชันแบบขั้น (step function) ($r=1$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.33)$$

และ ณ สภาวะคงตัว กฎการควบคุมคือ

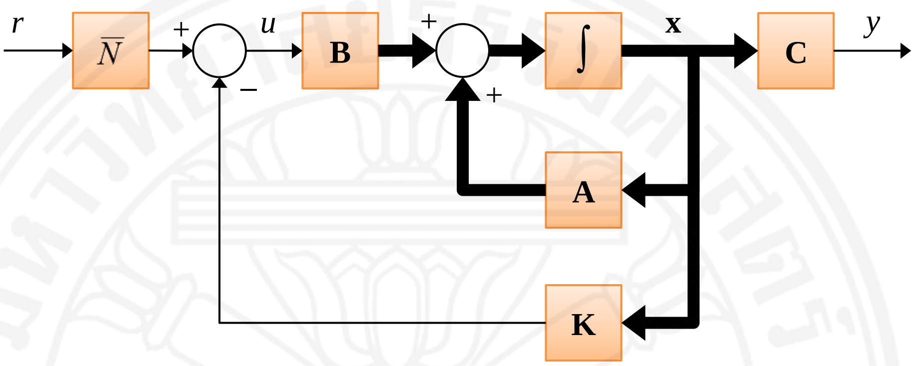
$$u(t)-u(\infty) = -\mathbf{K}[\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(\infty)] \qquad (2.34)$$

แทนค่าจากสมการข้างต้นได้ว่า

$$u(t) = -\mathbf{K}[\mathbf{x}(t)+\mathbf{N}_x r]-N_u r$$

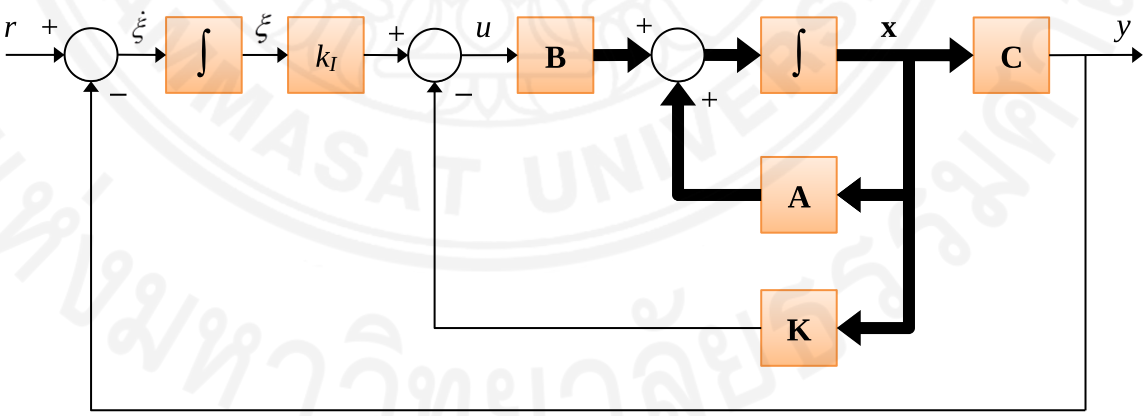
หรือ
$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)+\bar{N}r \tag{2.35}$$

โดยที่
$$\bar{N} = \mathbf{N}_x\mathbf{K}+N_u \tag{2.36}$$



ภาพที่ 2.7 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับ
และเกนขยายป้อนก้าวหน้า

2.9.2 ตัวกระทำแบบอินทิกรัล



ภาพที่ 2.8 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับ
และตัวกระทำแบบอินทิกรัล

จากภาพที่ 2.8 สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u \tag{2.37}$$

$$y = \mathbf{Cx} \tag{2.38}$$

$$u = -\mathbf{Kx} + k_I \xi \tag{2.39}$$

$$\dot{\xi} = r - \mathbf{Cx} \tag{2.40}$$

โดยที่ $\mathbf{x}$ เป็น เวกเตอร์สถานะของระบบ (n-เวกเตอร์)

u เป็น สัญญาณควบคุม (ปริมาณสเกลาร์)

y เป็น สัญญาณเอาท์พุท (ปริมาณสเกลาร์)

ξ เป็น สัญญาณเอาท์พุทของตัวอินทิเกรเตอร์ (ปริมาณสเกลาร์)

r เป็น สัญญาณอินพุทอ้างอิง (ปริมาณสเกลาร์)

$\mathbf{A}$ เป็น เมตริกซ์ค่าคงที่ ($n \times n$)

$\mathbf{B}$ เป็น เมตริกซ์ค่าคงที่ ($n \times 1$)

$\mathbf{C}$ เป็น เมตริกซ์ค่าคงที่ ($1 \times n$)

สมมติให้สมการที่ (2.37) เป็นระบบที่เป็นสภาพควบคุมได้ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบคือ

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{2.41}$$

จากนั้นสมมติว่าสัญญาณอ้างอิงเป็นฟังก์ชันแบบขั้น (step function) กระทำที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$) ดังนั้นเมื่อเวลา $t > 0$ สมการของระบบสามารถเขียนใหม่โดยทำการรวมสมการที่ (2.37) และ (2.40) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \tag{2.42}$$

ในการออกแบบระบบควบคุมจะต้องทำให้มีเสถียรภาพหรือทำให้เส้นทางของ $\mathbf{x}(\infty)$, $\xi(\infty)$ และ $u(\infty)$ ลู่เข้าค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง จากนั้น ณ สภาวะคงตัว $\dot{\xi}(t) = 0$ จึงทำให้ $y(\infty) = r$ เพราะฉะนั้น ณ สภาวะคงตัวสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \tag{2.43}$$

และจากที่กล่าวมาข้างต้น สัญญาณอ้างอิงเป็นฟังก์ชันแบบขั้น ดังนั้น $r(\infty) = r(t) = r$ (ค่าคงที่) เมื่อเวลา $t > 0$ จากนั้นนำสมการที่ (2.42) มาลบกับสมการที่ (2.43) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \left[u(t) - u(\infty) \right] \tag{2.44}$$

กำหนดให้

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$

$$\xi(t)-\xi(\infty) = \xi_e(t)$$
$$u(t)-u(\infty) = u_e(t)$$

ดังนั้นสมการที่ (2.44) สามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \tag{2.45}$$

โดยที่

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I \xi_e(t) \tag{2.46}$$

จากนั้นกำหนดให้ $\mathbf{e}(t)$ เป็นเวกเตอร์ของค่าคลาดเคลื่อน (error vector, $n \times 1$ เวกเตอร์) คือ

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.45) สามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \tag{2.48}$$

โดยที่

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

และจากสมการที่ (2.48) พบว่า

$$u_e(t) = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e} \tag{2.49}$$

โดยที่

$$\hat{\mathbf{K}} = \left[\mathbf{K} \;\vdots\; -k_I\right]$$

ซึ่งค่าเกน $\hat{\mathbf{K}}$ สามารถหาโดยวิธีวางขั้ว (pole placement) หรือ วิธีแบบกำลังสองเชิงเส้น (LQR)

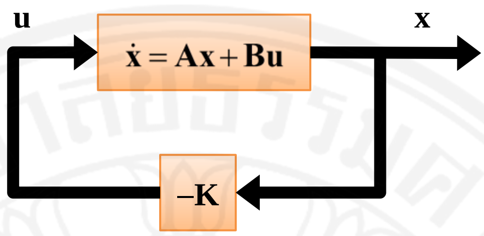
2.10 ระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น

ระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น หรือ LQR-Linear Quadratic Regulator เป็นระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับ (State feedback control) และเป็นหนึ่งในหลายวิธีของระบบควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด (optimal control)

อัลกอลิทึมของวิธีการแบบกำลังสองเชิงเส้นเป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการค่าเกนของสถานะป้อนกลับ (state-feedback gain) ซึ่งคล้ายคลึงกับวิธีวางขั้ว (pole placement) แต่จะให้พลังงานที่

จ่ายออกไปมีค่าน้อยที่สุด โดยพิจารณาจากระบบที่มีสมการสเตท ดังสมการที่ (2.50) ซึ่งเป็นระบบที่มีสภาพควบคุมได้

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{2.50}$$



ภาพที่ 2.9 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น

มีสภาวะเริ่มต้นคือ $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ และกฎการควบคุมเป็น

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kx} \tag{2.51}$$

ดังนั้นค่าน้อยที่สุดของพลังงานที่จ่ายออกไปคือ

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} + \mathbf{u}^T\mathbf{Ru})dt \tag{2.52}$$

โดยที่ $\mathbf{Q}$ เป็น เมตริกซ์สมมาตรและมีค่าเป็นบวก (positive-definite matrix)

$\mathbf{R}$ เป็น เมตริกซ์สมมาตรและมีค่าเป็นบวก (positive-definite matrix)

จากสมการที่ (2.52) อาจกล่าวได้ว่า $\mathbf{Q}$ เป็น ตัวประกอบถ่วงสำหรับตัวแปรสเตท และ $\mathbf{R}$ เป็น ตัวประกอบถ่วงสำหรับสัญญาณควบคุม

จากนั้นทำการแก้ปัญหาของระบบด้วยวิธีแบบเหมาะสมที่สุด โดยการนำสมการที่ (2.51) ลงในสมการที่ (2.50) จะได้

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx}$$

หรือ

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \tag{2.53}$$

จากสมการข้างต้น ให้สมมติว่าเมตริกซ์ $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ ทำให้ระบบเสถียร หรือ eigenvalue มีค่าเป็นลบและอยู่บนแกนจริง จากนั้นทำการแทนค่าสมการที่ (2.51) ลงในสมการที่ (2.52) ได้ว่า

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} + \mathbf{x}^T\mathbf{K}^T\mathbf{RKx})dt$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}dt \qquad (2.54)$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} &= -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}) \\ &= -\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \qquad (2.55) \end{aligned}$$

โดยที่ $\mathbf{P}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรและมีค่าเป็นบวก

จากนั้นนำสมการที่ (2.49) แทนในสมการที่ (2.55)ได้ว่า

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}-\mathbf{x}^{T}\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left[(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\right]\mathbf{x}$$

และสมการข้างต้นจะเป็นจริงได้สำหรับ $\mathbf{x}$ ใดๆ ต่อเมื่อ

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K}) \qquad (2.56)$$

เพราะฉะนั้นสมการข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})$ ทำให้ระบบเสถียร ก็จะสามารถหาค่าเมตริกซ์ $\mathbf{P}$ ได้

ในการหาคำตอบของปัญหาแบบกำลังสองเชิงเส้นเหมาะสมที่สุดทำได้ดังนี้ จากที่กล่าวไว้ข้างต้นเมตริกซ์ $\mathbf{R}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรและเป็นค่าจริง สามารถเขียนได้ว่า

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}$$

โดยที่ $\mathbf{T}$ เป็น นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้นสมการที่ (2.56) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\mathbf{K})$$

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})+\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\mathbf{K} = 0$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}+\left[\mathbf{T}\mathbf{K}-(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{T}\mathbf{K}-(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right]-\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{Q} = 0$$

ค่าที่น้อยที่สุดของฟังก์ชัน J จะขึ้นอยู่กับค่าเกน $\mathbf{K}$ ที่ได้ ดังนั้นจากสมการข้างต้น ค่าที่น้อยที่สุดของค่าเกน $\mathbf{K}$ คือ

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{T}\mathbf{K}-(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{T}\mathbf{K}-(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right]\mathbf{x}$$

และจากเทอมข้างต้นนั้นจะมีค่าเป็นบวก ดังนั้นค่าน้อยที่สุดที่เกิดขึ้นคือศูนย์ หรือเมื่อ

$$\mathbf{T}\mathbf{K} = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$$

หรือ

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \qquad (2.57)$$

เพราะฉะนั้นค่าเกนของสถานะป้อนกลับแบบเหมาะสมที่สุดจะหาค่าได้จากสมการที่ (2.57) ดังนั้นกฎการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นคือ

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \qquad (2.58)$$

โดยที่เมตริกซ์ $\mathbf{P}$ สามารถหาได้จาก

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}-\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{Q} = 0 \qquad (2.59)$$

ซึ่งสมการข้างต้นเรียกว่า Algebraic Riccati Equation (ARE)

จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบนั้นเป็นผลที่เกิดจากค่าเกน $\mathbf{K}$ และค่าเกน $\mathbf{K}$ คำนวณมาจากค่า $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ ดังนั้นผลตอบสนองของระบบเป็นผลโดยตรงจากค่าของ $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ เพราะฉะนั้นต้องทำการปรับเปลี่ยนค่า $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ แบบลองผิดลองถูก เพื่อให้ผลตอบสนองเป็นไปตามที่กำหนดไว้

2.11 ระบบควบคุมแบบ H_∞

ในปัจจุบันระบบควบคุมที่ได้รับความนิยมสำหรับปัญหาระบบควบคุมแบบเหมาะสมที่สุดและแบบทนทาน (Robust Control) หนึ่งในนั้นคือ ระบบควบคุมแบบ H_∞ ซึ่งได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง โดยระบบควบคุมนี้จะพิจารณาทั้งความมีเสถียรภาพและประสิทธิภาพของระบบควบคู่กัน

2.11.1 ตัวถ่วงความอ่อนไหว (Weighted sensitivity)

ฟังก์ชันความอ่อนไหว (S) เป็นตัวบ่งชี้ที่ดีสำหรับประสิทธิภาพของระบบแบบปิด ไม่ว่าจะเป็นที่เป็นระบบแบบ SISO และ MIMO ข้อได้เปรียบสำคัญของการพิจารณาฟังก์ชันความอ่อนไหวคือการทำให้ S มีค่าน้อย และข้อกำหนดทั่วไปในการพิจารณาฟังก์ชันความอ่อนไหว (S) ประกอบด้วย

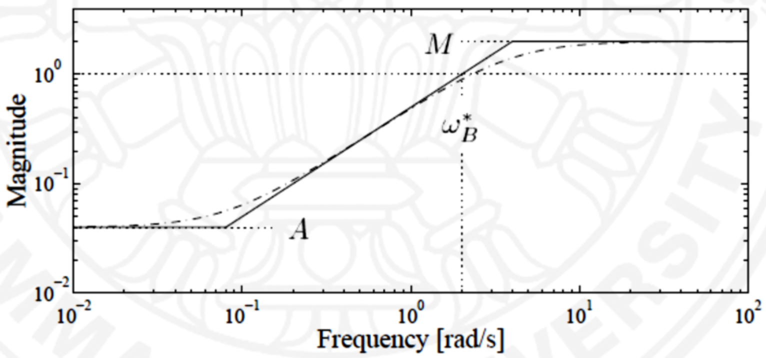
1. ค่าแบนด์วิดท์ความถี่น้อยที่สุด (ω_B^*) คือค่าความถี่ที่ $|S(j\omega)|$ ตัดกับค่า 0.707 ที่มีจากด้านล่าง
2. ค่าความผิดพลาดมากที่สุดแบบปรับค่า (tracking error) ณ ความถี่ที่ได้เลือกไว้
3. ค่าความผิดพลาดมากที่สุดแบบปรับค่า ณ สภาวะคงตัว (steady-state tracking error), A
4. รูปแบบของฟังก์ชันความอ่อนไหว (S) ณ ความถี่ที่ได้เลือกไว้
5. ค่าขนาดสูงสุดซึ่งมากที่สุดของฟังก์ชันความอ่อนไหว (S) หรือ $\|S(j\omega)\|_\infty \le M$

ในทางคณิตศาสตร์ ข้อจำกัดเหล่านี้อาจแสดงในรูปแบบของขอบเขตด้านบนที่อยู่บนค่า S ซึ่ง $w_P(s)$ เป็นตัวถ่วงที่เลือกโดยผู้ออกแบบ และสัญลักษณ์ P ที่เป็นตัวห้อยแสดงถึงประสิทธิภาพ แต่เนื่องจากที่ได้กล่าวมา S เป็นตัวบ่งชี้ถึงประสิทธิภาพ ดังนั้นค่าประสิทธิภาพที่ต้องการสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &|S(j\omega)| < 1/|w_P(j\omega)|, \quad \forall\omega \\ \Leftrightarrow \quad &|w_P S| < 1, \quad \forall\omega \\ \Leftrightarrow \quad &\|w_P S\|_\infty < 1 \end{aligned}$$

ค่าประสิทธิภาพที่ต้องการที่แสดงในสมการสุดท้ายอาจเรียกว่า ค่านอร์ม H_∞ ของตัวถ่วงความอ่อนไหว ($w_P S$) จะต้องมีค่าน้อยกว่าหนึ่งเสมอ

2.11.2 การเลือกค่าตัวถ่วง



ภาพที่ 2.10 ตัวถ่วงประสิทธิภาพแบบผกผัน

ภาพวาดของขอบเขตด้านบน ได้แสดงในภาพที่ 2.10 หรือเขียนเป็นสมการที่ได้ดังนี้

$$w_P(s) = \frac{s/M + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A} \qquad (2.60)$$

และจากภาพจะเห็นได้ว่า $1/w_P$ ที่ด้านความถี่ต่ำค่าของ $A \le 1$ ที่ด้านความถี่สูงค่าของ $M \ge 1$ และเส้นกราฟตัดกับ 1 ที่ความถี่เท่ากับ ω_B^* ซึ่งเป็นค่าประมาณของแบนด์วิดท์ที่ต้องการ และบางกรณีต้องการเพิ่มความชันให้กับตัวถ่วงประสิทธิภาพ โดยการเปลี่ยนอันดับของเลขชี้กำลังของสมการที่ (2.60) หรือสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$w_P(s) = \frac{\left(s/M^{1/n} + \omega_B^*\right)^n}{\left(s + \omega_B^* A^{1/n}\right)^n} \qquad (2.61)$$

โดยที่ n เป็นค่าของความชัน

2.11.3 ความต้องการแบบผสมผสาน (Stacked requirements: Mixed sensitivity)

ข้อจำกัดที่ว่า $1/w_P$ จะทำให้ S มีขอบเขตอยู่ด้านล่าง ณ แบนด์วิดท์นั้น แต่ไม่อาจทำให้อยู่ด้านบนสำหรับข้อจำกัดอื่นๆ ที่เพิ่มเข้าในการออกแบบระบบควบคุม เช่น ในการจำกัดขนาดของสัญญาณด้านอินพุท ทำได้โดยเพิ่มตัวถ่วง ให้อยู่ด้านบนของ KS ดังนั้นในการผสมข้อจำกัด (บางครั้งเรียกว่า S/KS) ที่ได้กล่าวมาทำได้โดย

$$\|N\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}\left(N(j\omega)\right) < 1 \qquad (2.62)$$

โดยที่

$$N = \begin{bmatrix} w_P S \\ w_u KS \end{bmatrix}$$

หลังจากหาค่า N แล้ว จึงสามารถคำนวณหาค่าระบบควบคุมแบบ H_∞ ที่จะทำให้ N มีค่าน้อยที่สุด หรือเขียนได้ว่า $\min_K \|N(K)\|_\infty$ โดยที่ K คือตัวควบคุมแบบ H_∞

2.11.4 รูปแบบทั่วไปของระบบ (Generalized plant)

ในการออกแบบระบบควบคุม H_∞ จำเป็นเปลี่ยนรูปแบบของระบบให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปดังภาพที่ 2.11 และจากภาพที่ 2.12ก สามารถเขียนสมการของสัญญาณเข้า-ออกของระบบทั่วไป P ได้ดังนี้

$$w = \begin{bmatrix} d \\ r \\ n \end{bmatrix} \qquad (2.63)$$

$$z = y - r = Gu + d - r \qquad (2.64)$$

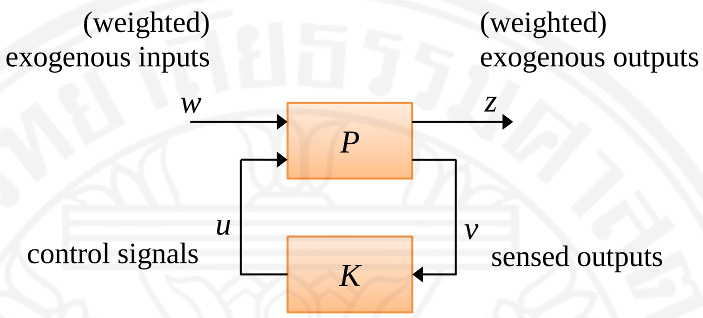
$$v = r - y_m = r - Gu - d - n \qquad (2.65)$$

และสามารถเขียนระบบทั่วไป P ให้อยู่เมตริกซ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนจาก $[w \quad u]^T$ ถึง $[z \quad v]^T$ ได้ว่า

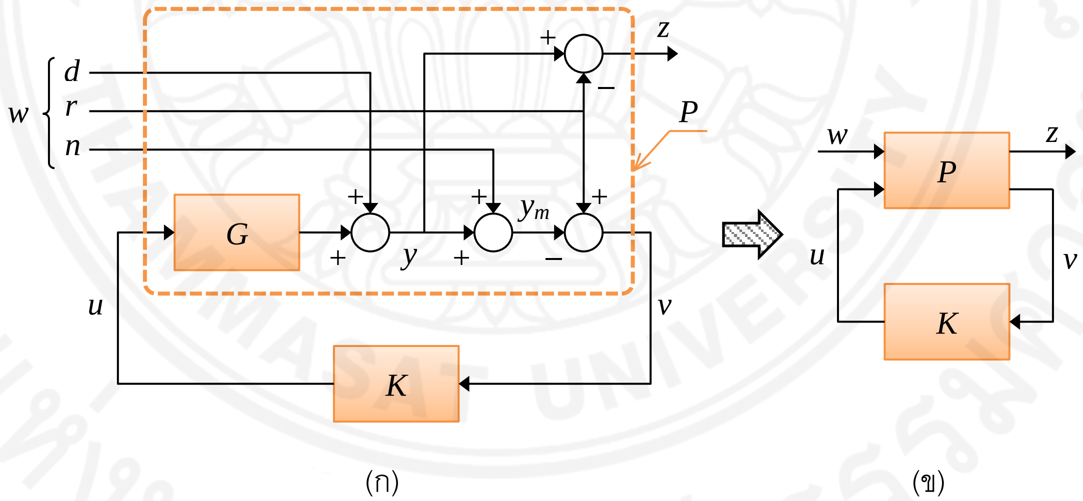
$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \qquad (2.66)$$

โดยที่

$$P = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & G \\ -I & I & -I & -G \end{bmatrix}$$



ภาพที่ 2.11 รูปแบบทั่วไปของระบบ P



ภาพที่ 2.12 รูปแบบทั่วไปของระบบควบคุม

สำหรับปัญหาแบบ S/KS หรือจากสมการที่ (2.63) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปบล็อกไดอะแกรมดังภาพที่ 2.13 โดยที่

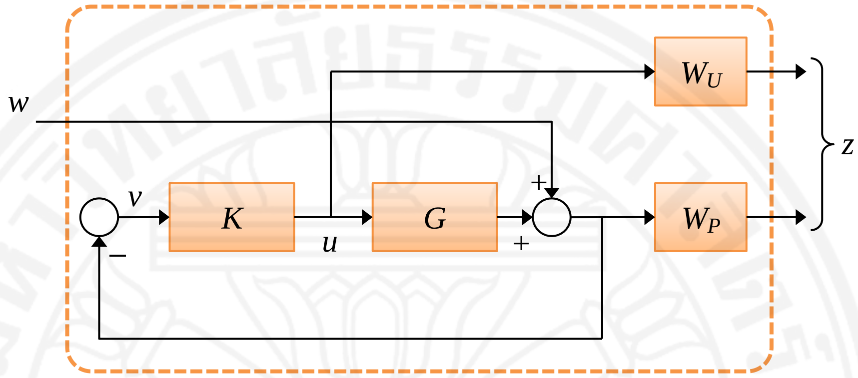
$$z_1 = uW_U \tag{2.67}$$

$$z_2 = W_P Gu + W_P w \tag{2.68}$$

$$v = -w - Gu \tag{2.69}$$

ดังนั้นระบบทั่วไป P จาก $[w \quad u]^T$ ถึง $[z \quad v]^T$ คือ

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W_U I \\ W_P I & W_P G \\ -I & -G \end{bmatrix} \qquad (2.70)$$



ภาพที่ 2.13 บล็อกไดอะแกรมของระบบ $z = Nw$

2.11.5 การแบ่งส่วนของระบบทั่วไป

ในปกติสามารถแบ่งส่วนของระบบทั่วไป P ได้ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \qquad (2.71)$$

โดยที่ในแต่ละส่วนสามารถเทียบเคียงได้กับสัญญาณ z, w, u และ v จากภาพที่ 2.12ก ดังนี้

$$z = P_{11}w + P_{12}u \qquad (2.72)$$

$$v = P_{21}w + P_{22}u \qquad (2.73)$$

หรือเมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (2.70) สามารถแบ่งได้ดังนี้

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_P I \end{bmatrix}; \qquad P_{12} = \begin{bmatrix} W_U I \\ W_P G \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = -I; \qquad P_{22} = -G$$

2.11.6 การหาเมตริกซ์ N จากการวิเคราะห์ระบบปิด

จากภาพที่ 2.13 พบว่าตัวควบคุม K อยู่ด้านนอกระบบ ทั้งนี้เพื่อใช้ในการคำนวณหาสมการระบบควบคุม อย่างไรก็ตามในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของระบบปิดที่เป็นไปตาม

ระบบควบคุมที่ได้คำนวณมานั้น ทำได้โดยนำตัวควบคุม K มาต่อเข้ากับระบบเพื่อให้ได้ N ในภาพที่ 2.13 โดยที่ $z = Nw$

จากที่ N เป็นฟังก์ชันของ K ดังนั้นการหาค่า N จะต้องทำการแยกระบบให้เป็นส่วนๆ ดังสมการที่ (2.71), (2.72) และ (2.73) ซึ่งต้องนำสมการของระบบควบคุมมาพิจารณาด้วย

$$u = Kv \tag{2.74}$$

จากนั้นทำการจัดรูปสมการใหม่โดยการกำจัดตัวแปร u และ v ดังนั้นสามารถเขียนสมการ N ได้ดังนี้

$$N = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \triangleq F_l(P, K) \tag{2.75}$$

ซึ่ง $F_l(P, K)$ คือ Lower linear fractional transformation (LFT) ของระบบ P โดยที่มีตัวควบคุม K เป็นพารามิเตอร์ และจากภาพที่ 2.12 เห็นได้ว่าตัวควบคุม K เป็นบล็อกที่อยู่ด้านล่างของระบบ P

2.11.7 ตัวควบคุมแบบ H$_\infty$

ในการแปลงปัญหาการออกแบบระบบควบคุมแบบป้อนกลับทั่วไปให้กลายเป็นปัญหาระบบควบคุมแบบ H$_\infty$ นั้นมีด้วยกันหลายวิธี และได้มีการกำหนดปัญหาระบบควบคุมแบบป้อนกลับใดๆ ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานด้วย ซึ่งจากรูปแบบระบบควบคุมทั่วไปแสดงในภาพที่ 2.12ข สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s)\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

$$u = K(s)v \tag{2.77}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปแบบสเตทสเปซดังนี้

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{2.78}$$

โดยที่มีสัญญาณเข้า-ออกประกอบด้วย u เป็นตัวแปรควบคุม v เป็นตัวแปรที่วัดค่าได้ w เป็นสัญญาณภายนอกเช่น สัญญาณรบกวน (w_d) และ สัญญาณคำสั่ง (r) และสัญญาณสุดท้าย z เป็นตัวแปรความผิดพลาดซึ่งจะถูกทำให้มีค่าน้อยที่สุดเพื่อให้เป็นไปตามข้อกำหนดที่ได้เตรียมไว้ ดังนั้นสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบปิดซึ่งพิจารณาจาก w ถึง z โดยเขียนให้อยู่ในรูปของสมการ LFT ดังนี้

$$z = F_l(P, K)w \tag{2.79}$$

โดยที่

$$F_l(P,K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.80)$$

ระบบควบคุมแบบ H_∞ สามารถหาจากการทำให้ค่านอร์มของ $F_l(P,K)$ มีค่าน้อยที่สุดซึ่งจะพิจารณาต่อไป

วิธีการหรืออัลกอริทึมสำหรับการแก้ปัญหาระบบควบคุม H_∞ ที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางคือ การแก้ปัญหาด้วยวิธีสเตทสเปซ[2] ในการแก้ปัญหาดังกล่าวจะต้องอยู่ภายใต้ข้อกำหนดดังนี้

(A1) (A, B_2, C_2) จะต้องมีความสามารถทางเสถียรภาพและตรวจพบได้

(A2) D_{12} และ D_{22} จะต้องเป็น Full rank

(A3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ จะต้องเป็น full column rank ในทุกๆ ω

(A4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ จะต้องเป็น full row rank ในทุกๆ ω

(A5) D_{11} = 0 และ D_{12} = 0

(A6) $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ และ $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$

(A7) $D_{12}^{\mathrm{T}}C_1 = 0$ และ $B_1D_{21}^{\mathrm{T}} = 0$

(A8) (A, B_1) จะต้องมีความสามารถทางเสถียรภาพและ (A, C_1) จะต้องมีความสามารถในการตรวจพบได้

โดยปกติอาจจะกล่าวได้ว่าอัลกอริทึมของระบบควบคุม H_∞ คือการหาตัวควบคุมย่อย (sub-optimal controller) นั่นคือถ้ากำหนดให้ γ เป็นค่าคงที่ ตัวควบคุมที่จะทำให้ระบบมีเสถียรภาพหาได้จาก $\|F_l(P,K)\|_\infty < \gamma$ และถ้าต้องการหาตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดจะต้องทำการคำนวณซ้ำไปซ้ำมาด้วยอัลกอริทึมข้างต้น

2.11.8 ตัวควบคุม H∞ แบบเหมาะสมที่สุด

จากรูปแบบระบบควบคุมทั่วไปแสดงในภาพที่ 2.12ข มาตรฐานสำหรับปัญหาระบบควบคุม H_∞ แบบเหมาะสมที่สุดคือการหาตัวควบคุมเสถียรภาพ (K) ทั้งหมดด้วยการหาค่าน้อยที่สุดของ

$$\|F_l(P,K)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}\left(F_l(P,K)(j\omega)\right) \quad (2.81)$$

ค่านอร์มของ H_∞ ได้มีการอธิบายอย่างมากมายในเชิงของประสิทธิภาพ หนึ่งในนั้นคือการทำให้ค่าสูงสุดของค่าเอกพจน์สูงสุดของ $F_l(P(j\omega),K(j\omega))$ มีค่าน้อยที่สุด โดยสมมติให้ $\gamma_{\min}$ เป็นค่าที่น้อยที่สุดของ H_∞ สำหรับตัวควบคุมเสถียรภาพ (K) ทั้งหมด ดังนั้นปัญหาระบบควบคุมย่อย

แบบเหมาะสมที่สุดของ H_∞ คือ การกำหนดให้ $\gamma > \gamma_{\min}$ แล้วทำการหาค่าตัวควบคุมเสถียรภาพ (K) ทั้งหมดที่ทำให้

$$\|F_l(P,K)\|_\infty < \gamma \tag{2.82}$$

ซึ่งสามารถแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพด้วยการลดค่าของ γ ซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ผลลัพธ์ที่เหมาะสม อัลกอริทึมดังกล่าวได้ทำการรวบรวมด้วยสมมติฐานอย่างง่ายดังนี้

2.11.9 อัลกอลิทึมทั่วไปของ H_∞

จากรูปแบบระบบควบคุมทั่วไปแสดงในภาพที่ 2.12ข ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้แก่สมการที่ (2.76) จนถึง (2.78) และเป็นไปตามสมมติฐาน (A1) จนถึง (A8) จะสามารถหาค่าตัวควบคุมเสถียรภาพ $K(s)$ ที่ทำให้ $\|F_l(P,K)\|_\infty < \gamma$ ก็ต่อเมื่อ

- $X_\infty \geq 0$ ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จาก Algebraic Riccati Equation

  $$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0 \tag{2.83}$$

  ที่ทำให้ $\operatorname{Re} \lambda_i \left[A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty\right] < 0, \ \forall i$ และ

- $Y_\infty \geq 0$ ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จาก Algebraic Riccati Equation

  $$AY_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0 \tag{2.84}$$

  ที่ทำให้ $\operatorname{Re} \lambda_i \left[A + Y_\infty(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)\right] < 0, \ \forall i$ และ

- $\rho\left(X_\infty Y_\infty\right) < \gamma^2$

  ดังนั้นตัวควบคุมเสถียรภาพจะกำหนดโดย $K = F_l(K_c, Q)$ ซึ่ง

$$K_c(s) \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array}\right] \tag{2.85}$$

โดยที่

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty \tag{2.86}$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_2^T \tag{2.87}$$

$$Z_\infty = \left(I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty\right)^{-1} \tag{2.88}$$

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \tag{2.89}$$

และ $Q(s)$ เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนใดๆ ที่มีเสถียรภาพอย่างเหมาะสม (stable proper transfer function) ที่ทำให้ $\|Q\|_\infty < \gamma$ โดยถ้า $Q(s)$ = 0 จะได้ว่า

$$K(s) = K_{c_{11}}(s) = -Z_{\infty}L_{\infty}(sI - A_{\infty})^{-1}F_{\infty} \quad (2.90)$$

อาจเรียกได้ว่าตัวควบคุมศูนย์กลาง (central controller) ซึ่งมีจำนวนตัวแปรสถานะเท่ากันกับระบบทั่วไป และสามารถแยกเป็นตัวประมาณสถานะ (state estimator) ดังสมการที่ (2.91) และตัวป้อนกลับสถานะ (state feedback) ดังสมการที่ (2.92)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\gamma^{-2}B_1^T X_{\infty}\hat{x} + B_2u + Z_{\infty}L_{\infty}(C_2\hat{x} - y) \quad (2.91)$$

$$u = F_{\infty}\hat{x} \quad (2.92)$$

2.11.10 การหาค่า γ โดยวิธีวนซ้ำ (γ-iteration)

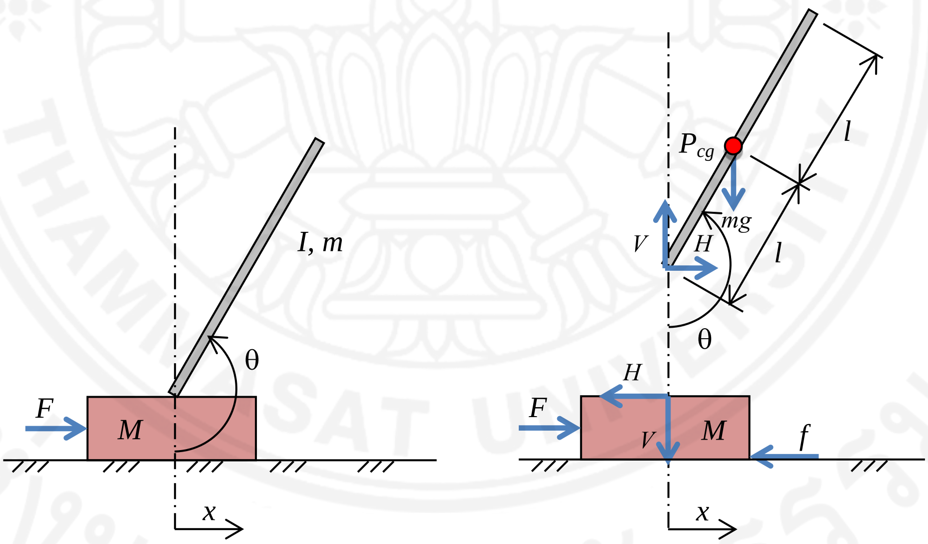
ถ้าจะคาดหวังให้ตัวควบคุมสามารถทำงานได้ ณ ค่า $\gamma_{\min}$ ซึ่งอยู่ในค่าความเคลื่อนที่กำหนดไว้นั้น จะต้องทำการหาค่า γ ด้วยวิธีแบ่งสองช่วง (bisection method) จนกว่าจะได้ค่าที่มีความแม่นยำที่เหมาะสม ซึ่งจะต้องทำการทดสอบในแต่ละค่าที่หาได้นั้นมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า $\gamma_{\min}$ ที่กำหนดไว้ข้างต้น และในทางปฏิบัติสามารถใช้ซอฟท์แวร์หรือชุดคำสั่งที่มีขายในท้องตลาดได้ เช่น ชุดคำสั่งของโปรแกรม MATLAB เป็นต้น

บทที่ 3
ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ

ในบทนี้กล่าวถึงการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถที่เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งได้นำเสนอทั้งแบบฟังก์ชันถ่ายโอน และแบบสมการสเตทสเปซ

การออกแบบระบบควบคุมทางทฤษฎีสำหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ ด้วยวิธีต่างๆ ได้แก่ ระบบควบคุมแบบพีไอดี ระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับโดยใช้วิธีกำลังสองเชิงเส้น โดยการออกแบบระบบควบคุมดังกล่าวนี้อาศัยข้อกำหนดในการออกแบบด้านล่างนี้ และผลตอบสนองของระบบเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม MATLAB

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์



ภาพที่ 3.1 แผนภาพวัตถุอิสระของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่

กำหนดให้

มวลของตัวรถ (M)	=	0.5	kg
มวลของก้านเพนดูลัม (m)	=	0.2	kg
ความยาวของก้านเพนดูลัม ($2l$)	=	0.6	m
สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของตัวรถ (b)	=	0.1	N/m.s
โมเมนต์ของความเฉื่อยของก้านเพนดูลัม (I)	=	0.006	$kg.m^4$

จากภาพที่ 3.1 เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของก้านเพนดูลัม (P_{cg}) ได้ว่า

$$x_{cg} = x + l\sin\theta$$
$$\dot{x}_{cg} = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\ddot{x}_{cg} = \ddot{x} - l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta \qquad (3.1)$$

และ

$$y_{cg} = -l\cos\theta$$
$$\dot{y}_{cg} = l\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\ddot{y}_{cg} = l\dot{\theta}^2\cos\theta + l\ddot{\theta}\sin\theta \qquad (3.2)$$

จากนั้นพิจารณาผลรวมของแรงที่กระทำต่อตัวรถตามแนวแกนนอนโดยให้การเคลื่อนที่ไปทางขวามีค่าเป็นบวก

$$\sum F = Ma$$
$$M\ddot{x} = F - f - H$$
$$M\ddot{x} + b\dot{x} + H = F \qquad (3.3)$$

เมื่อพิจารณาผลรวมของแรงที่กระทำต่อก้านเพนดูลัมตามแนวแกนนอนได้ดังนี้

$$\sum F = ma$$
$$m\ddot{x}_{cg} = H$$
$$m\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + ml\ddot{\theta}\cos\theta = H \qquad (3.4)$$

และสำหรับผลรวมของแรงตามแนวแกนตั้งได้ว่า

$$\sum F = ma$$
$$m\ddot{y}_{cg} = V - mg$$
$$ml\dot{\theta}^2\cos\theta + ml\ddot{\theta}\sin\theta + mg = V \qquad (3.5)$$

ต่อมาพิจารณาผลรวมของโมเมนต์ที่ตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของก้านเพนดูลัมโดยให้ทิศของการหมุนตามเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก

$$\sum M = I\ddot{\theta}$$
$$I\ddot{\theta} = -Vl\sin\theta - Hl\cos\theta \qquad (3.6)$$

จากนั้นนำสมการที่ (3.4), (3.5) มาแทนลงในสมการที่ (3.6) และนำสมการที่ (3.4) แทนลงในสมการที่ (3.3) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ 2 สมการดังนี้

$$(I+ml^2)\ddot{\theta}+ml\ddot{x}\cos\theta+mgl\sin\theta \;=\; 0 \qquad (3.7)$$

$$\left(M+m\right)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta \;=\; F \qquad (3.8)$$

3.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของระบบสมการที่ไม่เชิงเส้น

สมการการเคลื่อนที่ของชุดทดลองที่ได้กล่าวข้างต้นนั้นยังคงเป็นระบบสมการที่ไม่เชิงเส้น ดังนั้นจะต้องทำการแปลงระบบสมการให้เป็นเชิงเส้น โดยสมมติว่า ณ ตำแหน่งของก้านเพนดูลัมอยู่ในแนวตั้งตรง ($\theta=\pi$) มีการเคลื่อนที่เชิงมุมน้อยมาก ดังนั้นถ้ากำหนดให้ φ แทนการกระจัดเชิงมุมของก้านเพนดูลัมจากตำแหน่งตั้งตรง ($\varphi \;=\; \theta-\pi$) การประมาณค่าเชิงเส้นของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ได้ดังนี้ ซึ่งสมการที่ใช้ในการประมาณค่าเชิงเส้นคือ

$$y \;=\; f(\bar{x})+(x-\bar{x})\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \qquad (3.9)$$

และจากสมการที่ 3.9 แทนค่า $\bar{x}=\pi$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\pi)+(\theta-\pi)(-\sin(\pi)) &&\approx -1\\ \sin(\theta) &= \sin(\pi)+(\theta-\pi)\cos(\pi) &&\approx -\varphi\\ \dot{\theta}^2 &= \dot{\varphi}^2 &&\approx 0\end{aligned}$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของชุดทดลองที่เป็นระบบสมการเชิงเส้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$(I+ml^2)\ddot{\varphi}-mgl\varphi-ml\ddot{x} \;=\; 0 \qquad (3.10)$$

$$\left(M+m\right)\ddot{x}+b\dot{x}-ml\ddot{\varphi} \;=\; F \qquad (3.11)$$

3.3 ฟังก์ชันถ่ายโอน

จากสมการที่ (3.10) และ (3.11) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของชุดทดลองที่เป็นระบบเชิงเส้น ให้ทำการแปลงลาปาซสมการดังกล่าว โดยที่สมมติให้สภาวะเริ่มต้นมีค่าเท่ากับศูนย์

$$(I+ml^2)\Phi s^2-mgl\Phi-mlXs^2 \;=\; 0 \qquad (3.12)$$

$$(M+m)Xs^2+bXs-ml\Phi s^2 \;=\; F(s) \qquad (3.13)$$

และจากสมการที่ (3.13) ได้ว่า

$$\Phi \;=\; \frac{-1}{mls^2}F+\frac{(M+m)}{ml}X+\frac{b}{mls}X \qquad (3.14)$$

แทนค่าสมการที่ (3.14) ลงในสมการที่ (3.12)

จาก $\qquad mlXs^2 \;=\; (I+ml^2)\Phi s^2-mgl\Phi$

$$0 = \left[(I+ml^2)s^2 - mgl\right]\left[\frac{-1}{mls^2}F + \frac{(M+m)}{ml}X + \frac{b}{mls}X\right]$$

$$0 = \frac{(I+ml^2)(M+m)s^2}{ml}X - \frac{(I+ml^2)}{ml}F + \frac{b(I+ml^2)s}{ml}X$$
$$-(M+m)gX + \frac{g}{s^2}F - \frac{bg}{s}X$$

$$\frac{(I+ml^2)}{ml}F - \frac{g}{s^2}F = \frac{(I+ml^2)(M+m)s^2}{ml}X + \frac{b(I+ml^2)s}{ml}X - (M+m)gX$$
$$-\frac{bg}{s}X - mls^2X$$

$$\left\{\frac{(I+ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2}\right\}F = \left\{\frac{(I+ml^2)(M+m)s^2}{ml} + \frac{b(I+ml^2)s}{ml} - (M+m)g - \frac{bg}{s} - mls^2\right\}X$$

$$= \left\{\left[\frac{(I+ml^2)(M+m)}{ml} - ml\right]s^2 + \frac{b(I+ml^2)s}{ml} - (M+m)g - \frac{bg}{s}\right\}X$$

$$= \left\{\frac{\left[(I+ml^2)(M+m) - m^2l^2\right]s^3 + b(I+ml^2)s^2 - (M+m)gmls - bmgl}{mls}\right\}X$$

$$= \left\{\frac{\left[(I+ml^2)(M+m) - m^2l^2\right]s^3 + b(I+ml^2)s^2 - (M+m)gmls - bmgl}{mls}\right\}X$$

$$\therefore \quad \frac{X}{F} = \frac{(I+ml^2)s^2 - mgl}{\left[(I+ml^2)(M+m) - m^2l^2\right]s^4 + b(I+ml^2)s^3 - (M+m)gmls^2 - bmgls} \qquad (3.15)$$

และจากสมการที่ (3.12) ได้ว่า

จาก
$$X = \frac{(I+ml^2)}{ml}\Phi - \frac{g}{s^2}\Phi \qquad (3.16)$$

แทนค่าสมการที่ (3.16) ลงในสมการที่ (3.13) ดังนี้

$$\frac{(I+ml^2)(M+m)s^2}{ml}\Phi - (M+m)g\Phi + \frac{b(I+ml^2)s}{ml}\Phi - \frac{bg}{s}\Phi - mls^2\Phi = F$$

$$\left\{\left[\frac{(I+ml^2)(M+m)}{ml} - ml\right]s^2 - (M+m)g + \frac{b(I+ml^2)s}{ml} - \frac{bg}{s}\right\}\Phi = F$$

$$\left\{\frac{\left[(I+ml^2)(M+m) - m^2l^2\right]s^3 + b(I+ml^2)s^2 - (M+m)gmls - bgml}{mls}\right\}\Phi = F$$

$$\therefore \quad \frac{\Phi}{F} = \frac{mls}{\left[(I+ml^2)(M+m)-m^2l^2\right]s^3+b(I+ml^2)s^2-(M+m)gmls-bgml} \quad (3.17)$$

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่สามารถแสดงได้ดังนี้

$$G_{pend}(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^2-\frac{(M+m)mgl}{q}s-\frac{bmgl}{q}} \quad (3.18)$$

$$G_{cart}(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{(I+ml^2)}{q}s^2-\frac{gml}{q}}{s^4+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(M+m)mgl}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s} \quad (3.19)$$

โดยที่ $q=(I+ml^2)(M+m)-m^2l^2$

พิจารณาที่ฟังก์ชันถ่ายโอนของก้านเพนดูลัม เมื่อแทนค่าตัวแปรต่างๆลงในสมการที่ (3.18) และ (3.19) ได้ดังนี้

$$G_{pend}(s) = \frac{4.545s}{s^3+0.1818s^2-31.18s-4.455} \quad (3.20)$$

$$G_{cart}(s) = \frac{1.818s^2-44.5455}{s^4+0.1818s^3-31.18s^2-4.455s} \quad (3.21)$$

3.4 แบบจำลองรูปแบบสเตทสเปซ

จากสมการที่ (3.10) และ (3.11) สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ โดยกำหนดให้ $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$ และ $x_4 = \dot{\theta}$ ซึ่งสามารถเขียนระบบสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-(I+ml^2)b}{q}x_2+\frac{gm^2l^2}{q}x_3+\frac{(I+ml^2)}{q}u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-bml}{q}x_2+\frac{(M+m)gml}{q}x_3+\frac{ml}{q}u$$

จากระบบสมการอนุพันธ์ข้างต้นสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปแบบของ State-Space ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(I+ml^2)b}{q} & \dfrac{gm^2l^2}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-bml}{q} & \dfrac{(M+m)gml}{q} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{(I+ml^2)}{q} \\ 0 \\ \dfrac{ml}{q} \end{Bmatrix} u \qquad (3.22)$$

และ

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u \qquad (3.23)$$

โดยที่ $q = (I+ml^2)(M+m) - m^2l^2$

และเมื่อแทนค่าตัวแปรต่างๆของชุดทดลองลงในระบบสมการข้างต้นได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{Bmatrix} u \qquad (3.24)$$

และ

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u \qquad (3.25)$$

จากที่กล่าวมาในหัวข้อที่ 3.3 และ 3.4 ได้แสดงการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ ซึ่งนำเสนอเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนซึ่งได้แสดงในสมการที่ (3.20) - (3.21) และรูปของสมการสเตทสเปซที่ได้แสดงในสมการที่ (3.24) - (3.25)

โดยที่ค่ารากของสมการระบบชุดทดลองคือ 5.5651, 0, -5.5651, -0.1428 พบว่ามีค่ารากของสมการมีเครื่องหมายบวกอยู่หนึ่งค่า เป็นผลทำให้ระบบของชุดทดลองจะไม่มีเสถียร-ภาพ ณ ตำแหน่งของก้านเพนดูลัมตั้งตรง ดังนั้นจำเป็นต้องเพิ่มระบบควบคุมให้กับชุดทดลองเพื่อสร้างเสถียรภาพ ณ ตำแหน่งดังกล่าว

สำหรับวิธีการควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถจะต้องถูกออกแบบเพื่อสร้างเสถียรภาพให้แก่ระบบชุดทดลองคือ ก้านเพนดูลัมยังสามารถอยู่ในตำแหน่งตั้งตรง

ได้ เมื่อตัวรถมีการเคลื่อนที่จากตำแหน่งที่ 1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 โดยที่ผลตอบสนองของระบบจะต้องเป็นไปตามข้อกำหนดการออกแบบระบบควบคุมซึ่งได้กล่าวไว้ในข้างต้น

3.5 การออกแบบระบบควบคุมแบบพีไอดี

3.5.1 การควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัม

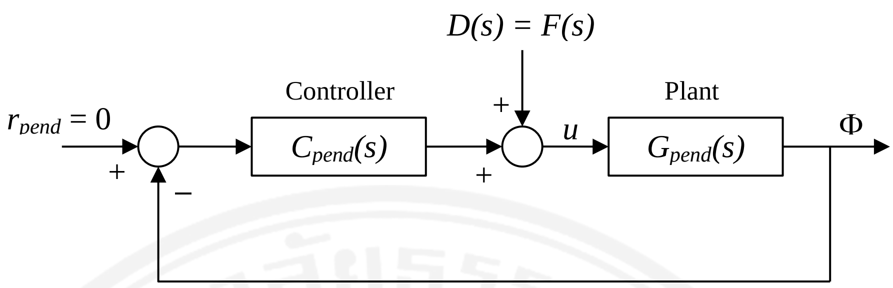
จากภาพที่ 3.2ก ระบบควบคุมตำแหน่งของก้านเพนดูลัมนี้ถูกออกแบบเพื่อรักษาตำแหน่งของก้านเพนดูลัมให้อยู่ในตำแหน่งตั้งตรงเสมอ แม้ว่าจะมีสัญญาณรบกวนภายนอกมากระทำต่อระบบ ดังนั้นระบบควบคุมนี้เป็นปัญหาแบบคงค่า (regulator) และสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนภายนอกได้ด้วย (external disturbance rejection)

เพราะฉะนั้นจากที่กล่าวมาข้างต้น กำหนดให้ set-point ของระบบมีค่าเป็นศูนย์ ($r_{pend} = 0$) และแรงที่กระทำกับตัวรถเป็นสัญญาณรบกวนของระบบซึ่งพิจารณาเป็นฟังก์ชันแบบกระตุ้น (Impulse function) ดังนั้นทำการจัดเรียงบล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมใหม่เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา แสดงในภาพที่ 3.2ข และฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่สำหรับระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบป้อนกลับได้แสดงในสมการที่ 3.26

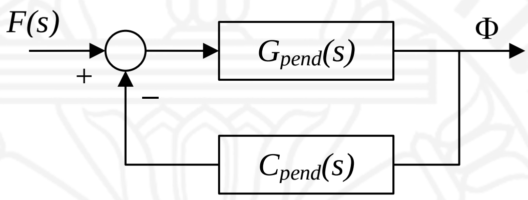
$$\frac{\Phi}{F} = \frac{G_{pend}}{1+G_{pend}C_{pend}} \tag{3.26}$$

ต่อมาเมื่อนำระบบของก้านเพนดูลัมมาวาดลงในแผนภาพทางเดินของราก (Root locus) ได้แสดงในภาพที่ 3.3 จะเห็นว่ามีเส้นทางเดินของรากอยู่ 3 เส้น แต่มีอยู่หนึ่งเส้นที่อยู่ทางด้านขวาของระนาบเอส (s-plane) จากตำแหน่งจุดโพลที่ s = 5.5651 ไปยังจุดซีโรที่จุดกำเนิด (s=0) มีผลทำให้ระบบนั้นไม่มีเสถียรภาพในทุกๆค่าเกน

ดังนั้นในการกำจัดเส้นทางเดินของรากดังกล่าวนั้น โดยการเพิ่มโพลที่จุดกำเนิด (s = 0) เพื่อยกเลิกซีโรที่จุดกำเนิด แล้วทำการวาดแผนภาพทางเดินของรากใหม่ ซึ่งแสดงในภาพที่ 3.4 พบว่าเส้นทางเดินของรากลดลงเหลือ 2 เส้น แต่ทิศทางของทั้งสองเส้นนั้นวิ่งไปทางด้านขวาของระนาบเอสอยู่ ซึ่งมีผลทำให้ระบบยังไม่มีเสถียรภาพ ดังนั้นต้องทำการปรับให้ทิศทางของเส้นรากทั้งสองกลับมายังทางด้านซ้ายของระนาบเอส โดยการเพิ่มซีโรบนแกนจริง 2 จุด ได้แก่ s = -2, -3 ($z_1 = -2, z_2 = -3$) หลังจากที่เพิ่มซีโรแล้วมีผลทำให้เส้นทางเดินกลับเข้ามาด้านซ้ายของระนาบเอส แสดงอยู่ในภาพที่ 3.5



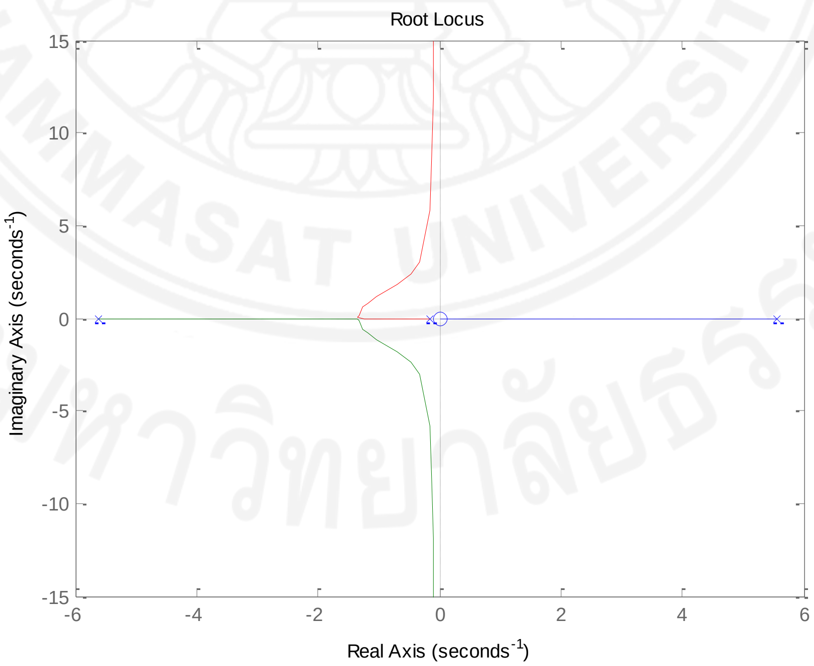
(ก)



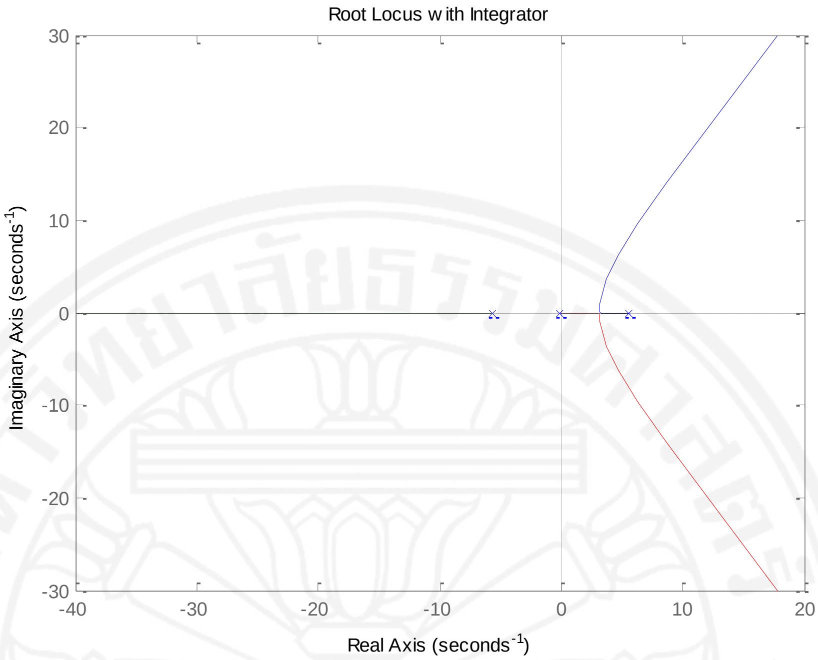
(ข)

ภาพที่ 3.2 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบป้อนกลับ

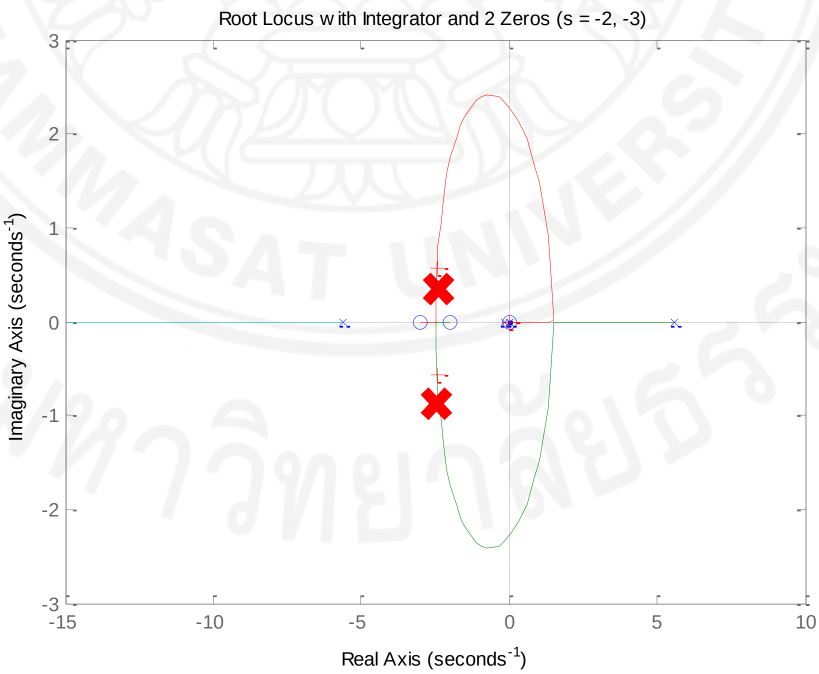
(ก) แบบทั่วไป (ข) แบบจัดเรียงใหม่



ภาพที่ 3.3 เส้นทางเดินของรากของระบบก้านเพนดูลัม



ภาพที่ 3.4 เส้นทางเดินของรากของระบบก้านเพนดูลัมหลังจากเพิ่มโพลที่จุดกำเนิด



ภาพที่ 3.5 เส้นทางเดินของรากของระบบก้านเพนดูลัมหลังจาก
เพิ่มโพลที่จุดกำเนิดและเพิ่มซีโร

ต่อไปทำการหาค่าเกนที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพโดยใช้คำสั่ง rlocfind() ของ MATLAB ซึ่งในที่นี้ตำแหน่งที่เลือกได้แสดงเป็นสัญลักษณ์กากบาทในภาพที่ 3.5 และค่าเกนที่ได้เท่ากับ 20 (K =20) เพราะฉะนั้นระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมคือ

$$\begin{aligned} C_{pend}(s) &= K\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{s} \\ &= 20\frac{(s+2)(s+3)}{s} \\ &= \frac{20s^2+100s+120}{s} \end{aligned} \tag{3.27}$$

เมื่อพิจารณาจากสมการที่ 3.27 เป็นสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบพีไอดี โดยที่ K_p = 100, K_i = 120 และ K_d = 20

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมพีไอดีสำหรับควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบป้อนกลับคือ

จากสมการที่ 3.26 $$\frac{\Phi}{F} = \frac{G_{pend}}{1+G_{pend}C_{pend}}$$

$$\frac{\Phi}{F} = \frac{\dfrac{4.545s}{s^3+0.1818s^2-31.18s-4.455}}{1+\left(\dfrac{4.545s}{s^3+0.1818s^2-31.18s-4.455}\right)\left(\dfrac{20s^2+100s+120}{s}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{\Phi}{F} = \frac{4.545s^2}{s^4+91.096s^3+423.4254s^2+541.0227s} \tag{3.28}$$

หรือ $$\frac{\Phi}{F} = \frac{4.545s^2}{s(s+86.26)(s^2+4.836s+6.272)}$$

และผลตอบสนองของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบพีไอดีได้แสดงในภาพที่ 3.6 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า settling time ของระบบมีค่าประมาณ 3 วินาทีและเพนดูลัมแกว่งตัวมากสุด +0.0441 เรเดียน ซึ่งเป็นไปตามข้อกำหนดที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น

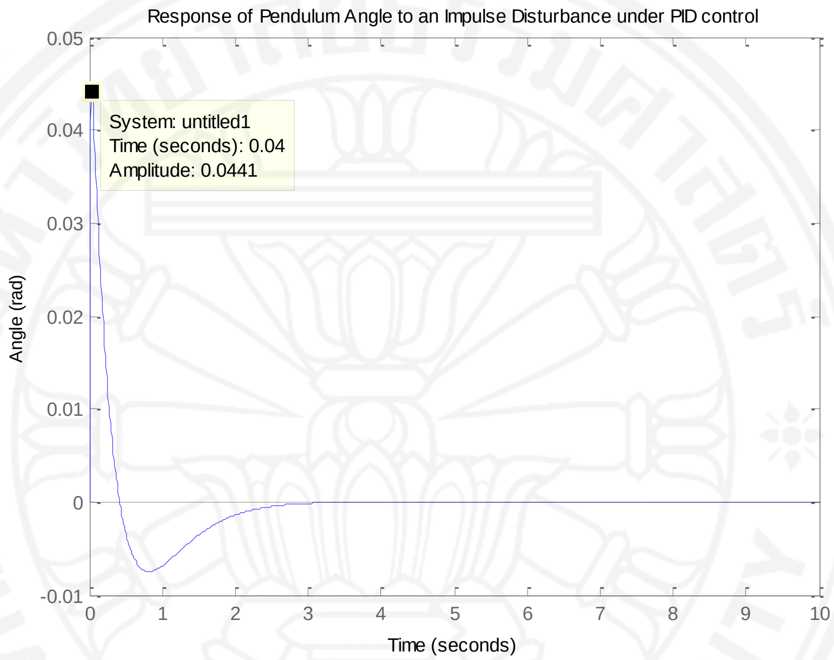
3.5.2 การควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ

จากหัวข้อที่ 3.5.1 ได้แสดงเห็นว่าระบบควบคุมดังกล่าวสามารถควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมได้ในตำแหน่งตั้งตรง แต่ยังไม่สามารถควบคุมตำแหน่งของตัวรถได้ และจากภาพที่ 3.7 พบว่าตัวรถจะเคลื่อนที่ไปทางขวาแล้วหยุดนิ่ง ในการควบคุมตำแหน่งของตัวรถใช้วิธีการออกแบบใน

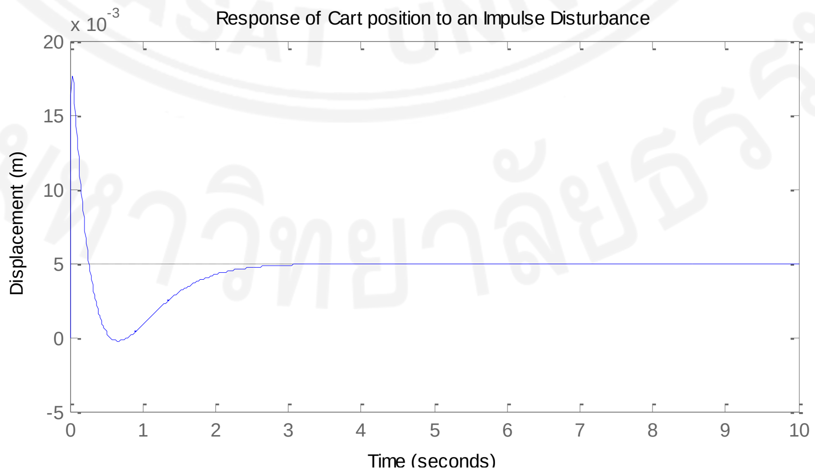
ลักษณะปรับค่าตามจุดอ้างอิง (reference tracking) เพราะต้องการที่จะควบคุมตัวรถไปยังตำแหน่งที่ต้องการ และในที่นี้จะทำการเปรียบเทียบระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถได้แก่

(1) ระบบควบคุมแบบพีไอดี-พีไอดี (PID-PID controller)

(2) ระบบควบคุมแบบพีดี-พีไอดี (PD-PID controller)



ภาพที่ 3.6 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบพีไอดี



ภาพที่ 3.7 ผลตอบสนองของตัวรถสืบเนื่องจากระบบควบคุม
ตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบพีไอดี

บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมตัวรถแสดงในภาพที่ 3.8ก และได้ทำการจัดเรียงรูปใหม่ให้ง่ายต่อการพิจารณาแสดงในภาพที่ 3.8ข โดยที่ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับของระบบตัวรถคือ

$$\frac{X}{r} = \frac{G^*C_{cart}}{1+G^*C_{cart}} \tag{3.29}$$

โดยที่

$$G^* = \frac{G_{cart}}{1+G_{pend}C_{pend}}$$

$$= \frac{\dfrac{1.818s^2-44.5455}{s^4+0.1818s^3-31.18s^2-4.455s}}{1+\left(\dfrac{4.545s}{s^3+0.1818s^2-31.18s-4.455}\right)\left(\dfrac{20s^2+100s+120}{s}\right)}$$

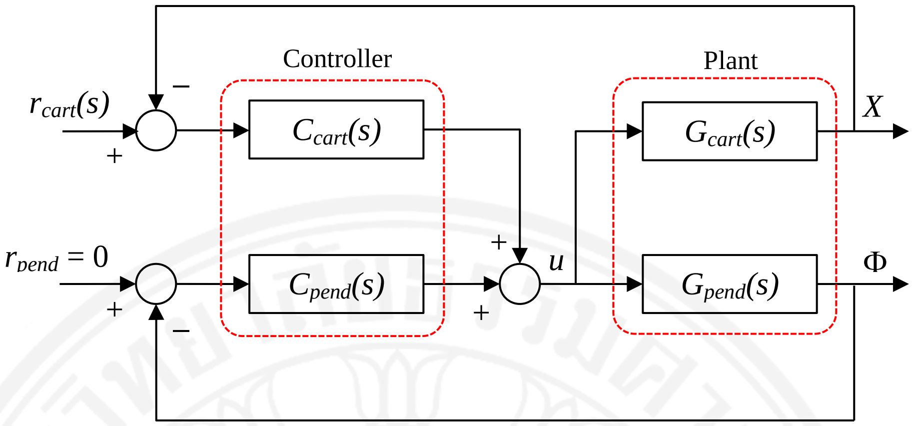
$$\therefore \quad G^* = \frac{1.818s^2-44.5455}{s^4+91.09s^3+423.4s^2+541s} \tag{3.30}$$

หรือ

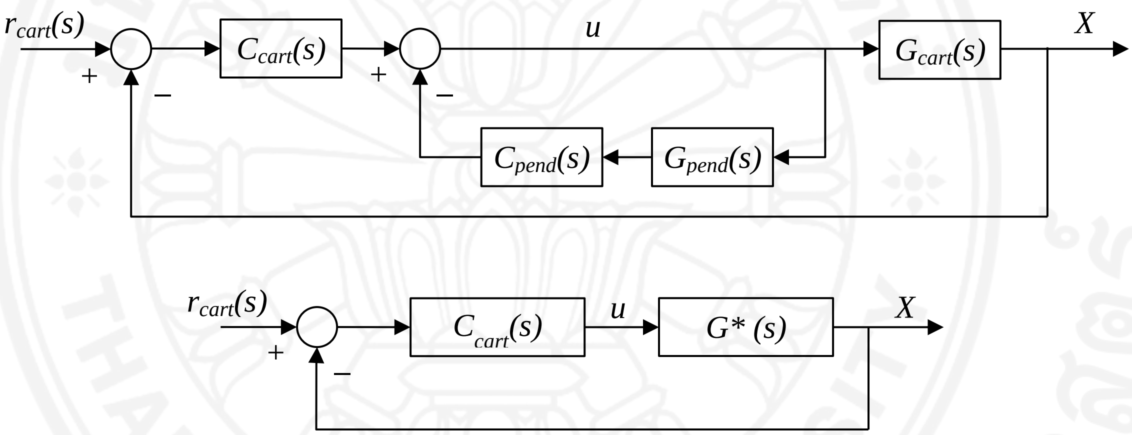
$$G^* = \frac{1.818(s+4.95)(s-4.95)}{s(s+86.26)(s^2+4.836s+6.272)}$$

และจากฟังก์ชันถ่ายโอน พบว่ารากของสมการหรือโพลของระบบมี 4 ค่าได้แก่ 0, −86.255 และ −2.4178±0.653i ซึ่งอยู่ด้านซ้ายของระนาบเอส ทำให้สมมติได้ว่าระบบนั้นมีเสถียรภาพ ณ ตำแหน่งของก้านเพนดูลัมตั้งตรง ดังนั้นทำการหาผลตอบสนองของระบบแบบป้อนกลับ พบว่าผลตอบสนองมีค่าลู่เข้าจุดอ้างอิงทางด้านลบแสดงว่าค่าเกนของระบบควบคุมจะต้องเป็นค่าลบ (controller gain = -1) เพื่อทำให้ผลตอบสนองมีค่าลู่เข้าจุดอ้างอิงที่เป็นค่าบวก

จากนั้นทำการหาค่าพารามิเตอร์ของระบบควบคุมแบบพีไอดีด้วยวิธีของโคเฮน-คูนซึ่งแสดงในตารางที่ 2.4 โดยทำการหาค่าตัวแปร K, T และ L จากผลตอบสนองของฟังก์ชันถ่ายโอน $G^*(s)$ ซึ่งได้แสดงในภาพที่ 3.9



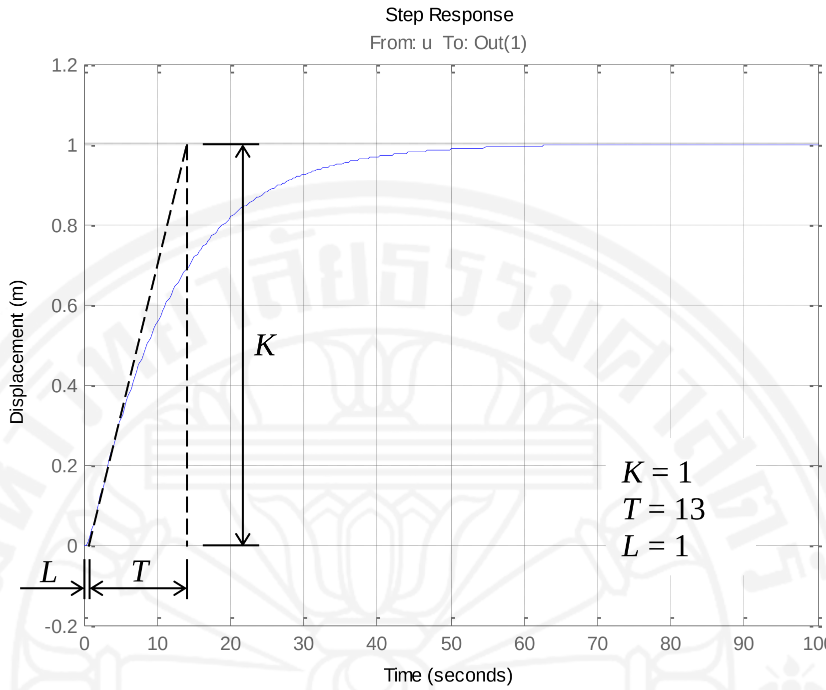
(ก)



(ข)

ภาพที่ 3.8 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบป้อนกลับ

(ก) แบบทั่วไป (ข) แบบจัดเรียงใหม่



ภาพที่ 3.9 ผลตอบสนองของฟังก์ชันถ่ายโอน $G^*(s)$

จาก $a = KL/T = (1\times1)/13$

$\therefore a = 0.0769$

และจาก $\tau = L/(L+T) = 1/(1+13)$

$\therefore \tau = 0.0714$

(1) ระบบควบคุมแบบพีไอดี-พีไอดี

ค่าพารามิเตอร์ของระบบควบคุมแบบพีไอดี-พีไอดีได้แก่

จาก $$K_p = \frac{1.35}{a}\left(1+\frac{0.18\tau}{1-\tau}\right) = \frac{1.35}{(0.0769)}\left(1+\frac{(0.18)(0.0714)}{1-0.0714}\right)$$

$$= 17.8$$

จาก $$T_i = \frac{2.5-2\tau}{1-0.39\tau}L = \frac{2.5-2(0.0714)}{1-(0.39)(0.0714)}(1)$$

$$= 2.42$$

$$\therefore K_i = 17.8/2.42 = 7.3554$$

จาก $$T_d = \frac{0.37-0.37\tau}{1-0.81\tau}L = \frac{0.37-(0.37)(0.0714)}{1-(0.81)(0.0714)}(1)$$

$$= 0.36$$

$$\therefore \quad K_d = 17.8 \times 2.42 = 6.4$$

และจากที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้ว ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ของระบบควบคุมได้แก่ K_p = −17.8, K_i = −7.3554 และ K_d = −6.4 เพราะฉะนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมคือ

$$C_{cart}(s) = \frac{(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s}$$

$$= \frac{(-6.4s^2 - 17.8s - 7.3554)}{s} \tag{3.31}$$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมพีไอดี-พีไอดีสำหรับควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบป้อนกลับคือ

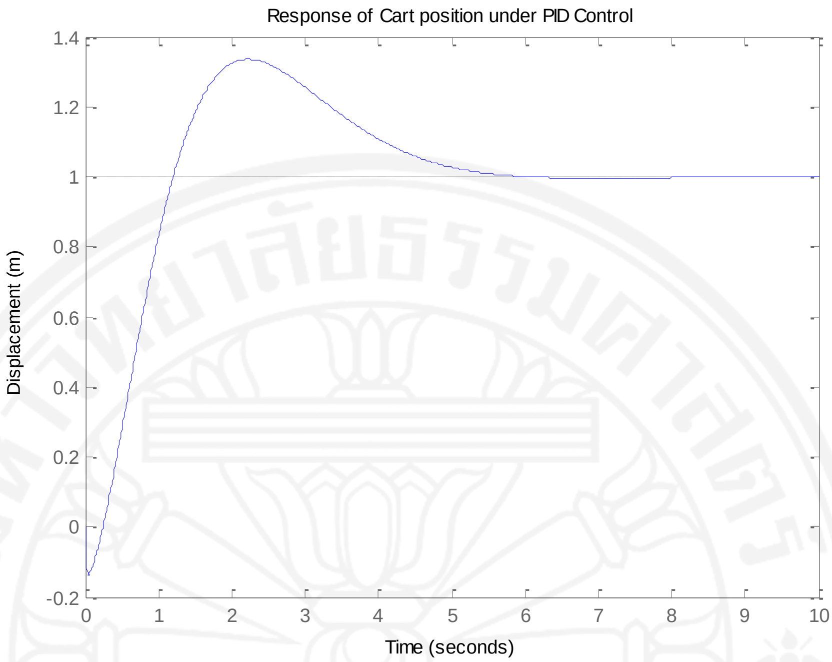
จากสมการที่ (3.29)

$$\frac{X}{r} = \frac{G*C_{cart}}{1+G*C_{cart}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1.818s^2 - 44.5455}{s^4 + 91.09s^3 + 423.4s^2 + 541s}\right)\left(\dfrac{(-6.4s^2 - 17.8s - 7.3554)}{s}\right)}{1+\left(\dfrac{1.818s^2 - 44.5455}{s^4 + 91.09s^3 + 423.4s^2 + 541s}\right)\left(\dfrac{(-6.4s^2 - 17.8s - 7.3554)}{s}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{X}{r} = \frac{-11.64s^4 - 32.36s^3 + 271.7s^2 + 792.9s + 327.6}{s^5 + 79.45s^4 + 391s^3 + 812.7s^2 + 792.9s + 327.6} \tag{3.32}$$

พบว่าค่ารากสมการของระบบมีทั้งหมด 5 ค่าได้แก่ −74.3401, −1.611±0.8933i และ −0.9462±0.6352i โดยที่ผลตอบสนองของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบพีไอดี-พีไอดีได้แสดงในภาพที่ 3.10



ภาพที่ 3.10 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ แบบพีไอดี-พีไอดี

(2) ระบบควบคุมแบบพีดี-พีไอดี

ค่าพารามิเตอร์ของระบบควบคุมแบบพีดี-พีไอดีได้แก่

จาก $$K_p = \frac{1.24}{a}\left(1+\frac{0.13\tau}{1-\tau}\right) = \frac{1.24}{(0.0769)}\left(1+\frac{(0.13)(0.0714)}{1-0.0714}\right)$$

$$= 16.286$$

จาก $$T_d = \frac{0.27-0.36\tau}{1-0.87\tau}L = \frac{0.27-(0.36)(0.0714)}{1-(0.87)(0.0714)}(1)$$

$$= 0.26$$

$$\therefore \quad K_d = 16.286\times 0.26 = 2.2421$$

และจากที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้ว ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ของระบบควบคุมได้แก่ K_p = −16.286, และ K_d = −2.2421 เพราะฉะนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมคือ

$$C_{cart}(s) = K_d s + K_p$$

$$= -2.2421s - 16.286 \qquad (3.33)$$

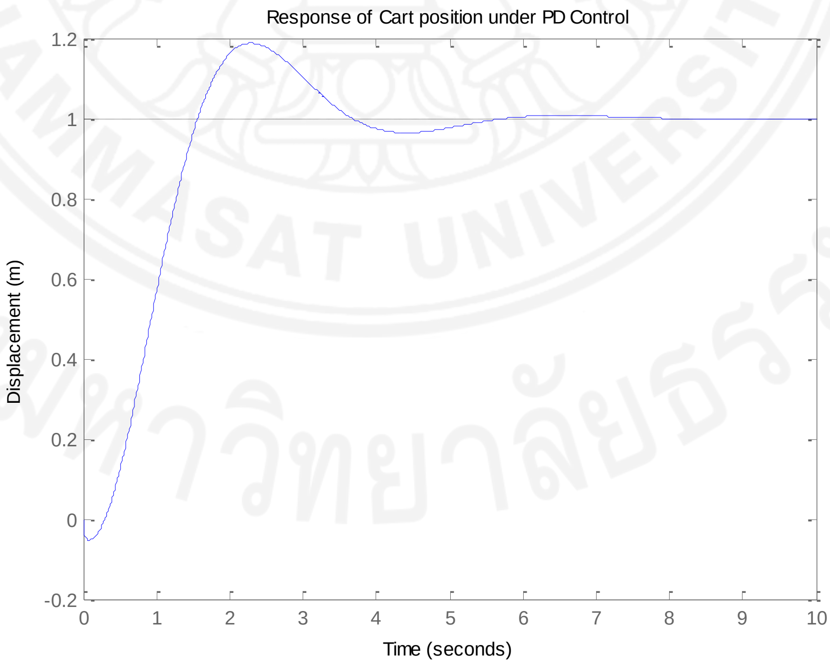
เพราะฉะนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมพีดี-พีไอดีสำหรับควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบป้อนกลับคือ

จากสมการที่ (3.29) $$\frac{X}{r} = \frac{G*C_{cart}}{1+G*C_{cart}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1.818s^2-44.5455}{s^4+91.09s^3+423.4s^2+541s}\right)(-2.2421s-16.286)}{1+\left(\frac{1.818s^2-44.5455}{s^4+91.09s^3+423.4s^2+541s}\right)(-2.2421s-16.286)}$$

$$\therefore \quad \frac{X}{r} = \frac{-4.077s^3-29.61s^2+99.88s+725.5}{s^4+87.01s^3+393.8s^2+640.9s+725.5} \tag{3.34}$$

พบว่าค่ารากสมการของระบบมีทั้งหมด 4 ค่าได้แก่ −82.3247, −3.1379 และ −0.7759±1.4854i โดยที่ผลตอบสนองของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบพีดี-พีไอดีได้แสดงในภาพที่ 3.11



ภาพที่ 3.11 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบพีดี-พีไอดี

3.6 การออกแบบระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้น

พิจารณาจากสมการการเคลื่อนที่ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถโดยนำเสนอในรูปแบบจำลองสเตทสเปซที่เป็นเชิงเส้น ซึ่งได้แสดงในสมการที่ (3.24) และ (3.25) ดังนี้

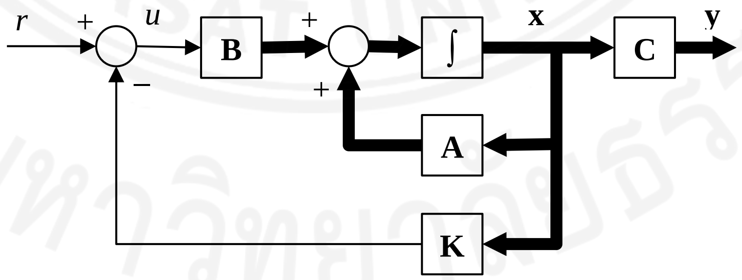
$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{Bmatrix} u$$

และ

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} u$$

โดยที่ $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$ และ $x_4 = \dot{\theta}$ พบว่าจำนวนตัวแปรสเตทเท่ากับ 4 (n = 4)

สมมติให้ชุดทดลองนี้สามารถตรวจวัดค่าตัวแปรสเตทได้ทุกตัว ดังนั้นระบบควบคุมพื้นฐานนี้อาจเรียกว่า ระบบควบคุมแบบป้อนกลับทุกค่า (Full-State feedback control) และจากภาพที่ 3.12 แสดงให้เห็นว่า $\mathbf{K}$ เป็นเมตริกซ์ค่าเกนของระบบควบคุมสำหรับตัวแปรสเตททุกตัว



ภาพที่ 3.12 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับทุกค่า

ก่อนที่จะคำนวณหาเมตริกซ์ค่าเกน $\mathbf{K}$ จะต้องทำการตรวจสอบว่าระบบชุดทดลองนี้มีความสามารถควบคุมได้หรือสภาพควบคุมได้ (controllability) ดังนี้

จาก $$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{Bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{Bmatrix} \vdots \quad \ldots \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{Bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{Bmatrix} \right]$$

$$\therefore \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1.818 & -0.331 & 12.209 \\ 1.818 & -0.331 & 12.209 & -4.429 \\ 0 & 4.545 & -0.826 & 141.89 \\ 4.545 & -0.826 & 141.89 & -31.32 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

ในการหาค่าเมตริกซ์ $\mathbf{M}$ (Controllability matrix) สามารถใช้ฟังก์ชัน ctrb() ในโปรแกรม MATLAB หาคำตอบได้เช่นกัน และจากเมตริกซ์ $\mathbf{M}$ พบว่า

$$rank(\mathbf{M}) = n = 4 \tag{3.36}$$

เพราะฉะนั้น $rank(\mathbf{M})$ มีค่าเท่ากับจำนวนตัวแปรสเตท (n) นั่นหมายความว่าระบบของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถมีสภาพควบคุมได้

3.6.1 การหาค่าเกนของระบบควบคุม

ในการหาค่าเกน $\mathbf{K}$ ด้วยวิธีกำลังสองเชิงเส้น (LQR) ระบบต้องมีสภาพควบคุมได้ ซึ่งได้พิสูจน์แล้วในสมการที่ (3.36) ดังนั้นจากค่าน้อยที่สุดของพลังงานที่จ่ายออกไปหรือจากสมการที่ (2.42) คือ

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^\mathrm{T}\mathbf{R}\mathbf{u})dt$$

โดยที่ $\mathbf{Q}$ เป็น เมตริกซ์ตัวประกอบถ่วงสำหรับตัวแปรสเตท

$\mathbf{R}$ เป็น เมตริกซ์ตัวประกอบถ่วงสำหรับสัญญาณควบคุม

และค่าเกน $\mathbf{K}$ สามารถหาจากสมการที่ (2.48)

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{P}$$

โดยที่ $\mathbf{P}$ หาได้จาก Algebraic Riccati Equation (ARE) คือ

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{PA}-\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}+\mathbf{Q} = 0$$

จากนั้นทำการหาค่าเกน $\mathbf{K}$ โดยกำหนดค่าเริ่มต้นของ $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ ดังนี้

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$$

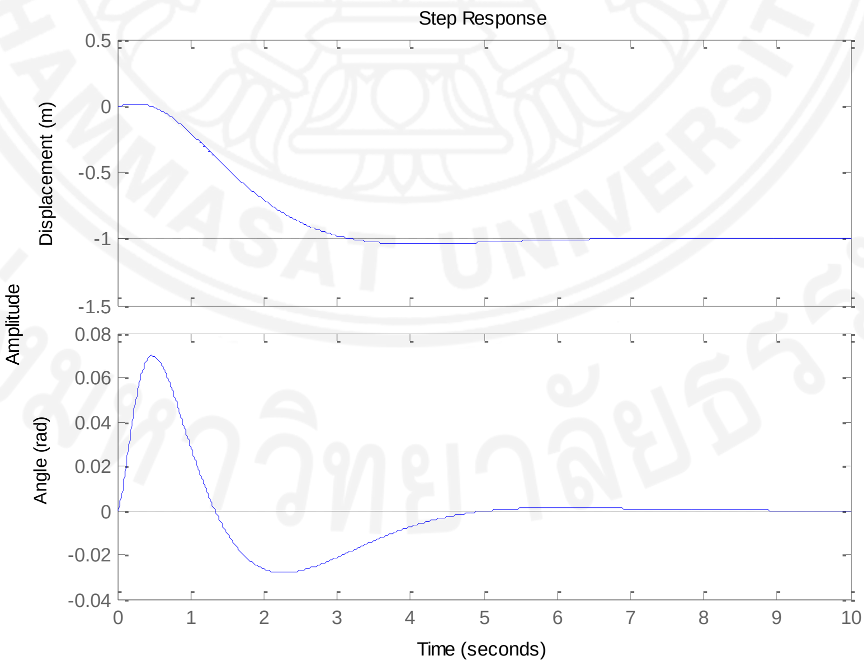
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{R} = 1$$

หรืออาจใช้ฟังก์ชัน lqr() ในโปรแกรม MATLAB ซึ่งมีพารามิเตอร์สำคัญคือ $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ เพราะฉะนั้นค่าเกน $\mathbf{K}$ ที่คำนวณได้แก่

$$\mathbf{K} = [-1 \quad -1.6567 \quad 18.6854 \quad 3.4594] \quad (3.38)$$

และผลตอบสนองของระบบสืบเนื่องจากค่าเกนข้างต้นได้แสดงตามภาพที่ 3.13 พบว่าผลตอบสนองของทั้งตัวรถและก้านเพนดูลัมไม่เป็นไปตามข้อกำหนดจึงต้องทำการปรับเปลี่ยนค่าของ $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ เพื่อให้ได้ผลตอบสนองที่ต้องการ



ภาพที่ 3.13 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ

เมื่อค่าเกนคือ [−1 −1.6567 18.6854 3.4594]

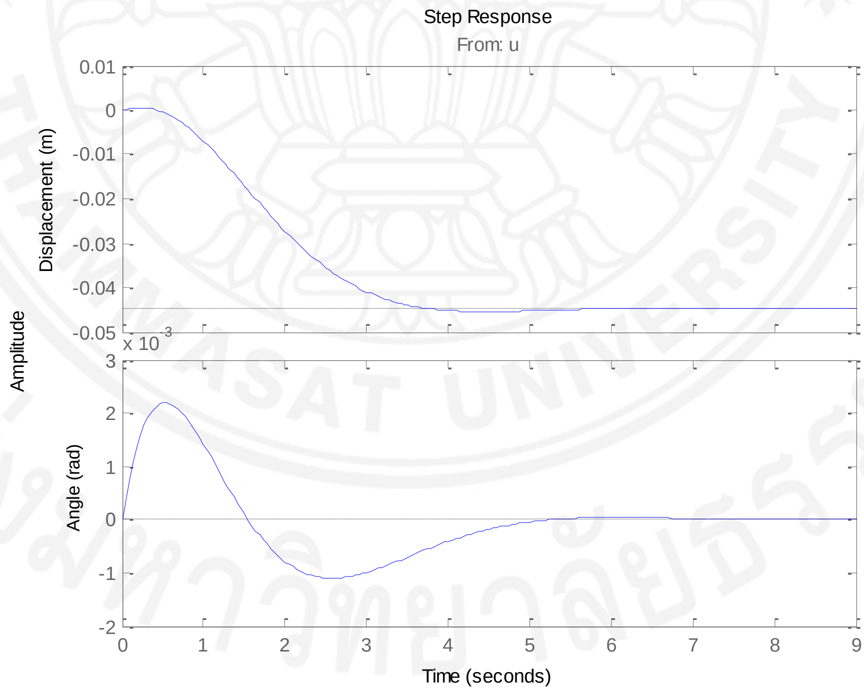
จากนั้นทำการปรับค่า $\mathbf{Q}$ ดังนี้

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

โดยที่ $\mathbf{R}$ = 1 เพราะฉะนั้นค่าเกน $\mathbf{K}$ ที่คำนวณได้แก่

$$\mathbf{K} = [\,-22.3607 \quad -40.5543 \quad 310.6996 \quad 117.0419\,] \quad (3.40)$$

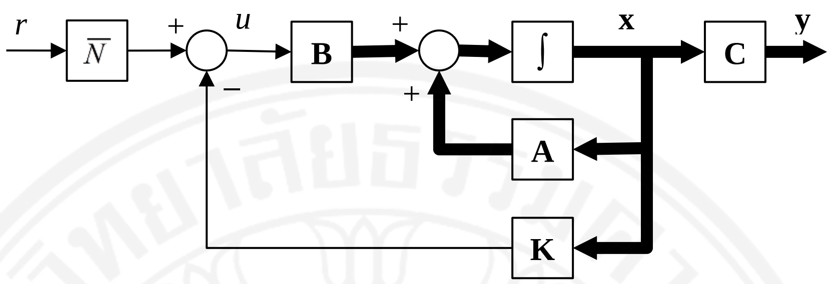
และผลตอบสนองของระบบสืบเนื่องจากค่าเกนข้างต้นได้แสดงตามภาพที่ 3.14 พบว่า ผลตอบสนองของก้านเพนดูลัมเป็นไปตามข้อกำหนด แต่ผลตอบสนองของตัวรถนั้นมีค่าต่างๆ เป็นไปตามข้อกำหนดเหลือแต่ค่าอ้างอิงที่ไม่เป็นไปตามข้อกำหนด หรือเกิด steady-state error ขึ้น ดังนั้นจำเป็นต้องกำจัดค่าความผิดพลาดดังกล่าว โดยการเพิ่มเกนขยายป้อนก้าวหน้า (Feed-forward gain) หรือใช้ตัวกระทำแบบอินทิกรัล (Integral action) เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าว



ภาพที่ 3.14 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ

เมื่อค่าเกนคือ [−22.3607 −40.5543 310.6996 117.0419]

(1) การหาค่าเกนขยายป้อนก้าวหน้า



ภาพที่ 3.15 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับทุกค่า และเกนขยายป้อนก้าวหน้า

จากผลตอบสนองของระบบซึ่งแสดงในภาพที่ 3.14 พบว่ามี steady-state error เกิดขึ้น และในการเพิ่มค่าเกนขยายป้อนก้าวหน้าสามารถหาค่า $\mathbf{N}_x$ และ N_u จากสมการที่ (2.33) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 & 1.818 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 & 4.545 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \left[\begin{array}{c} \mathbf{N}_x \\ \hline N_u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \tag{3.41}$$

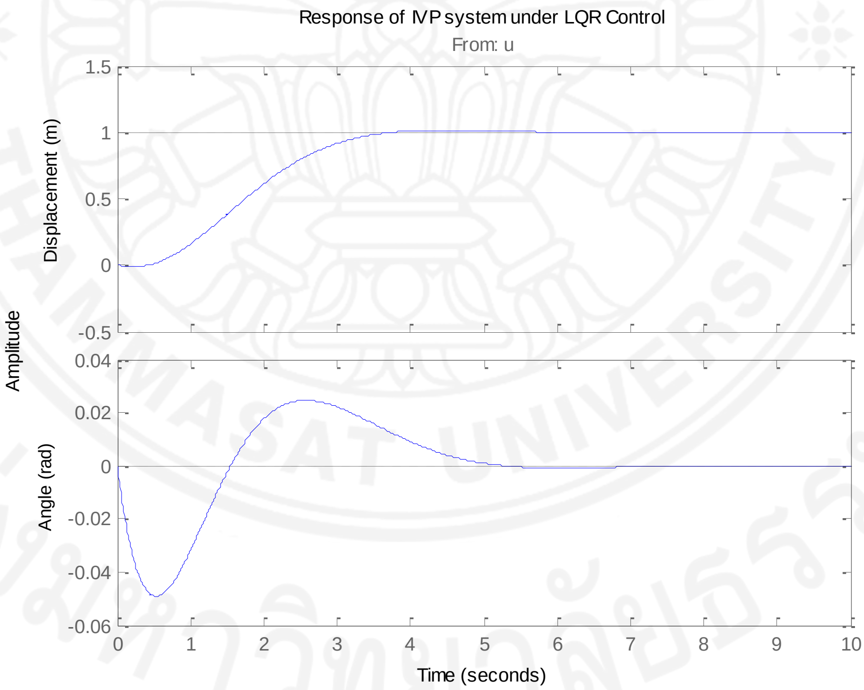
หรือ $\mathbf{N}_x^{\mathrm{T}} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, $N_u = 0$ โดยที่ค่าเกน $\mathbf{K} = [-22.3607 \quad -40.5543 \quad 310.6996 \quad 117.0419]$ ดังนั้นหาค่า $\bar{N}$ จากสมการที่ (2.36)

$$\bar{N} = \mathbf{N}_x\mathbf{K} + N_u$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -22.3607 & -40.5543 & 310.6996 & 117.0419 \end{bmatrix}$$

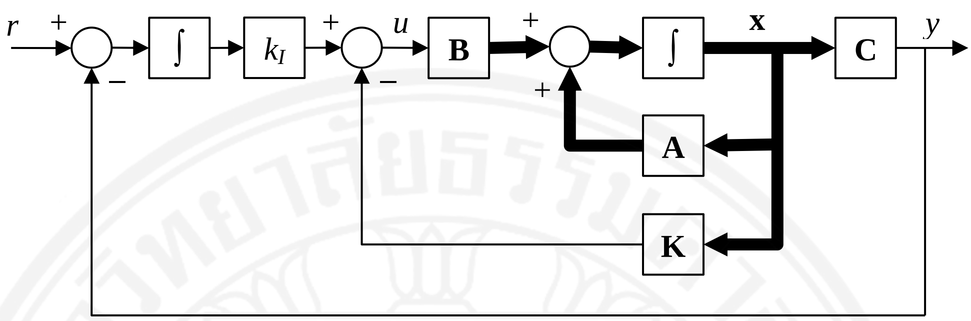
$$\therefore \quad \bar{N} = -22.3607 \qquad (3.42)$$

ดังนั้นผลตอบสนองของระบบเมื่อเพิ่มเกนขยายป้อนก้าวหน้าแสดงในภาพที่ 3.16 พบว่า steady-state error มีค่าเป็นศูนย์ และผลตอบสนองที่เกิดขึ้นเป็นไปตามข้อกำหนดในการออกแบบที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น



ภาพที่ 3.16 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถแบบกำลังสองเชิงเส้น

(2) การหาค่าเกนตัวกระทำแบบอินทิกรัล



ภาพที่ 3.17 บล็อกไดอะแกรมทั่วไปของระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับทุกค่า และตัวกระทำแบบอินทิกรัล

จากภาพที่ 3.17 ค่าเกน $\mathbf{K}$ และ k_I สามารถหาได้จากสมการที่ (2.48) คือ

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e$$

โดยที่

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากที่กล่าวไว้ข้างต้นและพิจารณาจากภาพที่ 3.17 ระบบควบคุมในลักษณะปรับค่าตามจุดอ้างอิงนี้จะใช้ตำแหน่งของตัวรถ (x_1) ในการพิจารณาเพียงอย่างเดียว ดังนั้นเมตริกซ์เอาท์พุทสามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$y = \mathbf{Cx}$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \tag{3.43}$$

โดยที่

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{3.44}$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการดังกล่าวได้ว่า

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \hat{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

หรือเขียนให้อยู่ในสมการสเตทสเปซดังสมการที่ (2.48) ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \hline \dot{\xi} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.673 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.4545 & 31.18 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline \xi \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \\ \hline 0 \end{array}\right] u \qquad (3.45)$$

จากนั้นกำหนดค่า $\mathbf{Q}$ และ $\mathbf{R}$ เริ่มต้นดังนี้

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.46)$$

และ $$\mathbf{R} = 1 \qquad (3.47)$$

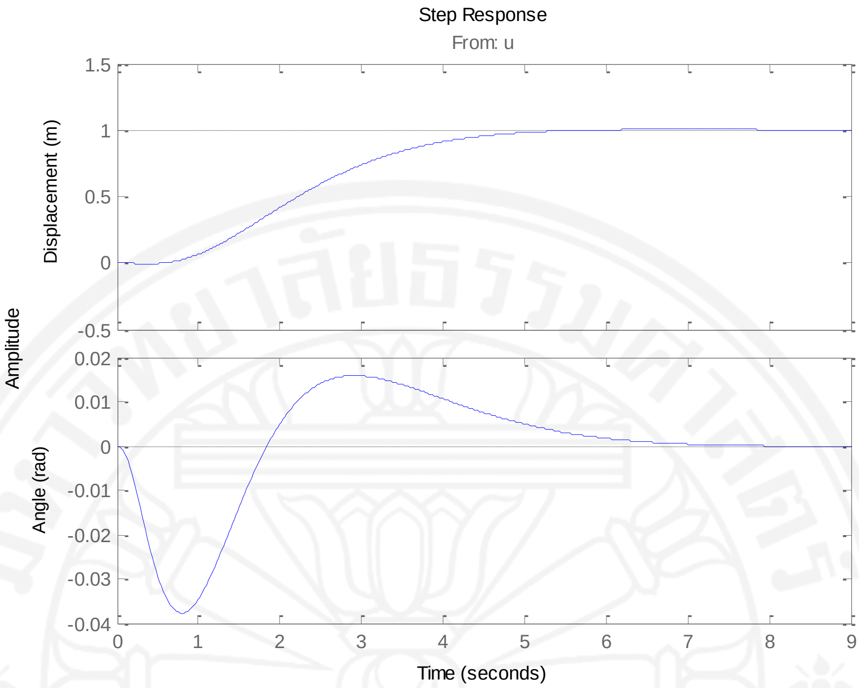
จากนั้นทำการหาค่าเกน $\mathbf{K}$ และ k_I จากสมการที่ (2.48) หรือ อาจใช้ฟังก์ชัน lqi() จากโปรแกรม MATLAB ดังนั้นผลลัพธ์ค่าเกนที่ได้คือ [−7.5124 −7.4421 38.9323 8.1723 3.1623] และจากสมการที่ (2.49) พบว่า

$$\hat{\mathbf{K}} = \left[\mathbf{K} \;\vdots\; -k_I\right]$$

โดยที่

$$\mathbf{K} = [-7.5124 \;\; -7.4421 \;\; 38.9323 \;\; 8.1723]$$

$$k_I = -3.1623$$



ภาพที่ 3.18 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ
เมื่อค่าเกนคือ [−7.5124 −7.4421 38.9323 8.1723]
และ k_I = −3.1623

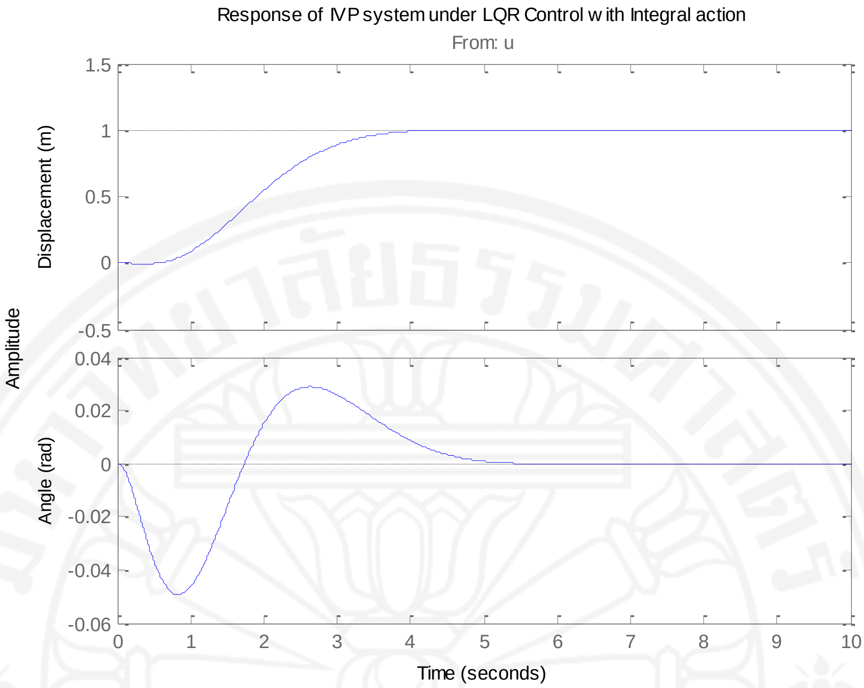
จากนั้นทำการปรับค่า **Q** ดังนี้

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

โดยที่ **R** = 0.1 เพราะฉะนั้นค่าเกน **K** ที่คำนวณได้แก่ [−84.0029 −71.4763 323.6534 85.0450 42.4264] โดยที่

$$\mathbf{K} = [-84.0029 \quad -71.4763 \quad 323.6534 \quad 85.0450]$$

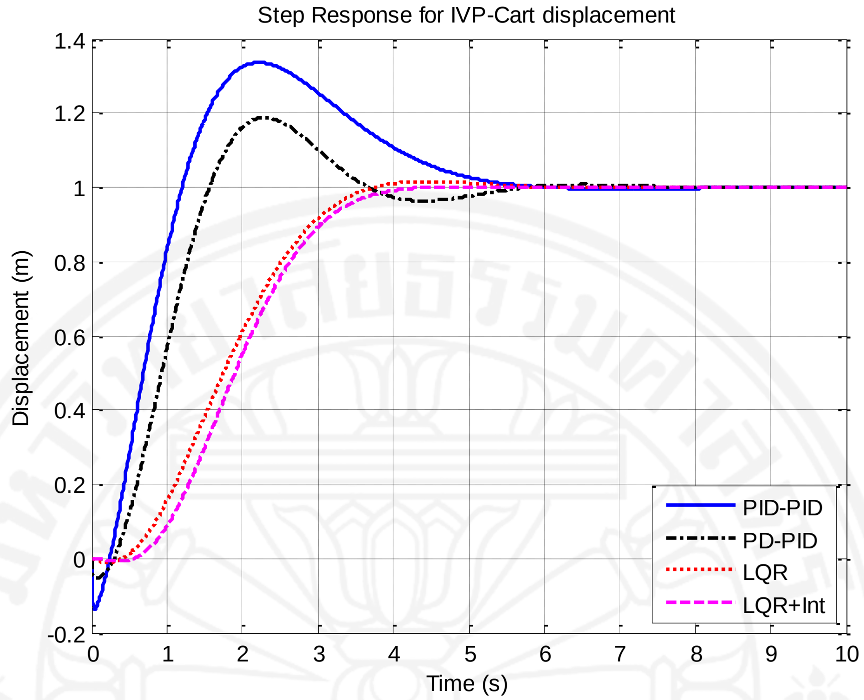
$$k_I = -42.4264$$



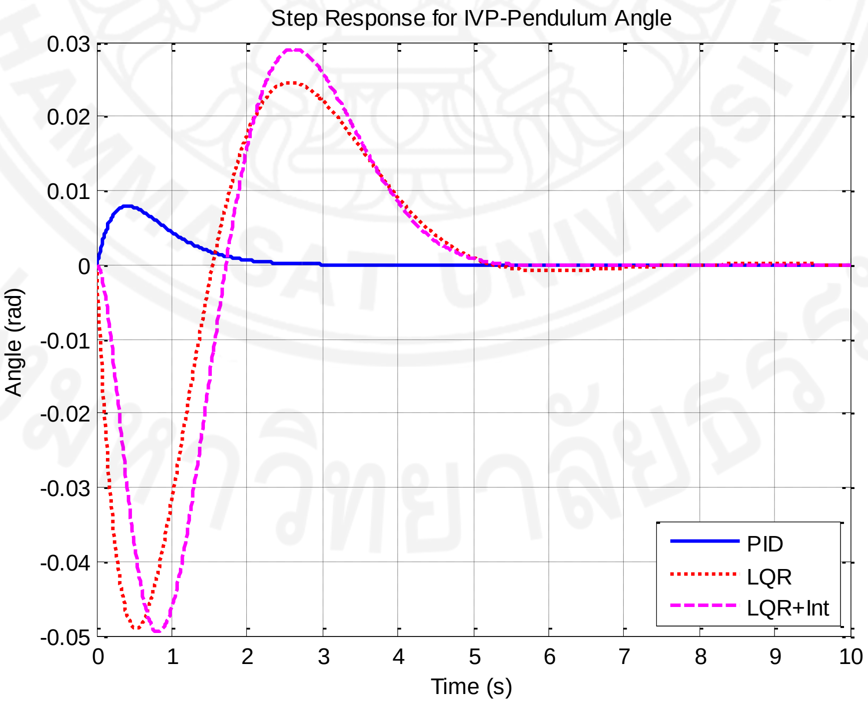
ภาพที่ 3.19 ผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถ แบบกำลังสองเชิงเส้นและตัวกระทำอินทิกรัล

ดังนั้นผลตอบสนองของระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมและตัวรถเมื่อเพิ่มตัวกระทำอินทิกรัลแสดงในภาพที่ 3.19 โดยผลตอบสนองที่ได้เป็นไปตามข้อกำหนดและยังสามารถกำจัด steady-state error เกิดขึ้นในระบบได้

จากระบบควบคุมต่างๆ ที่ได้นำเสนอมาในข้างต้นได้แก่ ระบบควบคุมพีไอดี-พีไอดี ระบบควบคุมพีดี-พีไอดี ระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับแบบกำลังเชิงเส้น และระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับแบบกำลังสองเชิงเส้นและตัวกระทำอินทิกรัล เมื่อนำผลตอบสนองของระบบมาเปรียบเทียบกันพบว่า ระบบควบคุมต่างๆ นั้นสามารถนำมาประยุกต์กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ได้เป็นอย่างดี ซึ่งในแต่ละวิธีการอาจจะมีความยุ่งยากซับซ้อนแตกต่างกันออกไป โดยผลตอบสนองของตำแหน่งของตัวรถและตำแหน่งของก้านเพนดูลัมในระบบควบคุมต่างๆ แสดงในภาพที่ 3.20 และภาพที่ 3.21 ตามลำดับ จากนั้นทำการเปรียบเทียบค่าผลตอบสนองของระบบได้แสดงในตารางที่ 3.1



ภาพที่ 3.20 เปรียบเทียบผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งตัวรถแบบต่างๆ



ภาพที่ 3.21 เปรียบเทียบผลตอบสนองระบบควบคุมตำแหน่งก้านเพนดูลัมแบบต่างๆ

ตารางที่ 3.1 เปรียบเทียบค่าผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบต่างๆ

ระบบควบคุม	ก้านเพนดูลัม		ตัวรถ	
	Rise time (sec)	Settling time (sec)	Rise time (sec)	Settling time (sec)
PID-PID	0	2.5874	0.7364	5.090
PD-PID	0	2.5874	0.9332	5.080
LQR	0	4.9953	2.007	3.4749
LQR+Integral	0	4.9673	2.000	3.7493

จากภาพที่ 3.20 3.21 และตารางที่ 3.1 เห็นได้ว่าระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นจะทำให้ settling time ของระบบมีค่าน้อยกว่าระบบควบคุมพีไอดี และ ค่า overshoot ของระบบมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับระบบควบคุมแบบพีไอดี ซึ่งทำให้ระบบเข้าสู่สภาวะคงตัวเร็วขึ้นและระบบเกิดการแกว่งน้อยลง

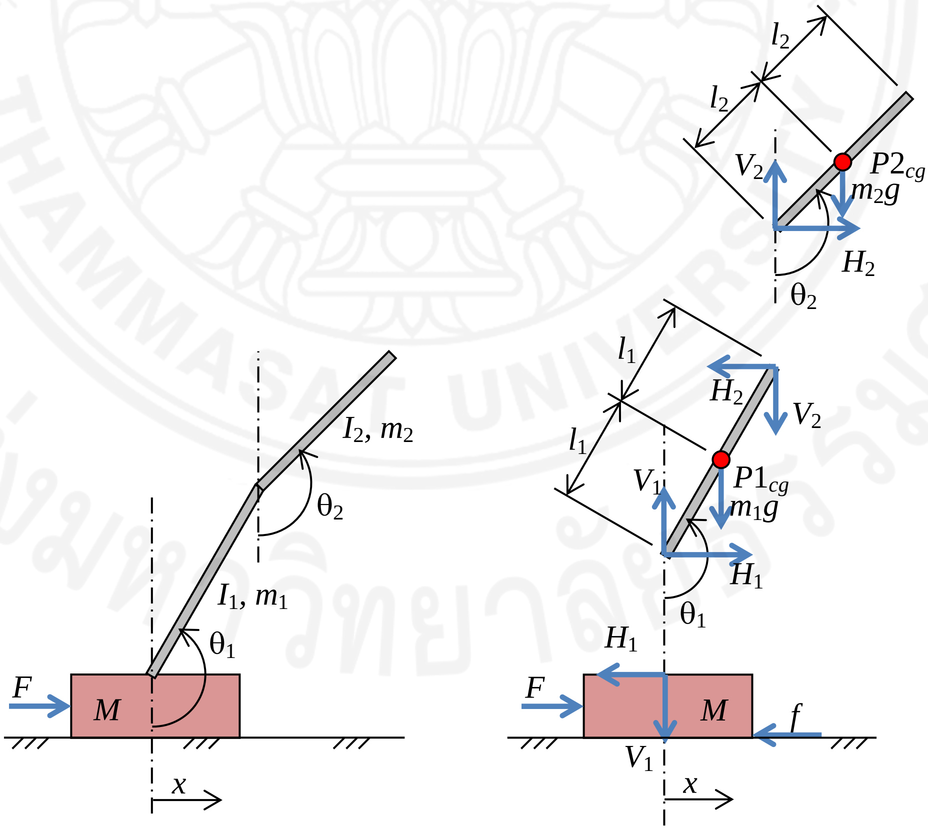
จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นเห็นได้ว่าระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นมีความซับซ้อนในการออกแบบน้อยกว่าระบบควบคุมพีไอดีและให้ผลตอบสนองของระบบที่ดีกว่า ดังนั้นจะนำระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นมาประยุกต์ใช้ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ (Double Inverted pendulum on Cart) ซึ่งจะกล่าวในบทถัดไป

บทที่ 4
ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ

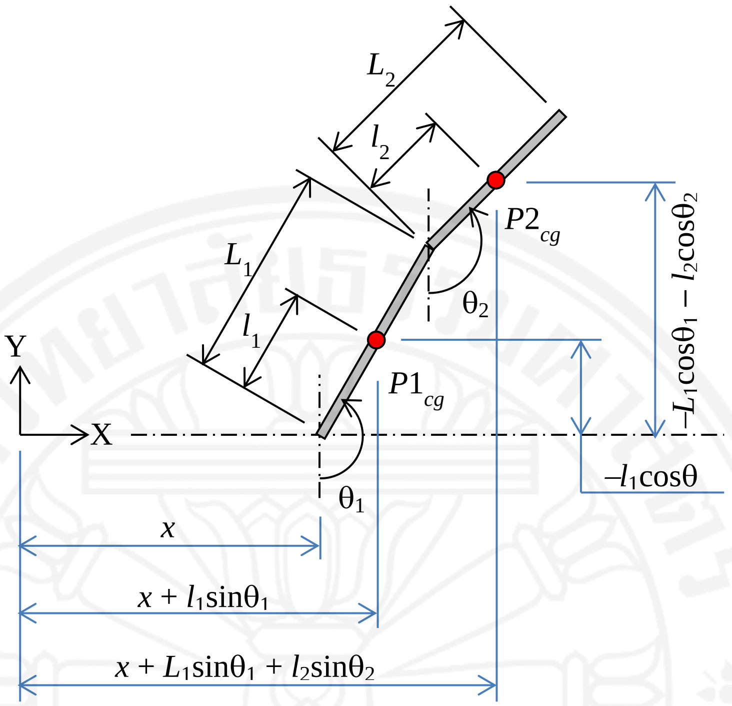
ในบทนี้กล่าวถึงการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถที่เป็นแบบเชิงเส้น และพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของค่าพารามิเตอร์ในระบบ การออกแบบระบบควบคุมทางทฤษฎีสำหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ ด้วยวิธีของระบบควบคุม H_∞ โดยการออกแบบระบบควบคุมดังกล่าวนี้อาศัยข้อกำหนดในการออกแบบระบบควบคุมที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น

ในการหาตัวควบคุมระบบแบบ H_∞ ใช้ชุดเครื่องมือ Robust Control ในโปรแกรม MATLAB จากนั้นนำตัวควบคุมที่ได้มาประยุกต์ใช้กับชุดทดลอง ที่สร้างขึ้นในโปรแกรม LABIVEW

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์



ภาพที่ 4.1 แผนภาพวัตถุอิสระของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ



ภาพที่ 4.2 ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของก้านเพนดูลัม

กำหนดให้

มวลของตัวรถ (M)	=	0.5	kg (±20%)
มวลของก้านเพนดูลัม (m_1)	=	0.2	kg (±30%)
มวลของก้านเพนดูลัม (m_2)	=	0.2	kg (±30%)
ความยาวของก้านเพนดูลัม ($2l_1$)	=	0.6	m
ความยาวของก้านเพนดูลัม ($2l_2$)	=	0.6	m
สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของตัวรถ (b)	=	0.1	N/m.s (±10%)
โมเมนต์ของความเฉื่อยของก้านเพนดูลัม (I_1)	=	0.006	$kg.m^4$
โมเมนต์ของความเฉื่อยของก้านเพนดูลัม (I_2)	=	0.006	$kg.m^4$

และสมมติให้สามารถตรวจวัดค่าการเคลื่อนที่ของตัวรถ และการแกว่งตัวก้านเพนดูลัมที่ 1 และก้านที่ 2

จากภาพที่ 4.2 เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของก้านเพนดูลัมที่ 1 และก้านที่ 2 ได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{1cg} &= x + l_1 \sin\theta_1 \\ \dot{x}_{1cg} &= \dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\ \ddot{x}_{1cg} &= \ddot{x} - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 \end{aligned} \qquad (4.1)$$

$$\begin{aligned} y_{1cg} &= -l_1 \cos\theta_1 \\ \dot{y}_{1cg} &= l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \\ \ddot{y}_{1cg} &= l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

$$\begin{aligned} x_{2cg} &= x + L_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ \dot{x}_{2cg} &= \dot{x} + L_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \\ \ddot{x}_{2cg} &= \ddot{x} - L_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + L_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \qquad (4.3)$$

และ

$$\begin{aligned} y_{2cg} &= -L_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \\ \dot{y}_{2cg} &= L_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \\ \ddot{y}_{2cg} &= L_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + L_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{aligned} \qquad (4.4)$$

จากนั้นพิจารณาผลรวมของแรงที่กระทำต่อตัวรถตามแนวแกนนอนโดยให้การเคลื่อนที่ไปทางขวามีค่าเป็นบวก

$$\begin{aligned} \sum F &= Ma \\ M\ddot{x} &= F - f - H_1 \\ M\ddot{x} + b\dot{x} + H_1 &= F \end{aligned} \qquad (4.5)$$

เมื่อพิจารณาที่ก้านเพนดูลัมที่ 1 ผลรวมของแรงที่กระทำต่อก้านเพนดูลัมตามแนวแกนนอนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \sum F &= m_1 a \\ m_1\ddot{x}_{1cg} &= H_1 - H_2 \\ m_1\ddot{x} - m_1 l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 &= H_1 - H_2 \end{aligned} \qquad (4.6)$$

และสำหรับผลรวมของแรงตามแนวแกนตั้งได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum F &= m_1 a \\ m_1\ddot{y}_{1cg} &= V_1 - V_2 - m_1 g \\ m_1 l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + m_1 g &= V_1 - V_2 \end{aligned} \qquad (4.7)$$

ต่อมาพิจารณาผลรวมของโมเมนต์ที่ตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของก้านเพนดูลัมที่ 1 โดยให้ทิศของการหมุนตามเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก

$$\sum M = I_1\ddot{\theta}_1$$

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -V_1 l_1 \sin\theta_1 - H_1 l_1 \cos\theta_1 - V_2 l_1 \sin\theta_1 - H_2 l_1 \cos\theta_1 \tag{4.8}$$

จากนั้นพิจารณาที่ก้านเพนดูลัมที่ 2 ผลรวมของแรงที่กระทำต่อก้านเพนดูลัมตามแนวแกนนอนได้ดังนี้

$$\sum F = m_2 a$$

$$m_2\ddot{x}_{2cg} = H_2$$

$$m_2\ddot{x} - m_2 L_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + m_2 L_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - m_2 l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 = H_2 \tag{4.9}$$

และสำหรับผลรวมของแรงตามแนวแกนตั้งได้ว่า

$$\sum F = m_2 a$$

$$m_2\ddot{y}_{2cg} = V_2 - m_2 g$$

$$m_2 L_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + m_2 L_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 + m_2 l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 + m_2 g = V_2 \tag{4.10}$$

ต่อมาพิจารณาผลรวมของโมเมนต์ที่ตำแหน่งของศูนย์กลางมวล โดยให้ทิศของการหมุนตามเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก

$$\sum M = I_2\ddot{\theta}_2$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 = -V_2 l_2 \sin\theta_2 - H_2 l_2 \cos\theta_2 \tag{4.11}$$

จากนั้นนำสมการที่ (4.5) จนถึงสมการที่ (4.11) มาแก้สมการเพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ชุดทดลองและสมการการเคลื่อนที่ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ 3 สมการดังนี้

$$\begin{aligned}(M + m_1 + m_2)\ddot{x} + b\dot{x} + m_1 l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 + m_2 L_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - m_1 l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 - m_2 L_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \\ + m_2 l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - m_2 l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 = F\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}I_1\ddot{\theta}_1 + m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 \sin^2\theta_1 + m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 + m_2 l_1 L_1\ddot{\theta}_1 \sin^2\theta_1 + m_2 l_1 L_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 \\ + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + m_1 g l_1 \sin\theta_1 + m_2 g l_1 \sin\theta_1 \\ + m_1 l_1\ddot{x}\cos\theta_1 + m_1 l_1^2\ddot{\theta}_1 \cos^2\theta_1 - m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 + m_2 l_1\ddot{x}\cos\theta_1 + m_2 l_1 L_1\ddot{\theta}_1 \cos^2\theta_1 \\ - m_2 l_1 L_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 + m_2 l_1 l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ + m_2 l_2 L_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + m_2 l_2 L_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 \sin^2\theta_2 + m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 \\ + m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_2\ddot{x}\cos\theta_2 + m_2 L_1 l_2\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - m_2 L_1 l_2\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ + m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 \cos^2\theta_2 - m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 = 0\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 - m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2\theta_2 + m_2 l_2 \ddot{x} \sin\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2$$
$$- m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + m_2 \ddot{x} l_2 \cos\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 \cos\theta_2$$
$$- m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos^2\theta_2$$
$$- m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 \quad = \quad 0 \tag{4.13}$$

4.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของระบบสมการ

สมการการเคลื่อนที่ของชุดทดลองที่ได้กล่าวข้างต้น (4.12 – 4.14) นั้นยังคงเป็นระบบสมการที่ไม่เชิงเส้น ดังนั้นจะต้องทำการแปลงระบบสมการให้เป็นเชิงเส้น โดยสมมติว่า ณ ตำแหน่งของก้านเพนดูลัมทั้งสองอยู่ในแนวตั้งตรง $(\theta_1 = \theta_2 = \pi)$ มีการเคลื่อนที่เชิงมุมน้อยมาก ดังนั้นถ้ากำหนดให้ ϕ_1 และ ϕ_2 แทนการกระจัดเชิงมุมของก้านเพนดูลัมที่ 1 $(\phi_1 = \theta_1 - \pi)$ และก้านเพนดูลัมที่ 2 $(\phi_2 = \theta_2 - \pi)$ จากตำแหน่งตั้งตรง ดังนั้นการประมาณค่าเชิงเส้นของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถหาได้จากสมการที่ (2.25) ดังนี้

$$y \quad = \quad f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + (x_1 - \bar{x}_1)\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1=\bar{x}_1} + (x_2 - \bar{x}_2)\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_2=\bar{x}_2} + (x_3 - \bar{x}_3)\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{x_3=\bar{x}_3}$$

โดยที่ $\quad x_1 = x \qquad x_2 = \theta_1 \qquad x_3 = \theta_2$

$\quad \bar{x}_1 = 0 \qquad \bar{x}_2 = \pi \qquad \bar{x}_3 = \pi$

ดังนั้นสมการเคลื่อนที่ของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถที่เป็นแบบเชิงเส้นได้แก่

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} + b\dot{x} - (l_1 m_1 + L_1 m_2)\ddot{\phi}_1 - l_2 m_2 \ddot{\phi}_2 \ = \ F \tag{4.14}$$

$$(I_1 + L_1 l_2 m_2 + (l_1^2 m_1 + L_1 l_1 m_2))\ddot{\phi}_1 - (m_1 + m_2) g \phi_1 + (l_1 l_2 m_2 + l_2^2 m_2)\ddot{\phi}_2 - m_2 g l_2 \phi_2$$
$$+ (-l_2 m_2 - l_1 (m_1 + m_2))\ddot{x} \ = \ 0 \tag{4.15}$$

$$(I_2 + l_2^2 m_2)\ddot{\phi}_2 - g l_2 m_2 \phi_2 - l_2 m_2 \ddot{x} + L_1 l_2 m_2 \ddot{\phi}_1 \ = \ 0 \tag{4.16}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์

$$A_1\ddot{\mathbf{Q}} + A_2\dot{\mathbf{Q}} + A_3\mathbf{Q} \ = \ \mathbf{F} \tag{4.17}$$

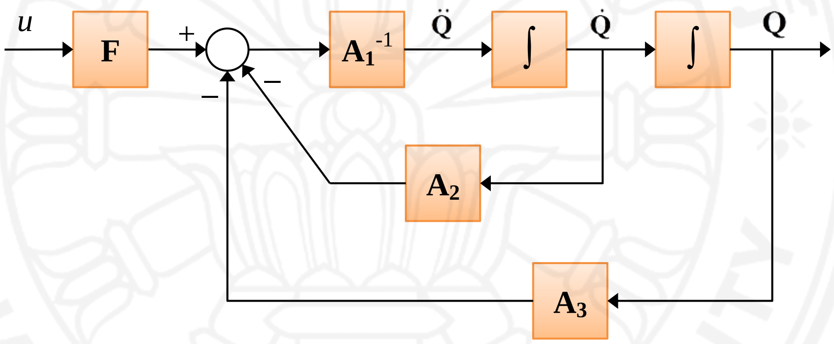
โดยที่

$$A_1 = \begin{bmatrix} M+m_1+m_2 & -(m_1l_1+m_2L_1) & -m_2l_2 \\ -\left[(m_1+m_2)l_1+m_2l_2\right] & I_1+m_1l_2L_1+(m_2l_1L_1+m_1l_1^2) & m_2l_1l_2+m_2l_2^2 \\ -m_2l_2 & m_2L_1l_2 & I_2+m_2l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19) \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(m_1+m_2)g & -m_2gl_2 \\ 0 & 0 & -m_2gl_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21) \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} x \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

และสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมได้ดังนี้



ภาพที่ 4.3 บล็อกไดอะแกรมของระบบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกัน
และมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ

4.3 ความไม่แน่นอนของระบบ (Uncertain model)

พิจารณาจากความไม่แน่นอนของค่าพารามิเตอร์ (parametric uncertainty)ที่เกิดขึ้นกับระบบชุดทดลอง สามารถแยกวิเคราะห์ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในแต่ละบล็อกเมตริกซ์ได้ดังนี้

4.3.1 ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในบล็อก A1

จากสมการความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ได้ว่า

$$\mathbf{A}_1 = \bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_{1P}\Delta_1 \quad (4.23)$$

โดยกำหนดให้

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{M}+\bar{m}_1+\bar{m}_2 & -(\bar{m}_1\bar{l}_1+\bar{m}_2\bar{L}_1) & -\bar{m}_2\bar{l}_2 \\ -\left[(\bar{m}_1+\bar{m}_2)\bar{l}_1+\bar{m}_2\bar{l}_2\right] & \bar{I}_1+\bar{m}_1\bar{l}_2\bar{L}_1+(\bar{m}_2\bar{l}_1\bar{L}_1+\bar{m}_1\bar{l}_1^{\,2}) & \bar{m}_2\overline{l_1 l_2}+\bar{m}_2\bar{l}_2^{\,2} \\ -\bar{m}_2\bar{l}_2 & \bar{m}_2\bar{L}_1\bar{l}_2 & \bar{I}_2+\bar{m}_2\bar{l}_2^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1P} = \begin{bmatrix} \bar{M}p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_1 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_2 p_3 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{13} \end{bmatrix}$$

จากภาพที่ 4.3 ดังนั้นเมตริกซ์ $\mathbf{A}_1^{-1}$ สามารถหาได้ดังนี้

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \left(\mathbf{A}_{1P}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_1+\Delta_1\right)^{-1}\mathbf{A}_{1P}^{-1} \tag{4.24}$$

โดยที่เทอมของ $\left(\mathbf{A}_{1P}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_1+\Delta_1\right)^{-1}$ สามารถกระจายได้ดังนี้

$$\left(\mathbf{A}_{1P}^{-1}\bar{\mathbf{A}}_1+\Delta_1\right)^{-1} = \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P}-\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P}\Delta_1\left(\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P}\Delta_1+I_3\right)^{-1}\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} \tag{4.25}$$

ดังนั้นสมการที่ (4.25) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}-\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P}\Delta_1\left(I_3+\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P}\Delta_1\right)^{-1}\bar{\mathbf{A}}_1^{-1} \tag{4.26}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปของ upper-LFT คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^{-1} &= F_u(\mathbf{R}_A,\Delta_1) \\ &= \mathbf{R}_{A_{22}}+\mathbf{R}_{A_{21}}\Delta_1\left(I_3-\mathbf{R}_{A_{11}}\Delta_1\right)^{-1}\mathbf{R}_{A_{12}} \end{aligned} \tag{4.27}$$

โดยที่

$$\mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{A_{11}} & \mathbf{R}_{A_{12}} \\ \mathbf{R}_{A_{21}} & \mathbf{R}_{A_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1} \\ -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

4.3.2 ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในบล็อก A2

จากสมการความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ได้ว่า

$$\mathbf{A}_2 = \bar{\mathbf{A}}_2+\mathbf{A}_{2P}\Delta_2 \tag{4.29}$$

โดยกำหนดให้

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{2P} = \begin{bmatrix} \bar{b}s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{23} \end{bmatrix}$$

โดยเขียนให้อยู่ในรูปของ upper LFT คือ

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2 &= F_u(\mathbf{R}_B, \Delta_2) \\ &= \mathbf{R}_{B_{22}} + \mathbf{R}_{B_{21}}\Delta_2\left(I_3 - \mathbf{R}_{B_{11}}\Delta_2\right)^{-1}\mathbf{R}_{B_{12}}\end{aligned} \tag{4.30}$$

โดยที่

$$\mathbf{R}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{B_{11}} & \mathbf{R}_{B_{12}} \\ \mathbf{R}_{B_{21}} & \mathbf{R}_{B_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_3 \\ \mathbf{A}_{2P} & \bar{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

4.3.3 ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในบล็อก A3

จากสมการความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ได้ว่า

$$\mathbf{A}_3 = \bar{\mathbf{A}}_3 + \mathbf{A}_{3P}\Delta_3 \tag{4.32}$$

โดยกำหนดให้

$$\bar{\mathbf{A}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\bar{m}_1+\bar{m}_2)g & -\bar{m}_2 g\bar{l}_2 \\ 0 & 0 & -\bar{m}_2 g\bar{l}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{3P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_1 b_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_2 b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} \delta_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

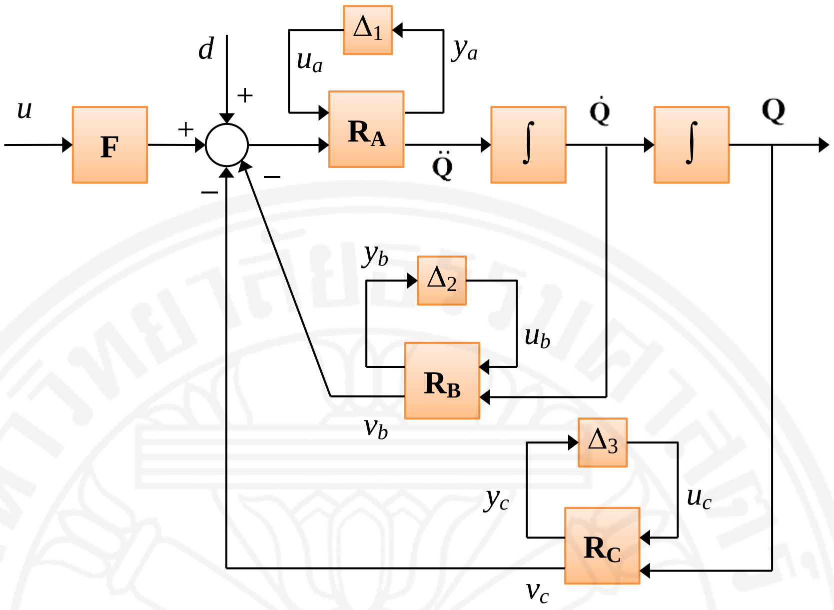
โดยเขียนให้อยู่ในรูปของ upper LFT คือ

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_3 &= F_u(\mathbf{R}_C, \Delta_3) \\ &= \mathbf{R}_{C_{22}} + \mathbf{R}_{C_{21}}\Delta_3\left(I_3 - \mathbf{R}_{C_{11}}\Delta_3\right)^{-1}\mathbf{R}_{C_{12}}\end{aligned} \tag{4.33}$$

โดยที่

$$\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{C_{11}} & \mathbf{R}_{C_{12}} \\ \mathbf{R}_{C_{21}} & \mathbf{R}_{C_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_3 \\ \mathbf{A}_{3P} & \bar{\mathbf{A}}_3 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

ดังนั้นจากสมการความไม่แน่นอนของระบบข้างต้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของบล็อกไดอะแกรมใหม่ได้ดังนี้



ภาพที่ 4.4 บล็อกไดอะแกรมของระบบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกัน
และมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถแบบรวมสมการความไม่แน่นอน

และจากบล็อกไดอะแกรมข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการการเคลื่อนที่ของชุดทดลองได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} \\ -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ \mathbf{F}u + d - v_b - v_c \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

$$\begin{bmatrix} y_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & I_3 \\ \mathbf{A}_{2P} & \bar{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

$$\begin{bmatrix} y_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3\times 3} & I_3 \\ \mathbf{A}_{3P} & \bar{\mathbf{A}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

$$u_a = \Delta_1 y_a \tag{4.38}$$

$$u_b = \Delta_2 y_b \tag{4.39}$$

$$u_c = \Delta_3 y_c \tag{4.40}$$

จากระบบของชุดทดลองดังกล่าวพบว่า ตัวแปรสเตทคือ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งถูกกำหนดโดย $x_1 = x$, $x_2 = \theta_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{x}$, $x_5 = \dot{\theta}_1$ และ $x_6 = \dot{\theta}_2$ หรืออาจเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.41}$$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_4 & \dot{x}_5 & \dot{x}_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.42}$$

และสมการเอาท์พุทของระบบคือ

$$y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.43}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (4.35, 4.36 และ 4.37) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{Q}} \tag{4.44}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P}u_a + \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{F}u + \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}d - \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}v_b - \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}v_c \tag{4.45}$$

$$y_a = -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P}u_a + \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{F}u + \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}d - \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}v_b - \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}v_c \tag{4.46}$$

$$y_b = \dot{\mathbf{Q}} \tag{4.47}$$

$$y_c = \mathbf{Q} \tag{4.48}$$

$$v_b = \mathbf{A}_{2P}u_b + \bar{\mathbf{A}}_2\dot{\mathbf{Q}} \tag{4.49}$$

$$v_c = \mathbf{A}_{3P}u_c + \bar{\mathbf{A}}_3\mathbf{Q} \tag{4.50}$$

จากนั้นทำการกำจัดตัวแปร $v_b,\ v_c$ ในสมการที่ (4.49) และ (4.50) และจัดเรียงสมการข้างต้นทั้งหมดใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \hline y_a \\ y_b \\ y_c \\ \hline y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_3 & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_2 & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{2P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{3P} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{F} \\ \hline -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_3 & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_2 & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{2P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{3P} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{F} \\ 0_{3\times3} & I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ \hline I_3 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \hline u_a \\ u_b \\ u_c \\ \hline d \\ u \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

และ

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

เพราะฉะนั้นระบบเปิดของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถแบบตามที่ระบุ (Nominal Plant) หรือ G_{pend} คือ

$$\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \\ y \end{bmatrix} = G_{pend} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ d \\ u \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

ซึ่งประกอบด้วยสัญญาณอินพุท 13 เส้น สัญญาณเอาท์พุท 12 เส้น และมีตัวแปรสเตท 6 ตัว หรือแสดงในรูปแบบสมการสเตทสเปซได้ดังนี้

$$G_{pend} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{4.54}$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_3 \\ -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_3 & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{2P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{3P} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_3 & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_2 \\ 0_{3\times3} & I_3 \\ I_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{1P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{2P} & -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{A}_{3P} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} & \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\mathbf{F} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = 0_{3\times9}, \quad D_{22} = 0_{3\times4}$$

และเมื่อทำการแทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆในสมการที่ (4.54) ได้ดังนี้

$$G_{pend} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{4.55}$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15.0769 & 1.5077 & -0.1795 & 0 & 0 \\ 0 & 125.6410 & -3.7692 & -0.3846 & 0 & 0 \\ 0 & -150.7692 & 33.9231 & 0.1282 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2692 & -0.2308 & 0.0769 & -0.0179 & 0 & 0 & 0 & -0.2308 & 0.0769 \\ -0.5769 & -1.9231 & 2.3077 & -0.0385 & 0 & 0 & 0 & -1.9231 & 2.3077 \\ 0.1923 & 2.3077 & -5.7692 & 0.0128 & 0 & 0 & 0 & 2.3077 & -5.7692 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7949 & 3.8462 & -1.2821 & 1.7949 \\ 3.8462 & 32.0513 & -38.4615 & 3.8462 \\ -1.2821 & -38.4615 & 96.1538 & -1.2821 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 15.0769 & 1.5077 & -0.1795 & 0 & 0 \\ 0 & 125.6410 & -3.7692 & -0.3846 & 0 & 0 \\ 0 & -150.7692 & 33.9231 & 0.1282 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} -0.2692 & -0.2308 & 0.0769 & -0.0179 & 0 & 0 & 0 & -0.2308 & 0.0769 \\ -0.5769 & -1.9231 & 2.3077 & -0.0385 & 0 & 0 & 0 & -1.9231 & 2.3077 \\ 0.1923 & 2.3077 & -5.7692 & 0.0128 & 0 & 0 & 0 & 2.3077 & -5.7692 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 1.7949 & 3.8462 & -1.2821 & 1.7949 \\ 3.8462 & 32.0513 & -38.4615 & 3.8462 \\ -1.2821 & -38.4615 & 96.1538 & -1.2821 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

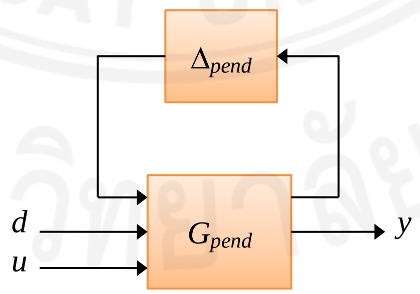
$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ของสัญญาณอินพุท-เอาท์พุทของสมการระบบความไม่แน่นอนและสมการระบบชุดทดลองนี้สามารถอธิบายโดยใช้วิธี upper-LFT ดังนี้

$$y = F_u(G_{pend}, \Delta_{pend})\begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

ซึ่ง Δ_{pend} เป็นเมตริกซ์ทแยงมุมดังสมการที่ (4.58) หรือแสดงดังภาพที่ 4.5

$$\Delta_{pend} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 \end{bmatrix} \tag{4.58}$$



ภาพที่ 4.5 บล็อกไดอะแกรม LFT ของระบบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถแบบตามที่ระบุ และสมการระบบความไม่แน่นอน

4.4 การออกแบบระบบควบคุม H∞

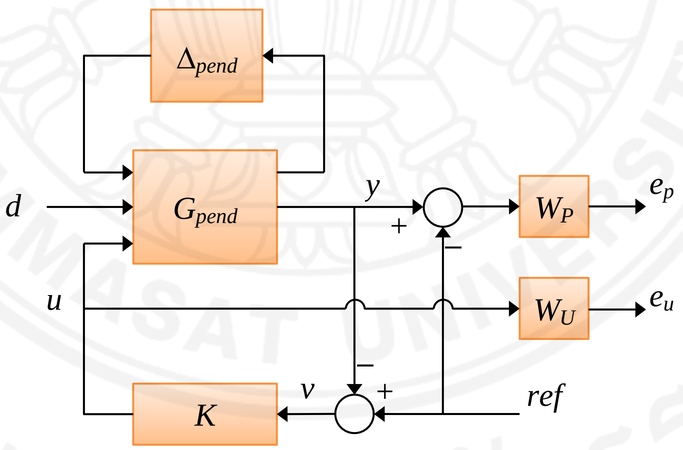
ในการการออกแบบระบบควบคุมให้มีความสามารถสร้างเสถียรภาพให้แก่ระบบของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ และยังจะต้องพิจารณาเรื่องประสิทธิภาพของชุดควบคุมระบบดังนี้

$$\left\| \begin{bmatrix} W_P S \\ W_U KS \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \tag{4.59}$$

โดยที่
$$S = (I + GK)^{-1}$$

4.4.1 การจัดเตรียมระบบก่อนการหาตัวควบคุม H∞

จากภาพที่ 4.6 แสดงการเชื่อมต่อกันทั้งระบบ (System interconnected) ที่ประกอบด้วย nominal plant (G_{pend}) เมตริกซ์ของสมการความไม่แน่นอน (Δ_{pend}) ตัวถ่วงประสิทธิภาพ (W_P, W_U) และตัวควบคุม (K)



ภาพที่ 4.6 บล็อกไดอะแกรมของระบบปิดของชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกัน
และมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ

สำหรับการออกแบบระบบควบคุมแบบ H∞ ต้องทำการเปลี่ยนรูปแบบของระบบซึ่งได้แสดงในภาพที่ 4.6 ให้อยู่ในรูปแบบระบบทั่วไป P แสดงในภาพที่ 4.7 หรืออาจเรียกได้ว่าเป็น การเชื่อมต่อระบบเปิดของชุดทดลอง (Open-loop system interconnected) เพื่อใช้สำหรับการคำนวณหาค่าตัวควบคุมแบบ H∞ เท่านั้น แต่สำหรับการหาผลตอบสนองที่เกิดขึ้นจากระบบควบคุม

แบบ H_∞ จะต้องทำการเชื่อมต่อระบบดังภาพที่ 4.8 หรืออาจเรียกได้ว่าเป็น การเชื่อมต่อระบบปิด (Closed-loop system interconnected)

และจากที่กล่าวข้างต้นระบบควบคุมแบบ H_∞ นั้นจะพิจารณาสำหรับชุดทดลองที่มีค่าพารามิเตอร์ตามที่ระบุ (Nominal plant) เท่านั้น ดังนั้นจะต้องทำการตัดเมตริกซ์ของสมการความไม่แน่นอนออกจากระบบที่นำมาพิจารณา ($pertin\{1-9\}$ และ $pertout\{1-9\}$) ดังนั้นระบบสำหรับการหาค่าตัวควบคุมแบบ H_∞ เพื่อที่จะหาค่าตัวควบคุม K ที่ทำให้ $\left\|F_l\left(P,K\right)\right\|_\infty$ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งได้แสดงดังภาพที่ 4.9 โดยที่ H_{pend} คือระบบทั่วไปของชุดทดลอง ดังนั้น $F_l\left(H_{pend},K\right)$ คือระบบปิดของเมตริกซ์ถ่ายโอน (Transfer matrix) จาก จุดอ้างอิง (ref) และสัญญาณรบกวนภายนอก ($dist$) จนถึงค่าความผิดพลาด (e_p , e_u)

4.4.2 การหาค่าตัวควบคุมแบบ H_∞ ด้วย MATLAB

โดยการหาสมการของตัวควบคุมระบบแบบ H_∞ ได้นำชุดเครื่องมือ Robust control ในโปรแกรม MATLAB มาใช้เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการหาคำตอบ ในที่นี้ฟังก์ชัน hinfsyn() เป็นฟังก์ชันที่ช่วยในการหาตัวควบคุมแบบ H_∞ และค่าของแกมมา (γ) ดังกล่าว ซึ่งฟังก์ชันนี้มีพารามิเตอร์ที่จำเป็นดังนี้

1) จำนวนของตัวแปรที่สามารถตรวจวัดได้ (nmeas = 3)
2) จำนวนของสัญญาณควบคุม (ncons = 1)
3) ค่าแกมมาที่น้อยที่สุด (gmin = 0)
4) ค่าแกมมาที่มากที่สุด (gmax = 0)
5) ค่าความเคลื่อนที่ยอมรับได้ (tol = 0.001)

หลังจากที่ได้ทำการปรับแต่งค่าของตัวถ่วงประสิทธิภาพด้วยวิธีลองผิดลองถูก (trial and error) ตัวถ่วงประสิทธิภาพสามารถเขียนได้ดังนี้

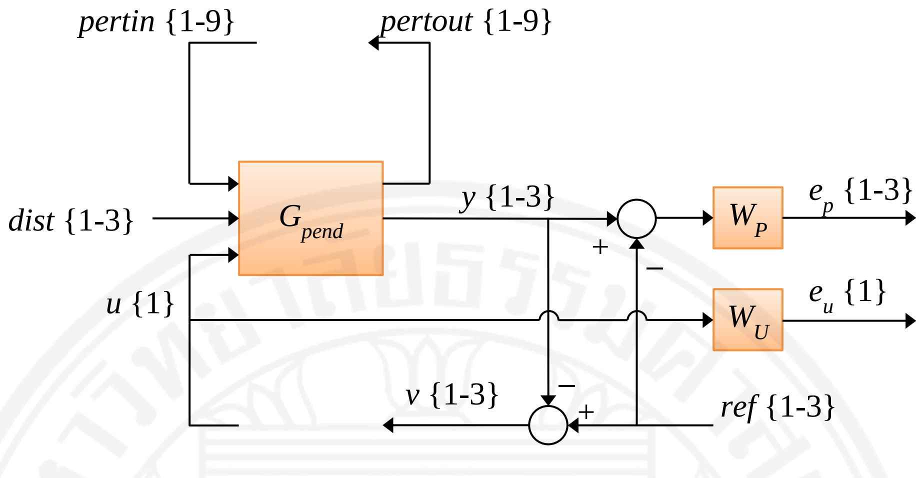
$$W_P(s) = \begin{bmatrix} w_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & w_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & w_{p3} \end{bmatrix} \qquad (4.58)$$

โดยที่

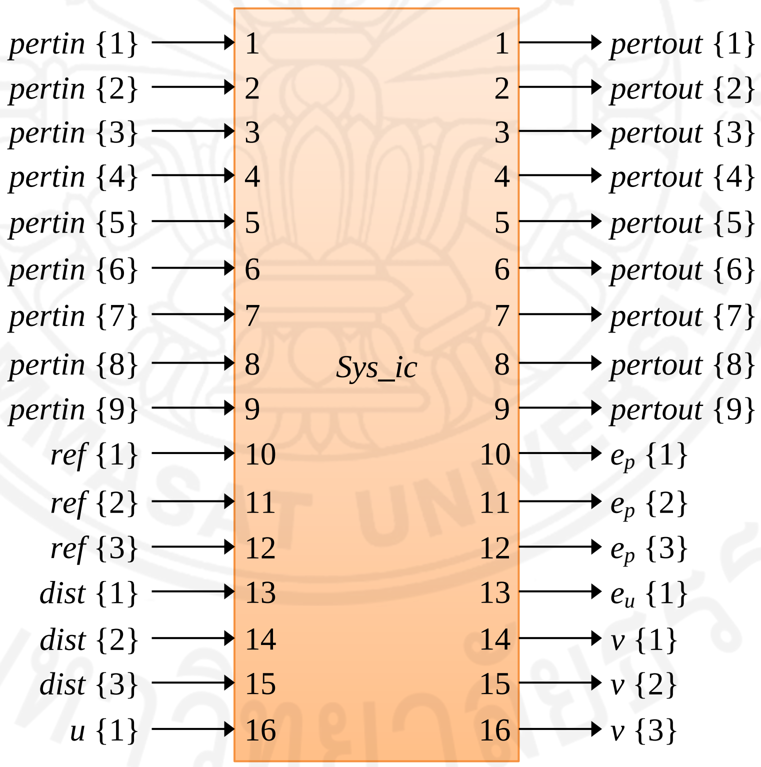
$$w_{p1}(s) = \frac{5}{s+40}, \qquad w_{p2}(s) = \frac{3}{s+40}, \qquad w_{p3}(s) = \frac{3}{s+40}$$

และ

$$W_U(s) = 10^{-3} \qquad (4.59)$$



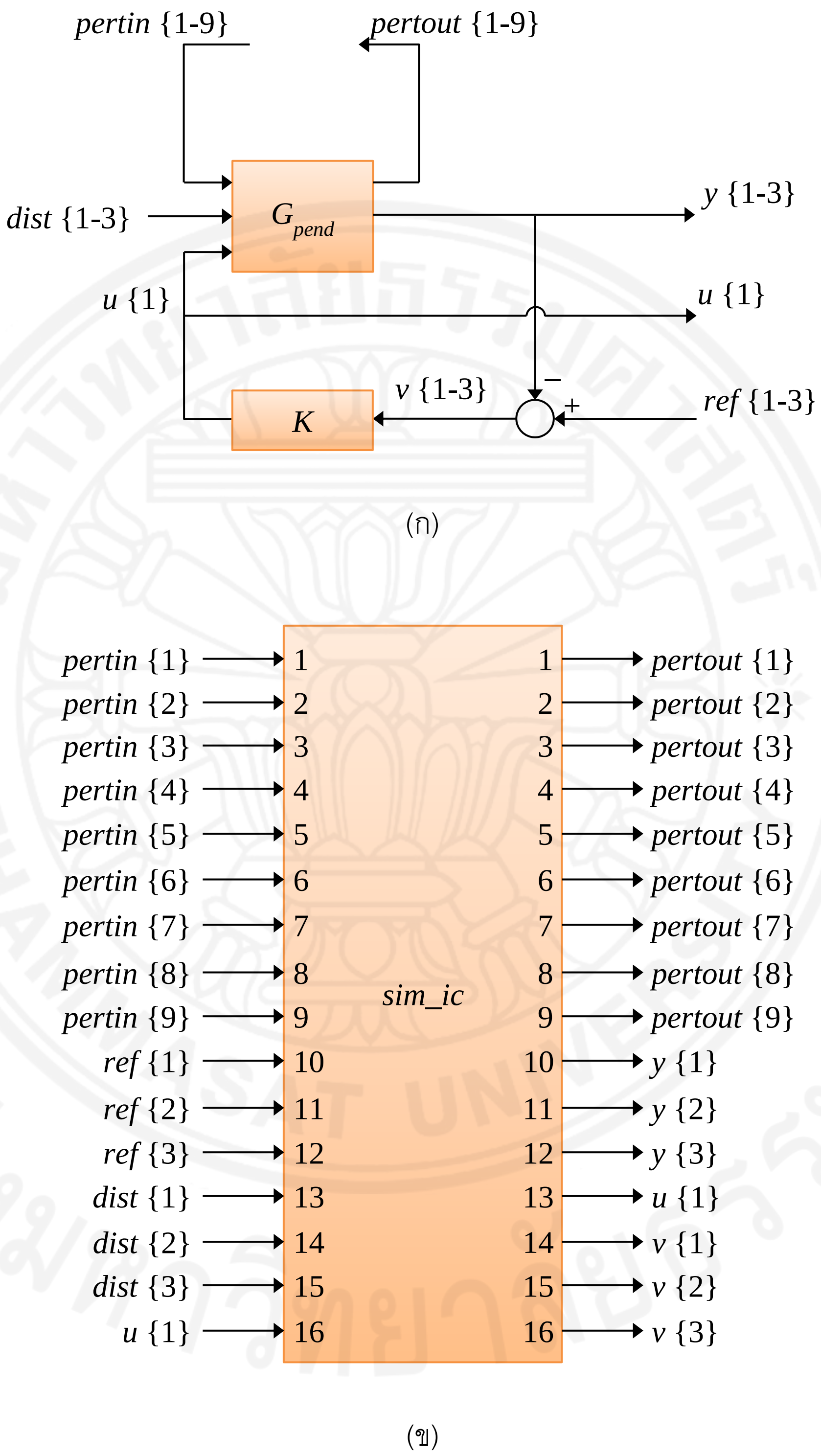
(ก)



(ข)

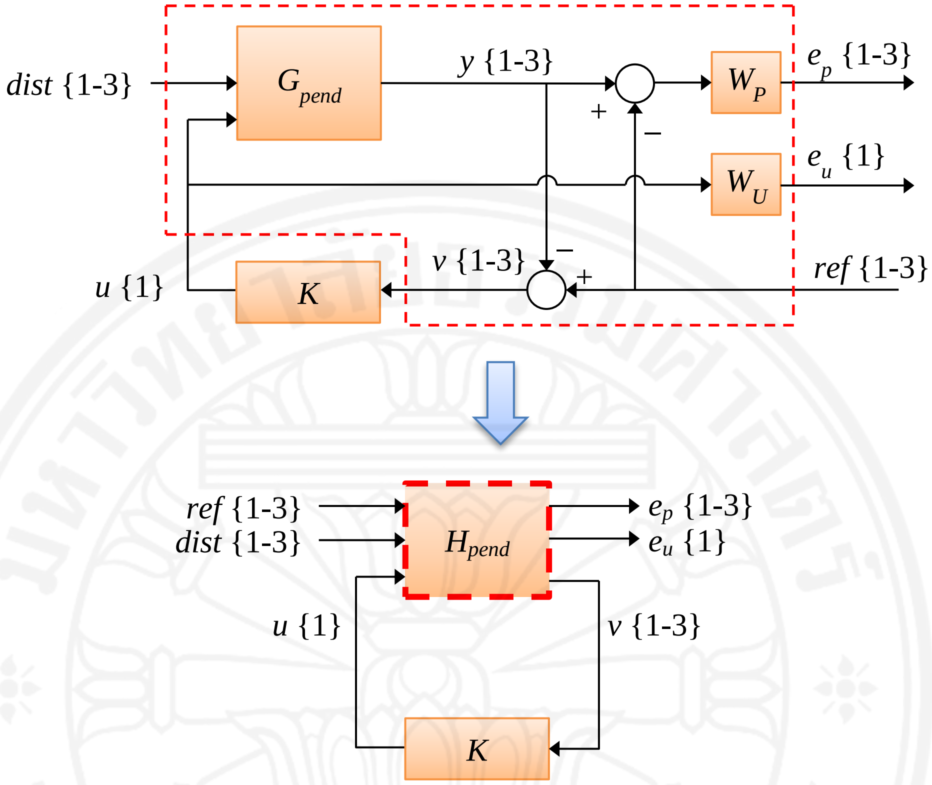
ภาพที่ 4.7 การเชื่อมต่อระบบเปิดของชุดทดลอง

(ก) แบบบล็อกไดอะแกรม (ข) แบบแผนภาพเค้าร่าง



ภาพที่ 4.8 การเชื่อมต่อระบบปิดของชุดทดลอง

(ก) แบบบล็อกไดอะแกรม (ข) แบบแผนภาพเค้าร่าง



ภาพที่ 4.9 บล็อกไดอะแกรมสำหรับระบบทั่วไปของระบบสำหรับการหาค่าตัวควบคุม H_∞

ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากฟังก์ชัน hinfsyn() โดยใช้ค่าพารามิเตอร์และค่าถ่วงประสิทธิภาพข้างต้นเป็นดังนี้

```
Test bounds:      0.0000 <  gamma  <=     10.0000

  gamma    hamx_eig  xinf_eig  hamy_eig   yinf_eig   nrho_xy   p/f
  10.000   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    0.0117    p
   5.000   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    0.0470    p
   2.500   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    0.1910    p
   1.250   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    0.8169    p
   0.625   3.0e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    4.5466#   f
   1.125   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    1.0310#   f
   1.171   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    0.9427    p
   1.140   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    1.0007#   f
   1.146   3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    0.9887    p
```

```
   1.141  3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    0.9983    p
   1.140  3.1e+000  5.5e-004  7.5e-001   0.0e+000    1.0000    p

Gamma value achieved:     1.1405
```

และฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมแบบ H$_\infty$ (K) คือ

$$K(s) = \begin{bmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \\ k_3(s) \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

โดยที่

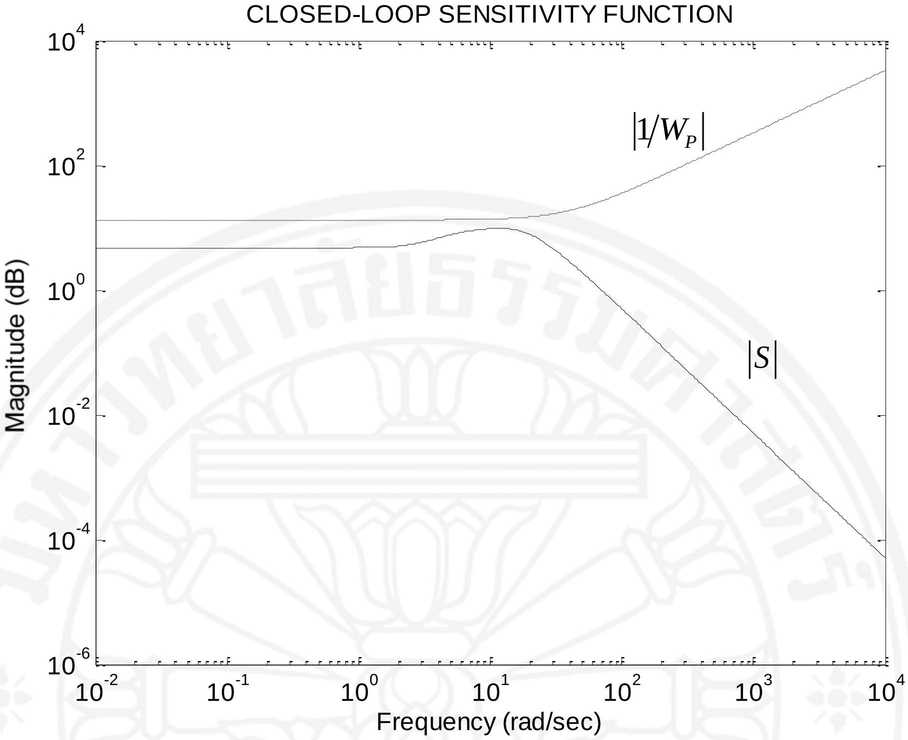
$$k_1(s) = \frac{1.097e^{10}s^6 + 7.991e^{11}s^5 + 1.855e^{13}s^4 + 2.151e^{14}s^3 + 1.361e^{15}s^2 + 3.699e^{15}s + 1.654e^{15}}{s^7 + 2.985e^{8}s^6 + 3.677e^{10}s^5 + 1.12e^{12}s^4 + 9.102e^{12}s^3 + 2.045e^{14}s^2 + 1.824e^{15}s + 2.786e^{15}}$$

$$k_2(s) = \frac{1.15e^{11}s^6 + 7.327e^{12}s^5 + 1.301e^{14}s^4 + 9.196e^{14}s^3 + 2.845e^{15}s^2 + 3.16e^{15}s + 1.68e^{15}}{s^7 + 2.985e^{8}s^6 + 3.677e^{10}s^5 + 1.12e^{12}s^4 + 9.102e^{12}s^3 + 2.045e^{14}s^2 + 1.824e^{15}s + 2.786e^{15}}$$

$$k_3(s) = \frac{-3.202e^{11}s^6 - 2.124e^{13}s^5 - 4.133e^{14}s^4 - 3.293e^{15}s^3 - 1.09e^{16}s^2 - 1.274e^{16}s - 7.213e^{15}}{s^7 + 2.985e^{8}s^6 + 3.677e^{10}s^5 + 1.12e^{12}s^4 + 9.102e^{12}s^3 + 2.045e^{14}s^2 + 1.824e^{15}s + 2.786e^{15}}$$

ดังนั้นพิจารณาระบบปิดของชุดทดลองที่ใช้ตัวควบคุมแบบ H$_\infty$ ข้างต้นพบว่าค่าโพลของระบบได้แก่ −2.985e+8, −12.692 ± 11.709i, −11.7794 ± 4.3292i, −0.74985 ± 0.73752i, −9.7671, −6.6269 ± 2.1011i, −4.733 ± 0.72446i, −40.422, −40 และ −40

และจากค่าโพลข้างต้นพบว่าไม่มีโพลอยู่ทางด้านขวาของระนาบเอส และจากภาพที่ 4.10 แสดงให้เห็นว่าตัวถ่วงประสิทธิภาพ ($1/W_P$) วาดอยู่ด้านบนของฟังก์ชันความอ่อนไหวของระบบชุดทดลองที่เป็นระบบปิด ซึ่งเป็นไปตามข้อกำหนดของการออกแบบระบบควบคุมที่ว่า $\|W_P S\|_\infty < 1$ ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าระบบควบคุมแบบ H$_\infty$ สามารถสร้างเสถียรภาพและประสิทธิภาพให้กับระบบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถนี้ได้



ภาพที่ 4.10 เปรียบเทียบตัวถ่วงประสิทธิภาพและฟังก์ชันความอ่อนไหว

4.5 การประยุกต์ใช้งานบนโปรแกรม LABVIEW

ในการนำระบบควบคุมแบบ H_∞ มาใช้ในโปรแกรม LABVIEW จำเป็นต้องสร้างแบบจำลองของชุดทดลองบนโปรแกรม LABVIEW ดังภาพที่ 4.11 โดยให้เป็นไปตามการเชื่อมต่อระบบปิดของชุดทดลองที่ได้แสดงไว้ตามภาพที่ 4.8

โดยที่ 1) บล็อก Generalized Plant (G_Pend) ใช้ค่า G_{pend} จากสมการที่ (4.55)

2) บล็อก Controller ใช้ค่า $K(s)$ จากสมการที่ (4.60)

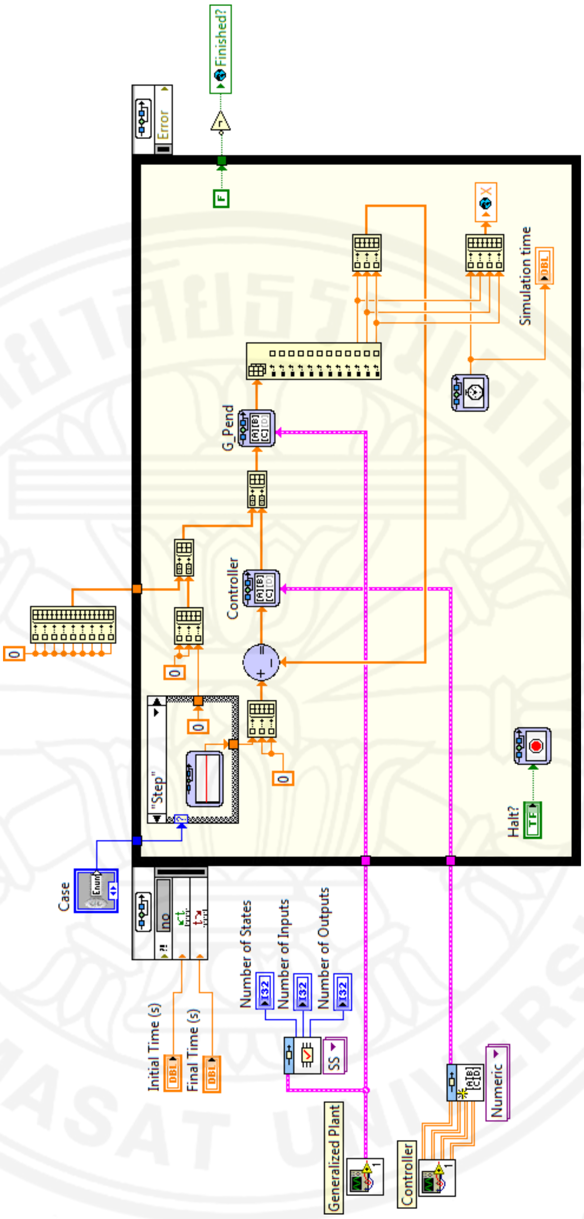
3) เมตริกซ์ค่าความไม่แน่นอน ($pertin\{1-9\}$) มีค่าเท่ากับศูนย์

4) เวลาเริ่มต้น (Initial time) มีค่าเท่ากับศูนย์วินาที และเวลาสุดท้าย (Final time) มีค่าเท่ากับ 10 วินาที

5) กำหนดให้ x1 คือ การเคลื่อนที่ของตัวรถ (x) หน่วยเป็นเมตร

x2 คือ การเคลื่อนที่ของก้านเพนดูลัมที่ 1 (θ_1) หน่วยเป็นเรเดียน

x3 คือ การเคลื่อนที่ของก้านเพนดูลัมที่ 2 (θ_2) หน่วยเป็นเรเดียน



ภาพที่ 4.11 แบบจำลองชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกัน
และมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถบนโปรแกรม LABVIEW

และหลังจากสร้างแบบจำลองของชุดทดลองแล้ว ทำการทดสอบระบบควบคุมโดยแบ่งเป็น 2 แบบดังนี้

(1) แบบคงค่า (Regulator)

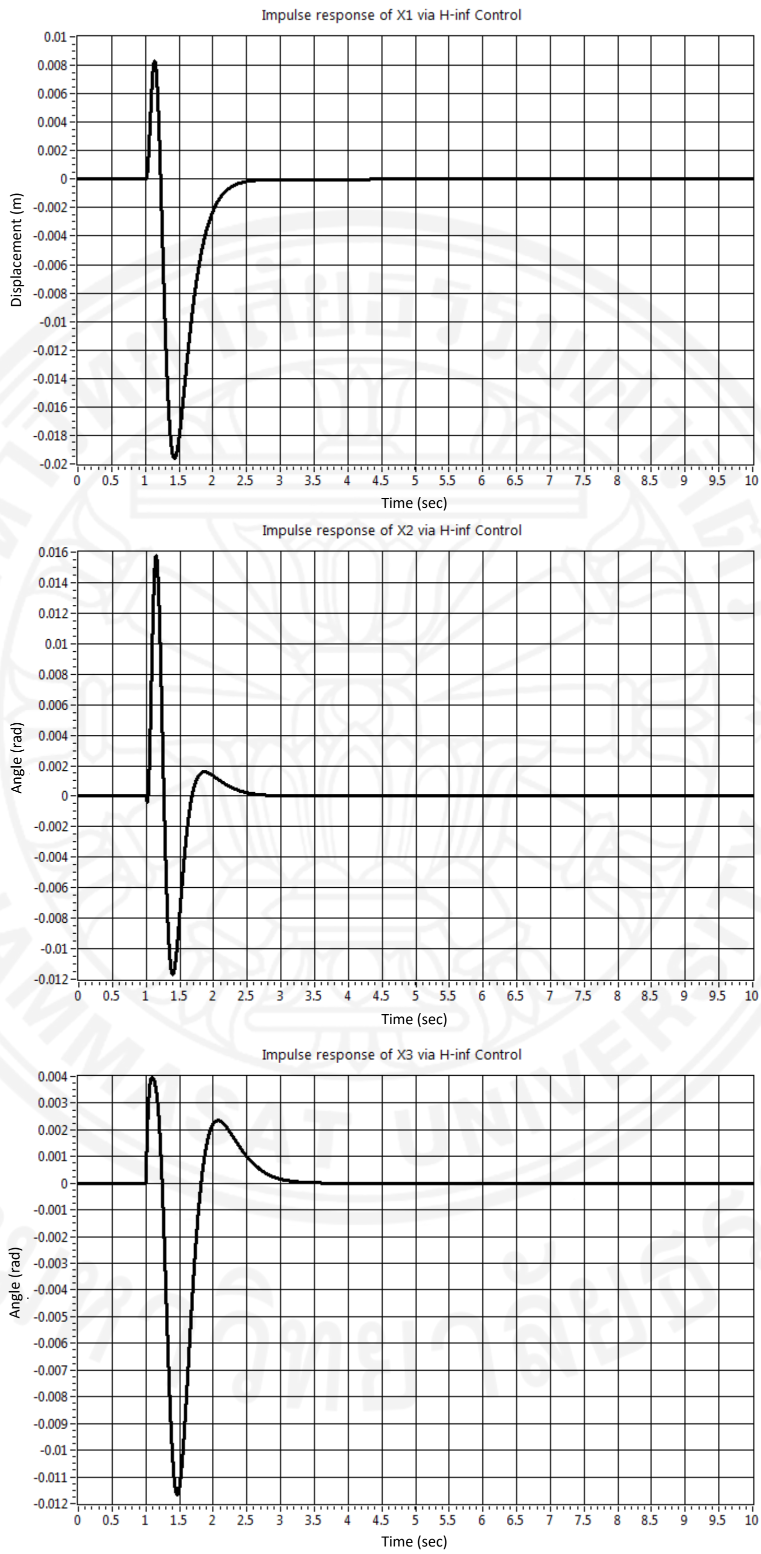
โดยทำการป้อนสัญญาณอิมพัลส์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย (Unit impulse function) เป็นสัญญาณรบกวนภายนอกที่มากระทำต่อระบบ ณ เวลาที่ 1 วินาที

และผลตอบสนองของระบบควบคุม H_∞ แบบคงค่าได้แสดงดังภาพที่ 4.12 พบว่าระบบควบคุม H_∞ ที่สร้างบนโปรแกรม LABVIEW สามารถควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถได้ และระบบควบคุม H_∞ สามารถทำให้การแกว่งตัวของก้านเพนดูลัมทั้งสองก้าน (θ_1,θ_2) ดังนี้ $|\theta_1|$ = 0.015 เรเดียน $|\theta_2|$ = 0.012 เรเดียน และค่า settling time ของการเคลื่อนที่ของตัวรถ (x) ที่เกิดขึ้นมีค่าประมาณ 3 วินาที (ซึ่งน้อยกว่า 5 วินาที) ซึ่งเป็นไปตามข้อกำหนดการออกแบบระบบควบคุมที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ($|\theta_1|$, $|\theta_2|$ < 0.05 เรเดียน)

(2) แบบปรับค่าตามจุดอ้างอิง (Reference tracking)

โดยทำการป้อนสัญญาณแบบขั้นที่มีขนาดหนึ่งหน่วย (Unit step function) เป็นสัญญาณคำสั่งมากระทำต่อระบบ ณ เวลาที่ 1 วินาที

และผลตอบสนองของระบบควบคุม H_∞ แบบปรับค่าตามจุดอ้างอิงได้แสดงดังภาพที่ 4.13 พบว่าระบบควบคุม H_∞ ที่สร้างบนโปรแกรม LABVIEW สามารถควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถได้ แต่ไม่สามารถเป็นไปตามข้อกำหนดการออกแบบระบบควบคุมดังนี้ ค่า settling time ของการเคลื่อนที่ของตัวรถ (x) ที่เกิดขึ้นมีค่าประมาณ 6 วินาที (ซึ่งมากกว่า 5 วินาที) และการแกว่งตัวของก้านเพนดูลัมทั้งสองก้านมีค่ามากกว่า 0.05 เรเดียน ($|\theta_1|$, $|\theta_2|$ > 0.05 เรเดียน) ดังนี้ $|\theta_1|$ = 0.13 เรเดียน $|\theta_2|$ = 0.22 เรเดียน



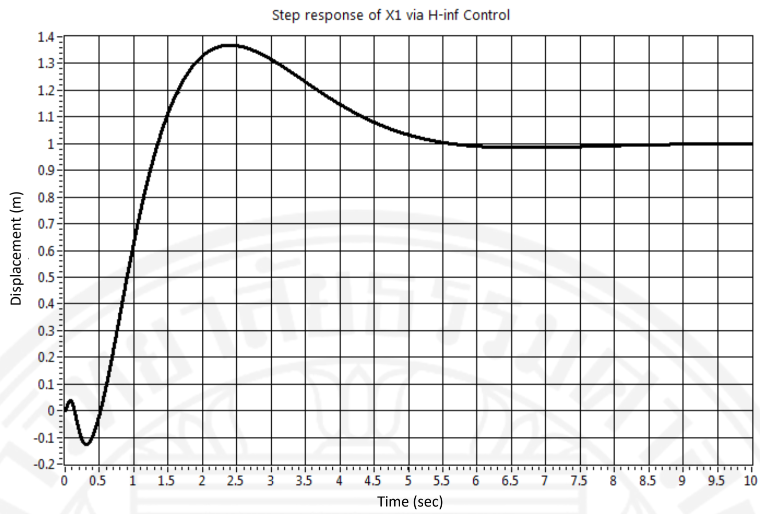
(ก)

(ข)

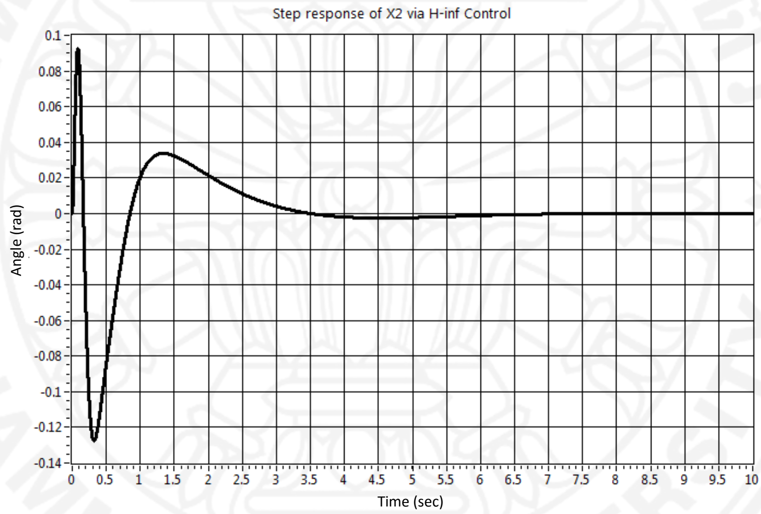
(ค)

ภาพที่ 4.12 ผลตอบสนองของระบบควบคุม H_∞ แบบคงค่า

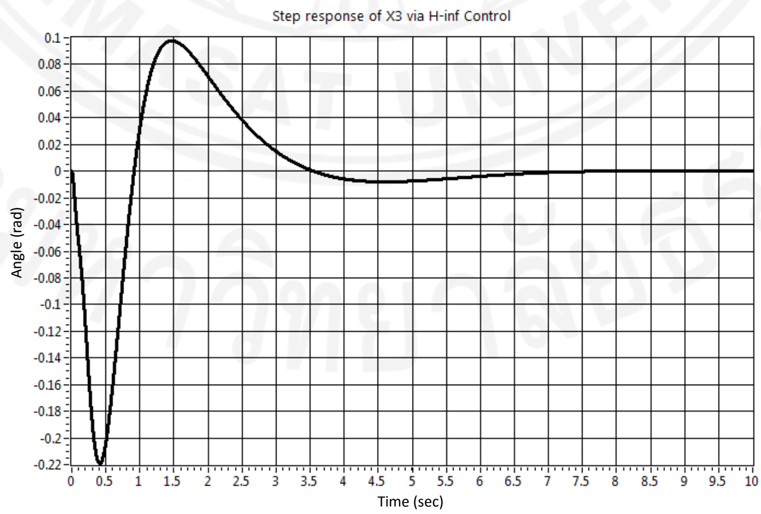
(ก) ตัวรถ (ข) ก้านเพนดูลัมที่ 1 (ค) ก้านเพนดูลัมที่ 2



(ก)



(ข)



(ค)

ภาพที่ 4.13 ผลตอบสนองของระบบควบคุม H_{∞} แบบปรับค่าตามจุดอ้างอิง

(ก) ตัวรถ (ข) ก้านเพนดูลัมที่ 1 (ค) ก้านเพนดูลัมที่ 2

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การการศึกษาระบบควบคุมทางวิศวกรรมนั้นจะประกอบไปด้วย 2 ส่วนหลักได้แก่ ระบบ (Plant) และชุดควบคุม (Controller) โดยระบบ (Plant) ที่ใช้ในการศึกษานั้นมีมากมายหลายแบบ ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ นั้นสามารถเป็นโจทย์ที่ดีสาหรับการศึกษาระบบควบคุมทางวิศวกรรม เพราะชุดทดลองนั้นเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น และเป็นระบบที่มีจานวนตัวแปรเอาท์พุตมากกว่าตัวแปรอินพุต (Under-Actuated system) รายงานนี้นำเสนอการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น และการออกแบบระบบควบคุมสำหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่และแบบสองก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ

ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ได้ทำการเปรียบเทียบระบบควบคุมแบบต่างๆ ได้แก่ ระบบควบคุมพีไอดี-พีไอดี ระบบควบคุมพีดี-พีไอดี ระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับแบบกำลังสองเชิงเส้น และระบบควบคุมแบบสถานะป้อนกลับแบบกำลังสองเชิงเส้นและตัวกระทำอินทิกรัล และเมื่อนำผลตอบสนองของระบบมาเปรียบเทียบกันพบว่า ระบบควบคุมต่างๆ นั้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบจุดหมุนเคลื่อนที่ได้เป็นอย่างดี ซึ่งในแต่ละวิธีการอาจจะมีความยุ่งยากซับซ้อนแตกต่างกันออกไป โดยที่ระบบควบคุมแบบกำลังสองเชิงเส้นจะทำให้ค่า settling time ของระบบมีค่าน้อยกว่าระบบควบคุมพีไอดี และ ค่า overshoot ของระบบมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับระบบควบคุมแบบพีไอดี ซึ่งทำให้ระบบเข้าสู่สภาวะคงตัวเร็วขึ้นและระบบเกิดการแกว่งน้อยลง

ชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถได้ทำการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น โดยเพิ่มการพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของค่าพารามิเตอร์ในระบบด้วย การออกแบบระบบควบคุมทางทฤษฎีสาหรับชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ ด้วยวิธีของระบบควบคุม H_∞ ซึ่งในการหาตัวควบคุมระบบแบบ H_∞ นั้นใช้ชุดเครื่องมือ Robust Control ในโปรแกรม MATLAB หลังจากนั้นนำตัวควบคุมที่ได้ มาประยุกต์ใช้กับชุดทดลองที่สร้างขึ้นในโปรแกรม LabVIEW โดยทำการทดสอบระบบควบคุมโดยแบ่งเป็น 2 แบบ คือ แบบคงค่า (Regulator) และแบบปรับค่าตามจุดอ้างอิง (Reference tracking) และผลตอบสนองที่ได้แสดงให้เห็นว่าระบบควบคุม H_∞ ที่สร้างบนโปรแกรม LabVIEW นั้นสามารถควบคุมชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านต่อกันและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถได้ทั้ง แบบคงค่าและปรับค่าตามจุดอ้างอิง ซึ่งระบบควบคุม H_∞ แบบคงค่าสามารถทำให้การแกว่งตัวของก้านเพนดูลัมทั้งสองก้าน (θ_1, θ_2) เป็นไปตามข้อกำหนดการออกแบบระบบควบคุมที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น $(\theta_1 <$

0.05 และ θ_2 < 0.05 เรเดียน) แต่เมื่อพิจารณาที่ระบบควบคุม H_∞ แบบปรับค่าตามจุดอ้างอิงนั้น พบว่าระบบควบคุม H_∞ ไม่สามารถทำให้ผลตอบสนองของระบบนั้นเป็นไปตามข้อกำหนดการออกแบบระบบควบคุมได้ เนื่องจากค่า settling time ของการเคลื่อนที่ของตัวรถ (x) ที่เกิดขึ้นมีค่าประมาณ 6 วินาที (ซึ่งมากกว่า 5 วินาที) และการแกว่งตัวของก้านเพนดูลัมทั้งสองก้านมีค่ามากกว่า 5 เรเดียน (θ_1 > 0.05 และ θ_2 > 0.05 เรเดียน)

จากผลการทดสอบชุดทดลองลูกตุ้มผกผันแบบสองก้านและมีจุดหมุนเคลื่อนที่บนตัวรถ พบว่าระบบควบคุมแบบ H_∞ ที่ได้ออกแบบทางทฤษฎีนั้นสามารถสร้างเสถียรภาพให้กับชุดทดลองได้ในระดับหนึ่งเท่านั้น โดยสามารถเพิ่มประสิทธิภาพให้กับระบบควบคุมแบบ H_∞ นี้ด้วยการหาค่าระบบควบคุม H_∞ ด้วยวิธี Loop-shaping หรือการพิจารณาวิธี μ -Synthesis เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในเรื่องความคงทน (Robust performance) ให้กับชุดทดลอง

รายการอ้างอิง

1. Mori, Nishihara, Hiroyoshi, Furuta, Katsuhisa. Control of Unstable Mechanical System. Control of Pendulum. International Journal of Control. 1976;23:673-92.
2. Zames G. Feedback and optimal sensitivity model reference transformation multiplicative semi norms and approximate references. IEEE Transaction On Automatic Control AC-23. 1981;301-2.
3. Doyle JC, Glover K, Pramod K, Francis BA. State-Space Solutions to Standard H2 and H-infinity Control Problems. IEEE Transactions on Automatic control. 1989;34:831-47.
4. Stimac AK. Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum. [dissertation]. Cambridge (MA): Massachusetts Institute of Technology; 1999.
5. Stoorvogel A, Arbor A. The H-infinity control problem: a state space approach. [dissertation]. MI: University of Michigan; 2000.
6. Yi J, Yubazaki N, Hirota K. Stabilization control of series-type double inverted pendulum systems using the SIRMs dynamically connected fuzzy inference model. Artificial Intelligence in Engineering. 2001;15:297-308.
7. Ogata K. Modern Control Engineering. 4th ed. NJ: Prentice Hall; 2002.
8. Demirci M. Design of Feedback Controllers for Linear System with applications to Control of A Double-Inverted Pendulum. International Journal of Computational Cognition. 2003;2:65-84.
9. Bogdanov A. Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart. Technical Report CSE-04-006. 2004.
10. Lam J. Control of an Inverted Pendulum. [internet]. 2004. Available from: http://control.ee.ethz.ch/~rsmith/.
11. Gu DW, Petkrov PH, Konstantinov MH. Robust Control Design with MATLAB. London:Springer; 2005.
12. Hoover RC. Nonlinear Control of Double and Single Inverted Pendulum on a Cart. [dissertation]. ID: Idaho State University; 2005.

13. Skogestad S, Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control Analysis and design. NJ: Wiley; 2005.
14. Åström KJ, Murray RM. Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. NJ: Princenton; 2008.
15. Lengare MJ, Chile RH, Waghmare LM, Parmer B. Auto Tuning of PID Controller for MIMO Processes. World Academy of Science Engineering and Technology. 2008;45:305-8.
16. Kappa B. State Space Control Design of a Dual Inverted Pendulum. [dissertation]. Portland (OR): Portland state University; 2009.
17. Nasir ANK, Raja Ismail RMT, Ahmad MA. Performance Comparison between Sliding Mode Control (SMC) and PD-PID Controllers for a Nonlinear Inverted Pendulum System. World Academy of Science Engineering and Technology. 2010;71:122-7.
18. Razzaghi K, Jalali AA. A new approach on stabilization control of an Inverted Pendulum, using PID controller. Advanced Materials Research. 2011;403-408:4674-80.
19. Albahkali TA. An Impulse-Momentum Approach to Swing-Up Control of Double Inverted Pendulum on a Cart. World Academy of Science Engineering and Technology. 2011;8:762-8.
20. Jadlovska S, Sarnovsky J. Classical Double Inverted Pendulum – a Complex Overview of a system. IEEE 10th International Symposium, Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMI). 2012;103-8.
21. Bansel A, Sharma V. Design and Analysis of Robust H-infinity Controller. National Conference on Emerging Trends in Electrical, Instrumentation & Communication Engineering; 2013.
22. Kanade SP, Mathew AT. 2 DOF H- Infinity Loop Shaping Robust Control for Rocket Attitude Stabilization. International Journal of Aerospace Sciences. 2013;2:71-91.
23. Mayphew C. Robust Control of an Inverted Pendulum. [internet]. Available from: http://www.ece.ucsb.edu/

24. Alia MAK, Zalata MKA. A Closed-loop Temperature Control system by Utilizing a LabVIEW Custom-Design PID Controller. [dissertation]. Amman: Al-Balqa' Applied University.

25. สมหวัง อริสริยวงศ์. วิธีการปรับค่าเกนตัวควบคุมแบบ PID กรณีไม่ทราบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการ (ตอนที่ 1). [อินเทอร์เน็ต]. จาก http://www.thailandindustry.com/guru/view.php?id=10522&section=9.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นายสิทธิโชค พัลลับโพธิ์
วันเดือนปีเกิด	25 ตุลาคม 2523
ตำแหน่ง	วิศวกรเครื่องกล บริษัท เอ็มอีเอส มิตรโปรเจคเซอร์วิสเซส จำกัด
ผลงานทางวิชาการ	Punlabpho S, Jearsiripongkul T. Control System for Double Inverted Pendulum on a Cart by H-Infinity Controller. International Review of Automatic Control (IREACO). 2015;8:300-6.
ประสบการณ์ทำงาน	2558 วิศวกรเครื่องกล บริษัท เอ็มอีเอส มิตรโปรเจคเซอร์วิสเซส จำกัด