ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของแบบจำลอง 3 มิติสำหรับการไหลของอากาศ
ในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์

โดย

นางสาวฉัตรวารินทร์ ตาสว่าง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ปีการศึกษา 2558

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของแบบจำลอง 3 มิติสำหรับการไหลของอากาศ
ในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์

โดย

นางสาวฉัตรวารินทร์ ตาสว่าง

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ปีการศึกษา 2558

ANALYTICAL SOLUTION FOR A 3D MODEL OF THE AIRFLOW IN THE UPPER HUMAN RESPIRATORY TRACT

BY

MISS CHATVARIN TASAWANG

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (MATHEMATICS)
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
THAMMASAT UNIVERSITY
ACADEMIC YEAR 2015

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

วิทยานิพนธ์

ของ

นางสาวฉัตรวารินทร์ ตาสว่าง

เรื่อง

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของแบบจำลอง 3 มิติ

สำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์

ได้รับการตรวจสอบและอนุมัติ ให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

เมื่อ วันที่ 8 กรกฎาคม พ.ศ. 2559

ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	(ผศ.ดร.สิทธิพงศ์ รักตะเมธากูล)
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	(ผศ.ดร.สุพัชระ คงนวน)
กรรมการสอบวิทยานิพนธ์	(อ.ดร.เอกชัย คุณวุฒิปรีชาชาญ)
กรรมการสอบวิทยานิพนธ์	(อ.ดร.ขจี จันทรขจร)
กรรมการสอบวิทยานิพนธ์	(อ.ดร.สายฝน จาตุรันตบุตร)
คณบดี	(รศ.ปกรณ์ เสริมสุข)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของแบบจำลอง 3 มิติ สำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ส่วนบนของมนุษย์
ชื่อผู้เขียน	นางสาวฉัตรวารินทร์ ตาสว่าง
ชื่อปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
สาขาวิชา/คณะ/มหาวิทยาลัย	คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.สุพัชระ คงนวน
ปีการศึกษา	2558

บทคัดย่อ

การเข้าใจถึงพฤติกรรมการไหลของอากาศนับว่าเป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญในการรักษาโรคเกี่ยวกับระบบทางเดินหายใจด้วยวิธีการฉีดพ่นยา เนื่องจากการไหลของอากาศเปรียบเสมือนตัวกลางในการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยาเป็นหลัก ดังนั้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3 มิติสำหรับการไหลของอากาศภายในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ โดยสมมติให้อากาศมีการไหลแบบสมมาตรตามแนวแกน (axially symmetric) และมีการไหลเข้า-ออกตามการด้วยเปลี่ยนแปลงของความดันภายในถุงลม แบบจำลองการไหลนี้อาศัยสมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) และสมการการไหลต่อเนื่อง (continuity equation) เป็นสมการควบคุมการไหล โดยมีการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบของความดันอากาศที่บริเวณด้านหนึ่งเป็นฟังก์ชันแกว่งกวัดตามคาบเวลา และนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยสำหรับความเร็วในการไหลของอากาศด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ท้าทายความสามารถของนักวิจัย โดยผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel series) เมื่อนำผลเฉลยมาจำลองในแบบจำลองทางเดินหายใจใน 3 มิติ ผลจากแบบจำลองการไหลของอากาศที่ได้นั้นแสดงขนาดและทิศทางการไหลของอากาศสอดคล้องกับความเป็นจริง และงานวิจัยชิ้นก่อน ๆ เป็นอย่างยิ่ง

คำสำคัญ: ทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ แบบจำลองคณิตศาสตร์ 3 มิติ สมการเนเวียร์-สโตกส์ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

Thesis Title	Analytical Solution for a 3D Model of the Airflow in the Upper Human Respiratory Tract
Author	Miss Chatvarin Tasawang
Degree	Master of Science (Mathematics)
Department/Faculty/University	Department of Mathematics and Statistics Faculty of Science and Technology Thammasat University
Thesis Advisor	Supachara Kongnuan, Ph.D.
Academic Year	2015

Abstract

Understanding characteristic of the airflow in a human respiratory tract is very important factor to treatment in the respiratory disease. In this thesis, we propose a three-dimensional mathematical modelling for the airflow in the upper human respiratory tract. The airflow is assumed to be axially symmetric flow and driven by the oscillating pressure gradient. The governing equations for describing the behavior of airflow are composed of the Navier-Stokes equations and the continuity equation. To solve the model, we present a method of analytical solution for the airflow velocity which still challenges to the researchers. We obtain a solution in a Fourier-Bessel series form. Then, we simulate the airflow field on a three-dimensional geometry of a human respiratory tract area. The obtained results show that the characteristic of magnitude and direction of the airflow correspond to the airflow behavior in the human airway and show good agreement with the previous research works.

Keywords: the upper human respiratory tract, three-dimensional mathematical model, the Navier-Stokes equations, analytical solution.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี จากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพัชระ คงนวน ที่ให้ความกรุณา คอยแนะนำ แก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ และชี้แนะที่เป็นประโยชน์ต่อการทำงาน พร้อมทั้งให้คำปรึกษาเมื่อเกิดปัญหา และมอบกำลังใจที่ดีแก่ผู้วิจัยตลอดระยะเวลาทำวิทยานิพนธ์ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างสมบูรณ์ ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์เป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สิทธิพงศ์ รักตะเมธากูล ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ อาจารย์ ดร.ขจี จันทรขจร และ อาจารย์ ดร.สายฝน จาตุรันตบุตร กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมถึงกรรมการสอบวิทยานิพนธ์จากภายนอก อาจารย์ ดร.เอกชัย คุณวุฒิปรีชาชาญ จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่เสียสละเวลา และกรุณาให้คำแนะนำเพิ่มเติมที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงวิทยานิพนธ์ให้ถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติทุกท่านที่ได้มอบความรู้ และขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่สนับสนุนสิ่งอำนวยความสะดวกที่จำเป็นสำหรับการทำงานวิจัยเป็นอย่างยิ่ง

และสุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และญาติพี่น้องทุกคนที่สนับสนุนด้านการศึกษาและเป็นกำลังใจ รวมถึงขอขอบคุณ เพื่อน ๆ นักศึกษาปริญญาโท สำหรับความห่วงใยและความช่วยเหลือในทุก ๆ เรื่องเสมอมา

นางสาวฉัตรวารินทร์ ตาสว่าง

สารบัญ

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันหลายประเทศในโลกล้วนต้องเผชิญกับปัญหามลพิษทางอากาศ ซึ่งเป็นตัวการสำคัญที่ก่อให้เกิดผลเสียต่อคุณภาพอากาศในชั้นบรรยากาศของโลก ทำให้สภาพภูมิอากาศมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรุนแรง และนับวันยิ่งทวีความรุนแรงมากขึ้นเรื่อย ๆ จนถือว่าเป็นภัยคุกคามอย่างหนึ่งต่อการดำเนินชีวิตของมนุษย์

จากข้อมูลขององค์การอนามัยโลก (WHO) รายงานว่า ในปี ค.ศ.2012 ปัญหามลพิษทางอากาศได้คร่าชีวิตคนแล้วถึงประมาณ 7 ล้านคนทั่วโลก นับว่าเป็นปัญหาร้ายแรงที่ทุกประเทศจะต้องตระหนักถึงและร่วมมือกันแก้ไขปัญหา มลพิษทางอากาศนี้อาจเกิดขึ้นได้จากธรรมชาติ ได้แก่ การระเบิดของภูเขาไฟ ไฟป่า เป็นต้น และเกิดจากฝีมือมนุษย์เอง ได้แก่ การเผาไหม้เชื้อเพลิงจากโรงงานอุตสาหกรรม ยานพาหนะ ควันจากการสูบบุหรี่ และ การเผาขยะมูลฝอย เป็นต้น ซึ่งสิ่งเหล่านี้ล้วนเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้สภาวะอากาศมีสารเจือปน เช่น ฝุ่นละออง เขม่าควัน หรือก๊าซต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก และก่อให้เกิดอันตรายต่อสิ่งแวดล้อมรวมถึงมนุษย์ โดยเฉพาะอันตรายต่อสุขภาพอนามัยของมนุษย์ ในชีวิตประจำวันเราไม่อาจหลีกเลี่ยงต่อการสัมผัสกับมลพิษทางอากาศได้ เนื่องจากมนุษย์สามารถหายใจเอาอากาศที่มีสารเจือปนเหล่านี้เข้าสู่ร่างกายได้โดยตรง และในระยะเวลานานพอทำให้สารเจือปนเหล่านี้สะสมอยู่ในระบบทางเดินหายใจในปริมาณมาก อาจนำไปสู่การเกิดโรคเกี่ยวกับระบบทางเดินหายใจในมนุษย์เพิ่มมากขึ้น

โรคหอบหืด (Asthma) นับเป็นโรคภูมิแพ้ในระบบทางเดินหายใจชนิดหนึ่งที่มีผลกระทบมาจากสภาวะทางอากาศที่เต็มไปด้วยมลพิษ อีกทั้งยังเป็นโรคที่พบบ่อยในคนทุกเพศทุกวัยและมีอุบัติการณ์เพิ่มขึ้นทั่วโลก ปัจจุบันพบว่า คนทั่วโลกป่วยเป็นโรคหอบหืดมากกว่า 300 ล้านคน ขณะที่ประเทศไทยมีจำนวนผู้ป่วยเป็นโรคหอบหืดประมาณ 3 ล้านราย พบในเด็กร้อยละ 10-12 และผู้ใหญ่ร้อยละ 6.9 ยิ่งไปกว่านั้นสถานการณ์โรคหอบหืดในประเทศไทยยังรุนแรงขึ้นทุกปี จากข้อมูลของกระทรวงสาธารณสุขพบว่ามีจำนวนผู้ป่วยที่เข้ารับการรักษาเพิ่มจาก 66,679 รายในปี พ.ศ. 2538 เป็น 102,273 รายในปี พ.ศ. 2552 และมีผู้เสียชีวิตจากโรคหอบหืดนี้เพิ่มขึ้นจาก 806 รายในปี พ.ศ. 2540 เป็น 1,697 รายในปี พ.ศ. 2546 (คู่มือหนังสือการพัฒนาระบบการดูแลโรคหืดเครือข่ายหน่วยบริการปฐมภูมิระดับอำเภอ (CUP) และโรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพตำบล, 2554, น. 19) ทำให้โรคหอบหืดนี้ได้รับความสนใจจากทางการแพทย์และหน่วยงานสาธารณสุขทั่วโลกเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะประเทศไทยได้ให้ความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง จึงได้จัดตั้งเครือข่ายคลินิกโรคหอบหืด (Easy Asthma clinic) ในโรงพยาบาลชุมชนทั่วประเทศ ซึ่งเริ่มดำเนินการในปี พ.ศ. 2551 เพื่อมุ่งหวังให้ผู้ป่วยโรคนี้มีคุณภาพชีวิตที่

ดีขึ้นและหายใจได้เต็มปอดดังเช่นคนปกติ โดยมีการให้ความรู้เรื่องยาและแนวทางการรักษาโรค รวมไปถึงการสร้างเครือข่ายการดูแลรักษาที่เป็นระบบ ทำให้การดูแลรักษาผู้ป่วยมีประสิทธิภาพมากขึ้น

อาการของโรคหอบหืดสามารถเกิดขึ้นได้หลายระดับตั้งแต่อาการไม่รุนแรง จนถึงอาการรุนแรง ซึ่งหากไม่ได้รับการรักษาทันท่วงทีผู้ป่วยอาจเสียชีวิตได้ โดยผู้ที่เป็นโรคหอบหืดมักจะมีอาการไอมาก หายใจลำบาก หายใจออกมีเสียงวี๊ด แน่นหน้าอก และหายใจขัดจนต้องหายใจทางปาก สาเหตุเกิดจากการที่หลอดลมมีปฏิกิริยาตอบสนองไวต่อสิ่งกระตุ้น หรือสิ่งแวดล้อมที่ไม่เหมาะสม ทำให้หลอดลมเกิดการอักเสบเรื้อรัง และมีการหดตัวของหลอดลมมากกว่าปกติ ซึ่งอาการเหล่านี้สามารถเป็นๆหายๆ แต่โดยทั่วไปแล้วมักมีโอกาสเกิดขึ้นรุนแรงได้ในช่วงกลางคืนหรือหลังตื่นตอนเช้า อย่างไรก็ตาม โรคหอบหืดเป็นโรคเรื้อรังที่ไม่สามารถรักษาให้หายขาดได้ แต่ก็ยังมีวิธีการรักษาต่างๆเพื่อบรรเทาอาการ หรือป้องกันไม่ให้อาการเหล่านี้กำเริบขึ้นได้

ปัจจุบันในทางการแพทย์ได้มีการรักษาผู้ป่วยโรคหอบหืดโดยการใช้ยา 2 ประเภท คือ ยาชนิดรับประทาน และยาชนิดพ่นผ่านช่องปากหรือจมูก ซึ่งการใช้ยาชนิดพ่นนั้นถือว่าเป็นยาที่มีประสิทธิภาพและความปลอดภัยสูง เนื่องจากยาที่ใช้ในการฉีดพ่นมีปริมาณน้อยกว่ายารับประทาน อีกทั้งเป็นยาที่สามารถเกิดประสิทธิผลได้เฉพาะที่ และออกฤทธิ์ได้เร็ว จึงได้ผลการรักษาที่ดีและมีโอกาสเกิดอาการข้างเคียงได้น้อยมาก ดังนั้นปัจจุบันการรักษาโรคหอบหืดจึงนิยมใช้ยาชนิดพ่นเป็นหลัก โดยใช้อุปกรณ์ในการพ่นยา (inhaler) เพื่อเป็นการขยายหลอดลม ซึ่งต้องอาศัยความสอดคล้องกันระหว่างการกดเครื่องพ่นยากับจังหวะการสูดหายใจเข้า ดังนั้นผู้ป่วยจึงต้องมีความเข้าใจในการใช้อุปกรณ์ในการพ่นยานี้เป็นอย่างมาก อย่างไรก็ตาม วิธีการใช้ยาชนิดพ่นเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดและสามารถขนส่งอนุภาคละอองยาไปยังตำแหน่งเป้าหมายได้แม่นยำนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยที่สำคัญ ได้แก่ รูปร่างของทางเดินหายใจที่มีความซับซ้อน คุณสมบัติทางกายภาพของอนุภาคยา เช่น ความหนาแน่น รูปร่าง และขนาด ตลอดจนพฤติกรรมการหายใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่งความถี่และอัตราการไหลของอากาศ ซึ่งนับว่าการไหลของอากาศถือเป็นตัวกลางในการขนส่งอนุภาคละอองยาที่สำคัญ อีกทั้งยังเป็นตัวกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่ และการยึดเกาะของอนุภาคละอองยาในทางเดินหายใจอีกด้วย

รูปแบบพฤติกรรมการไหลของอากาศและการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยานั้นได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวางทั้งในการทดลองห้องปฏิบัติการ และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ถึงแม้ว่าในปัจจุบันงานวิจัยทางการแพทย์ได้มีการศึกษาและพัฒนาเครื่องมือเกี่ยวกับการฉีดพ่นยาโดยอาศัยการทดลองในห้องปฏิบัติการจริง แต่ก็ยังไม่สามารถแก้ไขปัญหาได้ดีที่สุด อีกทั้งต้องใช้เครื่องมือที่มีประสิทธิภาพ รวมไปถึงต้องใช้เวลาและมีค่าใช้จ่ายในการทดลองสูงด้วย ดังนั้นนักวิจัยส่วนใหญ่จึงได้นำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา และสามารถที่จะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model) เพื่อมาอธิบายปัญหาด้านต่างๆได้อย่างมากมาย โดยเฉพาะทางด้านฟิสิกส์และทางการแพทย์ ซึ่งจะใช้วิธีการเชิงวิเคราะห์ และวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อจำลองปัญหาตามที่ต้องการ ทั้งนี้ ข้อดีของการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือสามารถทำนายพฤติกรรมการไหลของของไหล ภายใต้เงื่อนไขต่างๆมากมาย รวมไปถึงสามารถ

จำลองการไหลในรูปแบบต่าง ๆ ทั้งแบบสองมิติและแบบสามมิติให้มีความสมจริง ทำให้การรักษามีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ในการศึกษางานวิจัยส่วนใหญ่นิยมใช้สมการต่อเนื่อง (continuity equation) และสมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) เป็นสมการที่นำมาใช้อธิบายพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของของไหลโดยอาศัยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งต้องใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่มีประสิทธิภาพสูงในการหาผลเฉลย ดังนั้นจึงมีนักวิจัยหลายท่านพยายามที่จะหาผลเฉลยสำหรับสมการเนเวียร์-สโตกส์นี้ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ เพื่อลดระยะเวลาและประหยัดทรัพยากรในการคำนวณ ในหลายปีที่ผ่านมาได้มีงานวิจัยที่นำเสนอแบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ และวิธีการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์สำหรับสมการเนเวียร์-สโตกส์ใน 2 มิติภายใต้เงื่อนไขแตกต่างกันออกไป แต่ก็ยังมีงานวิจัยจำนวนน้อยที่นำเสนอผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับสมการเนเวียร์-สโตกส์ใน 3 มิติเพื่อให้การจำลองการไหลสมจริงมากขึ้น

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะเป็นการเพิ่มมิติให้กับการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจโดยผ่านทางช่องปาก เพื่อให้ได้แบบจำลองที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น ซึ่งเราจะประยุกต์การจำลองการไหลของอากาศ และอาศัยแนวคิดวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากงานวิจัยของ Kongnuan และ Pholuang (2012) เป็นแนวคิดพื้นฐานที่สำคัญ ซึ่งได้มีการนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจในมนุษย์ผ่านช่องปากแบบ 2 มิติ ดังนั้นในงานวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นการพัฒนาแบบจำลองจาก 2 มิติเป็น 3 มิติ โดยจะพิจารณาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจผ่านช่องปากแบบ 3 มิติในรูปแบบอย่างง่าย ซึ่งจะนำเสนอผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับสมการการต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์แบบสมมาตร

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบ 3 มิติสำหรับการไหลของอากาศภายในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ โดยอาศัยสมการต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ พร้อมทั้งกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ (boundary conditions) ที่เหมาะสม
2. นำเสนอผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) สำหรับความเร็วของการไหลของอากาศเพื่อจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจผ่านช่องปาก โดยอาศัยการวิเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel analysis)
3. ทำการจำลองและศึกษาลักษณะการไหลของอากาศในทางเดินหายใจจากผลเฉลยที่ได้

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. ขอบเขตของบริเวณที่ใช้ทำการศึกษาในงานวิจัยนี้ จะเริ่มตั้งแต่บริเวณทางเข้าของช่องปากผ่านหลอดลมก่อนถึงขั้วปอดในขณะที่ปากกำลังเปิดกว้าง ซึ่งมีลักษณะค่อนข้างเป็นท่อที่ไม่ซับซ้อนมากนัก โดยจะทำการสร้างแบบจำลองสำหรับบริเวณทางเดินหายใจผ่านช่องปากนี้ใน 3 มิติในรูปแบบอย่างง่าย ซึ่งในส่วนนี้จะอาศัยข้อมูลทางกายภาพจากงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องมากำหนดขนาดของความกว้าง ความลึก และความยาวของทางเดินหายใจให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริง

2. สำหรับการนำเสนอแบบจำลองการไหลของอากาศ จะใช้วิธีการเชิงวิเคราะห์ในการหาผลเฉลยสำหรับความเร็วของการไหลของอากาศ ซึ่งจะเป็นการหาผลเฉลยของสมการต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์แบบสมมาตร พร้อมกำหนดเงื่อนไขค่าขอบที่สอดคล้องกับความเป็นจริง และมองว่าอากาศเป็นของไหลชนิดหนึ่ง และมีการไหลเข้า-ออกตามการเปลี่ยนแปลงของความดันภายในปอด ซึ่งมีลักษณะกวัดแกว่งตามคาบของเวลา (oscillating flow) และไม่มีแรงภายนอกมากระทำ จากนั้นจึงนำผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้มาทำการจำลองการไหลของอากาศโดยอาศัยโปรแกรม MATLAB

เนื้อหาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะแบ่งออกเป็น 5 บท ได้แก่ บทนำ ซึ่งกล่าวถึงความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ของการวิจัย และขอบเขตของการวิจัย บทที่ 2 จะเป็นการทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นงานวิจัยที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการไหลของอากาศ รวมไปถึงงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการเนเวียร์-สโตกส์ ส่วนวิธีการดำเนินงานวิจัย จะอยู่ในบทที่ 3 ซึ่งจะเป็นการสร้างแบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ โดยนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับความเร็วในการไหลของอากาศ และบทที่ 4 จะเป็นการนำเสนอผลการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจในรูปแบบต่าง ๆ ตามด้วยบทสุดท้ายก็คือ สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทที่ 2
ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในหลายปีที่ผ่านมา การศึกษาการไหลของของไหลชนิดต่าง ๆ นั้นได้รับความสนใจจากนักวิจัยเป็นจำนวนมาก เนื่องจากสามารถประยุกต์ใช้ได้จริงในทั้งทางด้านวิศวกรรม และด้านการแพทย์ เช่น การประยุกต์ใช้ในการขุดเจาะน้ำมัน การควบคุมการไหลของเลือดในระหว่างการผ่าตัด และการจำลองการทำงานของระบบทางเดินหายใจ เป็นต้น ซึ่งนักวิจัยหลายท่านได้พยายามศึกษาพฤติกรรมการไหลของของไหลในรูปแบบเรขาคณิตที่แตกต่างกันออกไป โดยมุ่งเน้นที่จะวิเคราะห์แก้ปัญหาโดยอาศัยสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อจำลองการไหลของของไหลภายใต้เงื่อนไขตามที่ต้องการ

ในเบื้องต้น ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษา และทบทวนงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการจำลองการไหลของของไหลภายในรูปทรงเรขาคณิตที่มีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอก ดังตัวอย่างเช่น Riahi, Roy, และ Cavazos (2011) ได้ศึกษาการจำลองการไหลของเลือดภายในหลอดเลือดแดงที่มีการตีบ ซึ่งมีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นทรงกลม โดยพิจารณาการไหลของเลือดเป็นการไหลแบบราบเรียบที่สมมาตรตามแนวแกน (axisymmetric) ซึ่งอธิบายการไหลโดยใช้สมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์แบบไร้มิติในระบบพิกัดทรงกระบอก และใช้วิธีการเชิงวิเคราะห์พร้อมทั้งวิธีการเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลย โดยคำนวณปริมาณที่สำคัญได้แก่ ความเร็วของการไหลของเลือด การเปลี่ยนแปลงของความดัน ความต้านทาน และความเค้นเฉือน จากนั้นนำผลเฉลยที่ได้มาวิเคราะห์ผลกระทบที่ส่งผลต่อการไหลของเลือด ซึ่งพบว่า ความเร็วของการไหลของเลือดตามแนวแกนจะลดลงเมื่อมีการเพิ่มขึ้นของรัศมี และมีค่าสูงสุดที่บริเวณแกนกลางของท่อ รวมทั้งการเปลี่ยนแปลงของความดัน ความต้านทาน และความเค้นเฉือน จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างมากในบริเวณที่มีการตีบของหลอดเลือด

นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการไหลภายในท่อทรงกระบอก โดยพิจารณาการไหลที่มีลักษณะแบบกวัดแกว่ง (oscillatory flow) จากงานวิจัยของ Ali, Asghar, และ Alsulami (2013) ได้ศึกษาวิเคราะห์การไหลแบบกวัดแกว่งของของไหลทุติยภูมิภายในท่อทรงกระบอกที่มีแรงดูดของของไหลที่ผนังมาก โดยการไหลในท่อนี้เกิดจากการดูดอย่างต่อเนื่องที่ผนัง และมีลักษณะกวัดแกว่งของความเร็วที่เกิดจากคลื่นความดันแบบฮาร์โมนิก ซึ่งพารามิเตอร์ที่สนใจ ได้แก่ ความเร็วการไหล แอมพลิจูดการกวัดแกว่งของความดันและความลึกของคลื่นที่กวัดแกว่ง โดยแสดงการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับความเร็วในการไหล ซึ่งพิจารณาความเร็วในการไหลที่แบ่งออกเป็นสองส่วน ได้แก่ ความเร็วที่เคลื่อนที่ โดยไม่มีการหมุนวน ซึ่งจะถูกควบคุมด้วยแรงดัน และความเร็วที่เคลื่อนที่แบบหมุนวน ซึ่งนำวิธีการรบกวน (Perturbation method) และวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (Wentzel-Kramers-Brillouin approximation : WKB) มาเกี่ยวข้องในการหา

ผลเฉลย อีกทั้งได้นำพารามิเตอร์มาวิเคราะห์ผลกระทบที่ส่งผลต่อการกวัดแกว่งของการไหลของของไหล

Tsangaris และ Vlachakis (2003) ได้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยแบบแม่นตรงของสมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinates) ซึ่งใช้เป็นสมการควบคุมสำหรับกรณีการไหลภายใต้การเปลี่ยนแปลงความดันแบบกวัดแกว่ง (oscillating pressure gradient) และกรณีการไหลแบบราบเรียบที่มีการพัฒนาเต็มรูปแบบ (fully developed laminar flow) ในท่อตรงที่มีหน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบบมุมฉาก ผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปแบบของการกระจายอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) ซึ่งพบว่ามีรูปแบบการไหลลักษณะแบนที่ตรงกลางท่อยกเว้นตำแหน่งที่ใกล้กับผนังท่อ เนื่องจากผลเฉลยระหว่างกรณีการไหลแบบคงที่กับกรณีการไหลภายใต้การเปลี่ยนแปลงความดันแบบกวัดแกว่งนั้นเกิดการซ้อนทับกัน ซึ่งเป็นการแสดงพฤติกรรมชั้นขอบเขตที่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็วสูงในขณะที่ใกล้ชั้นขอบเขตนั้น

หลังจากการศึกษางานวิจัยจำนวนหนึ่ง พบว่าในบางงานวิจัยได้นำการจำลองการไหลภายในท่อนี้มาประยุกต์ใช้ให้สอดคล้องเกี่ยวกับระบบการทำงานของทางเดินหายใจในร่างกายของมนุษย์ ซึ่งในปัจจุบันปัญหาของการใช้ยาชนิดพ่นเพื่อรักษาผู้ป่วยโรคระบบทางเดินหายใจนั้นได้รับความสนใจจากนักวิจัยเป็นอย่างมาก เนื่องจากในขณะฉีดพ่นยาอาจเกิดการสูญเสียยาระหว่างการขนส่ง ทำให้อนุภาคยาถูกส่งไปยังอวัยวะเป้าหมายได้จำนวนน้อย ซึ่งส่งผลต่อประสิทธิภาพในการรักษา ด้วยเหตุนี้ นักวิจัยจึงได้พยายามแก้ปัญหา โดยมองว่าอากาศในทางเดินหายใจถือเป็นตัวกลางสำคัญในการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา ดังนั้นจึงได้มีการศึกษาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจที่สัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา ทำให้ผู้จัยเริ่มมีความสนใจและได้ค้นคว้างานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ดังนี้

Tan และคณะ (2004) ได้ศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศ และการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยาแต่ละอนุภาค ภายใต้สภาวะการไหลของอากาศภายในช่องจมูก โดยอาศัยสมการต่อเนื่องประกอบกับสมการเนเวียร์-สโตกส์เป็นสมการควบคุมการไหล และใช้วิธี Semi-Implicit ในการแก้สมการ จากนั้นจึงนำผลเฉลยที่ได้ไปใช้กับแบบจำลองสำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา ซึ่งสร้างขึ้นโดยอาศัยเทคนิคการกระจัดกระจายวัฏภาคแบบลากรานจ์ (Lagrangian Dispersed Phase Model) พร้อมทั้งทำการประมวณผลภายใต้ความหนาแน่น และขนาดของอนุภาคละอองยา รวมทั้งอัตราการหายใจที่แตกต่างกัน จากนั้นทำการจำลองสนามการไหลของอากาศ และวิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา และนำไปเปรียบเทียบกับแบบจำลองและผลการทดลองที่อ้างอิง ซึ่งผลการจำลองพบว่ามีความสอดคล้องกัน และสรุปได้ว่าสนามการไหลของอากาศ และลักษณะทางกายภาพของอนุภาคละอองยามีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา

ต่อมา Wen และคณะ (2007) ได้พัฒนาแบบจำลองการไหลของอากาศภายในโพรงจมูกให้มีความสมจริงยิ่งขึ้น โดยมุ่งเน้นที่จะศึกษาการไหลของอากาศภายในช่องจมูกทั้งสองข้าง ซึ่งใช้ข้อมูลจากการถ่ายภาพรังสีส่วนตัดอาศัยคอมพิวเตอร์ (CT scan) ในการสร้างโดเมนที่ทำการศึกษา จากนั้นนำโดเมนที่สร้างไปเข้าในโปรแกรม GAMBIT ซึ่งเป็นโปรแกรมจำลองแบบ 3 มิติ แล้วทำการหาผลเฉลยสำหรับการไหลของอากาศ

ในสภาวะปกติ และในสภาวะที่ออกกำลังกาย โดยอาศัยวิธีการคำนวณเชิงพลศาสตร์ของของไหล (Computational Fluid Dynamics : CFD) ซึ่งใช้สมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์เพื่ออธิบายการไหลของอากาศแบบราบเรียบ และใช้แบบจำลอง LRN $k-\varepsilon$ ของ Wilcox เพื่ออธิบายการไหลแบบปั่นป่วน จากผลการจำลองสรุปได้ว่า รูปร่างลักษณะของช่องจมูกทั้งสองข้างที่แตกต่างกันทั้งขนาดและรูปทรงภายในนั้นส่งผลต่อการไหลของอากาศ โดยช่องจมูกด้านซ้ายมีลักษณะแคบกว่าด้านขวา จึงมีความดัน ความเร็ว และการกระจายตัวของอากาศมากกว่า รวมทั้งเมื่อเปรียบเทียบอัตราการไหลของอากาศพบว่า ที่อัตราการไหลของอากาศในสภาวะปกติ อากาศจะมีการกระจายตัวภายในโพรงจมูกได้ดีกว่าในสภาวะที่ออกกำลังกาย

นอกจากจะมีการศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศที่สัมพันธ์กับการขนส่งอนุภาคละอองยาในทางเดินหายใจผ่านทางโพรงจมูกแล้ว ยังมีนักวิจัยจำนวนมากได้มีการศึกษาการไหลของอากาศผ่านทางช่องปาก ซึ่งเป็นอีกหนึ่งองค์ประกอบสำคัญในระบบทางเดินหายใจอีกด้วย ยกตัวอย่างเช่น จากงานวิจัยของ Fadl, Wang, และ Cheng (2007) ได้ศึกษาและทำการวิจัยเกี่ยวกับลักษณะของเครื่องพ่นยาว่าส่งต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาคยาหรือไม่ โดยทำการศึกษาจากการทดลอง และการจำลองเชิงตัวเลขเพื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกัน โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์บนโดเมนแบบสามมิติ เพื่อวิเคราะห์รูปแบบการไหลของอากาศและสังเกตแนวทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคยาในทางเดินหายใจ โดยเริ่มตั้งแต่ช่องปากจนถึงหลอดลมก่อนถึงขั้วปอด ซึ่งใช้สมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์มาเป็นสมการควบคุมการไหลเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของอากาศ และใช้สมการ $k-\varepsilon$ ในการอธิบายการไหลของอากาศแบบปั่นป่วน (turbulent flow) จากนั้นนำผลเฉลยที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการทดลอง โดยทำการทดลองจากเครื่องพ่นยาที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 16 และ 20 มิลลิเมตร กำหนดให้อัตราการหายใจมีค่าเป็น 30 60 และ 90 ลิตรต่อนาที และมุมในการฉีดพ่นสูงขึ้นทีละ 10 องศาจากระดับปากตั้งแต่ 0 ถึง 40 องศา ซึ่งพบว่า มุมในการฉีดพ่นนั้นไม่ขึ้นอยู่กับอัตราการหายใจและขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของปากเครื่องพ่นยา อย่างไรก็ตาม ประสิทธิภาพในการดูดซึมของอนุภาคยาจะเพิ่มขึ้นเมื่อมุมของการพ่นยาเพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง 20 องศา และค่อยๆลดลงเมื่อเพิ่มมุมการพ่นมากไปกว่านั้น

จากนั้น Qingxing Xu, Fong Yew Leong, และ Chi-Hwa Wang (2009) ได้ศึกษาการขนส่งและการยึดเกาะของอนุภาคขนาดเล็กในบริเวณหลอดลมจนถึงขั้วปอดทั้งสองข้าง ภายใต้เงื่อนไขการไหลของอากาศแบบกวัดแกว่ง (oscillatory flow) ในทางเดินหายใจ โดยทำการศึกษาผ่านการทดลองในห้องปฏิบัติการ และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อจำลองการไหลของอากาศและการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยใช้สมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์เป็นสมการควบคุมสำหรับการไหลของอากาศ และแทนการไหลของอากาศแบบกวัดแกว่งนี้ด้วยสมการฟังก์ชันขั้นบันไดของเฮฟวีไซด์ (Heaviside step function) รวมถึงการใช้สมการ Basset-Boussinesq-Queen (Morrison, 1974) เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค ซึ่งอาศัยแนวคิดเรื่องแรงและการเคลื่อนที่ จากนั้นได้ทำการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL เพื่อจำลองทิศทางการเคลื่อนที่ และตำแหน่งการยึดเกาะของอนุภาคบนผนังทางเดินหายใจ โดยพบว่าอนุภาค

สามารถเคลื่อนที่ไปได้ไกลถึงขั้วปอดทั้งสองข้าง แต่มีการยึดเกาะของอนุภาคที่บริเวณขั้วปอดเท่านั้น และจากการวิเคราะห์ค่าพารามิเตอร์ทำให้สรุปผลได้ว่า อนุภาคจะมีการยึดเกาะบริเวณขั้วปอดเพิ่มขึ้นเมื่ออากาศมีการไหลด้วยความถี่ต่ำ อัตราการไหลของอากาศเพิ่มขึ้น และขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของอนุภาคเพิ่มขึ้น

ต่อมา อัญชุลี, สุพัชระ, และ สิทธิพงศ์ (2010) ได้ศึกษาพฤติกรรมของอนุภาคยาแต่ละอนุภาคในทางเดินหายใจหลังจากฉีดพ่นยาผ่านช่องปาก ภายใต้สภาวะการไหลของอากาศ และได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโดนเมน 2 มิติสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจตั้งแต่ช่องปากผ่านหลอดลมก่อนถึงขั้วปอด ซึ่งอาศัยสมการเนเวียร์-สโตกส์ และสมการการไหลต่อเนื่องเป็นสมการควบคุมการไหล โดยค่าขอบด้านหนึ่งถูกกำหนดให้เป็นฟังก์ชันแกว่งกวัดตามคาบของเวลา (oscillating function) พร้อมทั้งใช้โปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics 3.5a โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อจำลองความเร็วและแนวทางการไหลของอากาศ นอกจากนี้ได้ทำการสร้างแบบจำลองเพื่อศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของอนุภาคยา โดยใช้เทคนิคการกระจัดกระจายวัฏภาคแบบลากรานจ์ (Lagrangian dispersed phase) และความรู้ในทางฟิสิกส์เบื้องต้นสำหรับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลองนี้จะใช้วิธีของออยเลอร์ (Euler's method) โดยอาศัยการเขียนโปรแกรมใน MATLAB 7.9 เพื่อนำมาจำลองแนวทางการเคลื่อนที่และวิเคราะห์รูปแบบการกระจายตัวของการยึดเกาะของอนุภาคยาบนตำแหน่งต่างๆในทางเดินหายใจ จากการวิเคราะห์พารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อพฤติกรรมของอนุภาคยา พบว่าเมื่อเพิ่มความหนาแน่นของอนุภาคยา และความเร็วในการฉีดพ่นยา จะทำให้อนุภาคยาสามารถเคลื่อนที่ได้ไกลขึ้น และมีโอกาสการยึดเกาะบนผนังทางเดินหายใจมากขึ้น

นอกจากนี้ Kongnuan และ Pholuang (2012) ได้ศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยาในทางเดินหายใจของมนุษย์ ภายใต้การไหลของอากาศแบบกวัดแกว่ง โดยการนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับแบบจำลองการไหลของอากาศ และแบบจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา ซึ่งจะอาศัยสมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์ใน 2 มิติเป็นสมการควบคุมการไหลของอากาศ และกำหนดเงื่อนไขค่าขอบสำหรับความดันอากาศที่ตำแหน่งทางออกติดกับขั้วปอดแทนด้วยฟังก์ชันคาบของเวลา ซึ่งผลเฉลยกรณีการไหลของอากาศแบบกวัดแกว่งที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ สำหรับการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เพื่อจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยาจะอาศัยวิธีของออยเลอร์ และเทคนิคการกระจัดกระจายวัฏภาคแบบลากรานจ์เช่นเดียวกับงานวิจัยของ อัญชุลี, สุพัชระ, และ สิทธิพงศ์ (2010) ทั้งนี้ นอกจากจะสามารถจำลองการเคลื่อนที่และตำแหน่งยึดเกาะของอนุภาคละอองยาแล้ว ยังสามารถวิเคราะห์พารามิเตอร์ที่ส่งผลต่อการเคลื่อนที่ และการยึดเกาะของอนุภาคละอองยาในทางเดินหายใจได้อีกด้วย ซึ่งงานวิจัยของ Kongnuan และ Pholuang (2012) นี้จะถูกนำมาใช้เป็นแนวคิดสำคัญต่อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

Kongnuan, Na-Thakuatung, และ Pholuang (2014) ได้ทำการเปรียบเทียบผลการจำลองเชิงวิเคราะห์ และผลการจำลองเชิงตัวเลขสำหรับการไหลของอากาศแบบกวัดแกว่งภายในทางเดินหายใจของมนุษย์โดยผ่านทางช่องปากแบบ 2 มิติ สำหรับการจำลองเชิงวิเคราะห์ ได้ทำการแก้สมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์ เพื่อหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับความเร็วในการไหลของอากาศ ซึ่งได้ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบอนุกรมฟูเรียร์จากงานวิจัยของ Kongnuan และ Pholuang (2012) และสำหรับการจำลองเชิงตัวเลขได้อาศัยโปรแกรมสำเร็จรูป COMSOL Multiphysics 3.5a มาจำลองความเร็วและแนวทางการไหลของอากาศ โดยอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากงานวิจัยของ อัญชุลี, สุพัชระ, และ สิทธิพงศ์ (2010) จากนั้นนำผลเฉลยที่ได้จากสองวิธีมาทำการจำลองผล โดยพิจารณาความเร็วของอากาศในทางเดินหายใจเมื่อเวลาผ่านไป 1.5 2.05 และ 3.5 วินาทีตามลำดับ ซึ่งเมื่อนำผลการจำลองการไหลของอากาศในแบบเดียวกันของทั้งสองวิธีมาเปรียบเทียบ พบว่าลักษณะการไหลของอากาศของทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องตรงกันเป็นอย่างดี โดยในช่วง 2 วินาทีแรก การไหลของอากาศจะมีทิศทางเข้าสู่ระบบทางเดินหายใจ ซึ่งความเร็วของอากาศจะมีค่าสูงสุดที่บริเวณแนวแกนกลาง แล้วลดลงตามสัดส่วนจนมีค่าเป็นศูนย์ที่ผนังทางเดินหายใจ และวินาทีที่ 3 เป็นช่วงเวลาที่อากาศมีการเปลี่ยนทิศทางเป็นการไหลออกจากระบบทางเดินหายใจซึ่งสอดคล้องกับความเป็นจริง

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่านักวิจัยส่วนใหญ่ได้นำสมการเนเวียร์-สโตกส์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลในรูปแบบที่แตกต่างกันไป สมการเนเวียร์-สโตกส์นี้จึงเป็นสมการคณิตศาสตร์ที่สำคัญมากในการแก้ปัญหา อย่างไรก็ตาม ปัญหาการหาผลเฉลยสำหรับสมการเนเวียร์-สโตกส์นี้เป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจจากนักวิจัยเป็นอย่างมาก เนื่องจากด้วยความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์จึงเป็นการยากที่จะหาผลเฉลยได้อย่างแม่นตรง ซึ่งผลเฉลยแบบแม่นตรงมีความสำคัญในการตรวจสอบวิธีการเชิงตัวเลขที่สามารถพัฒนากับปัญหาที่มีความซับซ้อนได้ นักวิจัยจำนวนหนึ่งจึงได้พยายามหาวิธีในการหาผลเฉลยแบบแม่นตรงด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ที่แตกต่างกันไป เพื่อให้ง่ายต่อการผลเฉลย ซึ่งสามารถศึกษาได้จากงานวิจัยต่างๆ ดังนี้

เนื่องจากสมการเนเวียร์-สโตกส์โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งยากต่อการหาคำตอบ งานวิจัยของ Otarod, S. และ Otarod, D. (2006) จึงได้อาศัยความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการวิเคราะห์แคลคูลัส ซึ่งเป็นการลดความซับซ้อนของสมการสมการเนเวียร์-สโตกส์ในการหาผลเฉลยวิเคราะห์ของสมการเนเวียร์-สโตกส์ใน 2 มิติสำหรับการไหลแบบราบเรียบ ต่อมา งานวิจัยของ Lyberg และ Tryggeson (2007) ได้เสนอวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับสมการเนเวียร์-สโตกส์ ซึ่งเขียนสมการในรูปแบบไดเวอร์เจนซ์ โดยใช้สมบัติความสมมาตรในการแบ่งสมการเนเวียร์-สโตกส์ออกเป็นเทนเซอร์สมมาตร และเทนเซอร์สมมาตรเสมือน ซึ่งจะได้ออกมาเป็นสองสมการ สมการหนึ่งจะมีรูปแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น และอีกสมการจะอยู่ในรูปแบบสมการพีชคณิตกำลังสอง จากนั้นทำการหาผลเฉลยของทั้งสองสมการ แล้วจึงนำผลเฉลยที่ได้มาประกอบกันเป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับการไหล และในปีต่อมา Mohyuddin และคณะ (2008) ได้แสดงการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการเนเวียร์-สโตกส์ใน 2 มิติสำหรับการไหลแบบไม่คงที่

โดยเริ่มจากแปลงสมการเนเวียร์-สโตกส์ที่ขึ้นอยู่กับเวลาให้เป็นแบบคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา จากนั้นใช้วิธีการแปลงฮอโดกราฟ-เลอจองด์ในการสับเปลี่ยนระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตาม แล้วลดรูปสมการเนเวียร์-สโตกส์ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการแปลงเลอจองด์

นอกจากนี้ในบางงานวิจัยที่ได้พัฒนาวิธีการหาผลเฉลยแบบแม่นตรงของสมการเนเวียร์-สโตกส์ในรูปแบบ 3 มิติ เช่น Vlachakis และ Baldoukas (2002) ได้นำเสนอการหาผลเฉลยแบบแม่นตรงของสมการเนเวียร์-สโตกส์ประกอบกับสมการต่อเนื่องในระบบพิกัดทรงกระบอก (r, θ, z) สำหรับการไหลแบบหมุนวนใน 3 มิติภายในท่อที่มีการดูดที่ผนัง โดยนำมาประยุกต์ใช้กับการไหลภายในหลอดเลือด ซึ่งอาศัยการหาผลเฉลยด้วยการวิเคราะห์ฟังก์ชันเบสเซล (bessel function) บนพื้นฐานรูปแบบการไหลตามทฤษฎีของ Terrill (1965, pp 323-332.)

และ Muriel (2010) ได้นำเสนอวิธีการหาผลเฉลยแบบแม่นตรงของสมการเนเวียร์-สโตกส์ใน 3 มิติ ซึ่งอาศัยการประมาณค่าเริ่มต้นในการคำนวณสมการวิวัฒนาการตามเวลา (time evolution) และกำหนดเงื่อนไขเป็นการไหลในสนามพลังงานและความดัน แล้วจึงนำผลเฉลยที่ได้ไปแทนค่าในสมการเนเวียร์-สโตกส์พร้อมทั้งคำนวณค่าของความดัน จากนั้นนำผลเฉลยของค่าความดันรวมกับผลเฉลยที่ได้จากสมการวิวัฒนาการตามเวลา ก็จะได้เป็นผลเฉลยแม่นตรงสำหรับสมการเนเวียร์-สโตกส์

อย่างไรก็ตามจากการทบทวนงานวิจัยทั้งหมดที่กล่าวมาข้างต้น ยังไม่มีงานวิจัยชิ้นใดที่ทำการหาผลเฉลยของสมการเนเวียร์-สโตกส์แบบสมมาตร และศึกษาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ผ่านช่องปากแบบ 3 มิติ โดยวิธีการเชิงวิเคราะห์มาก่อน ดังนั้น ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงมีจุดมุ่งหมายที่จะนำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ 3 มิติ และหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการเนเวียร์-สโตกส์แบบสมมาตร เพื่ออธิบายการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ รวมถึงเปรียบเทียบทิศทางและขนาดของความเร็วการไหลของอากาศ ณ เวลาที่แตกต่างกัน

บทที่ 3

แบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

การรักษาโดยการใช้ยาชนิดพ่นมีความสำคัญต่อผู้ป่วยโรคระบบทางเดินหายใจ เนื่องจากอนุภาคละอองยาสามารถเข้าสู่ตำแหน่งในระบบทางเดินหายใจได้โดยตรง และสามารถออกฤทธิ์ได้เฉพาะที่ แต่อย่างไรก็ตาม อนุภาคละอองยาจะสามารถถูกขนส่งไปยังอวัยวะเป้าหมายได้นั้นจะต้องอาศัยการไหลของอากาศเป็นตัวกลางที่สำคัญในการเคลื่อนที่ ในปัจจุบันนักวิจัยจำนวนมากจึงได้ให้ความสนใจและพยายามศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยาและพฤติกรรมการไหลของอากาศ เพื่อมุ่งเน้นที่จะพัฒนาเทคโนโลยีด้านการพ่นยา และนำไปสู่การรักษาโรคให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ซึ่งการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ นับเป็นวิธีที่นิยมใช้ในการศึกษา เนื่องจากลดระยะเวลาและประหยัดทรัพยากรในการดำเนินงาน แต่ด้วยความซับซ้อนของโครงสร้างระบบทางเดินหายใจของมนุษย์อันเป็นอุปสรรคต่อการสร้างแบบจำลองที่สมจริง งานวิจัยส่วนมากจึงเป็นเพียงการศึกษาการไหลของอากาศในระบบทางเดินหายใจในสองมิติ แต่งานวิจัยที่ศึกษาการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแบบสามมิตินั้นยังมีน้อย สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงจะอาศัยแบบจำลองคณิตศาสตร์ในการศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์แบบสามมิติ เพื่อให้มีความใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น โดยเริ่มจากการสร้างแบบจำลองสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ และหาผลเฉลยสำหรับความเร็วในการไหลของอากาศโดยอาศัยวิธีการเชิงวิเคราะห์ในลำดับต่อไป

3.1 การสร้างแบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

เราจะพิจารณาปัญหาการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ในสามมิติ ภายใต้สมมติฐานว่า อากาศเป็นของไหลชนิดหนึ่งที่มีความสม่ำเสมอเป็นเนื้อเดียวกันและอัดไม่ได้ (homogenous Newtonian and incompressible fluid) โดยที่อุณหภูมิหนึ่งๆ ความหนืดและความหนาแน่นของอากาศจะมีค่าคงที่เสมอ และไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำ

สำหรับแบบจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ จะเป็นการศึกษาการไหลของอากาศในขณะที่ปากกำลังอ้าเปิดกว้าง ท่อทางเดินหายใจจะมีลักษณะเป็นท่อตรงมากพอที่จะทำให้โครงสร้างของระบบทางเดินหายใจมีลักษณะไม่ซับซ้อนมากนัก ดังนั้นการไหลของอากาศจึงถูกสมมติว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) และจากการศึกษาระบบทางเดินหายใจในมนุษย์ พบว่า อากาศในช่องทางเดินหายใจมีการไหลเข้าและออกตามการเปลี่ยนแปลงของความดันภายในถุงลมปอด ซึ่งค่าความดันนี้มีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะเป็น ฟังก์ชันแกว่งกวัดตามคาบของเวลา (oscillating function) ทำให้อากาศมีการไหลเข้าและออกเป็นวัฏจักร ดังนั้น การไหลของอากาศจึงถือว่ามีลักษณะเป็นการไหลแบบราบเรียบที่แกว่งกวัดตามคาบของเวลา

(oscillating flow) เราจึงสามารถอธิบายการไหลของอากาศในทางเดินหายใจนี้ได้ด้วยสมการควบคุมการไหลที่ประกอบด้วยสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งและเวลา

เนื่องจากเราจำลองปัญหานี้ในสามมิติ ตำแหน่งต่างๆในทางเดินหายใจ จึงแทนด้วยเวกเตอร์ X ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีพิกัดในทิศตามแนวนอน x แนวดิ่ง y และแนวลึก z ดังนั้นเราจึงกำหนดให้ $\mathrm{u}(t,X)$ แทนความเร็วของอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ความเร็วที่ประกอบด้วยความเร็วในทิศตามแนวนอน x แนวดิ่ง y และแนวลึก z คือ u_x, u_y และ u_z ตามลำดับ แบบจำลองการไหลของอากาศจึงสามารถแสดงโดยสมการควบคุมการไหลในระบบพิกัดฉาก ซึ่งประกอบด้วยสมการต่อไปนี้

สมการการไหลต่อเนื่อง :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{3.1}$$

สมการเนเวียร์-สโตกส์ :

$$\rho\Big(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big) \tag{3.2}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big) \tag{3.3}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big) \tag{3.4}$$

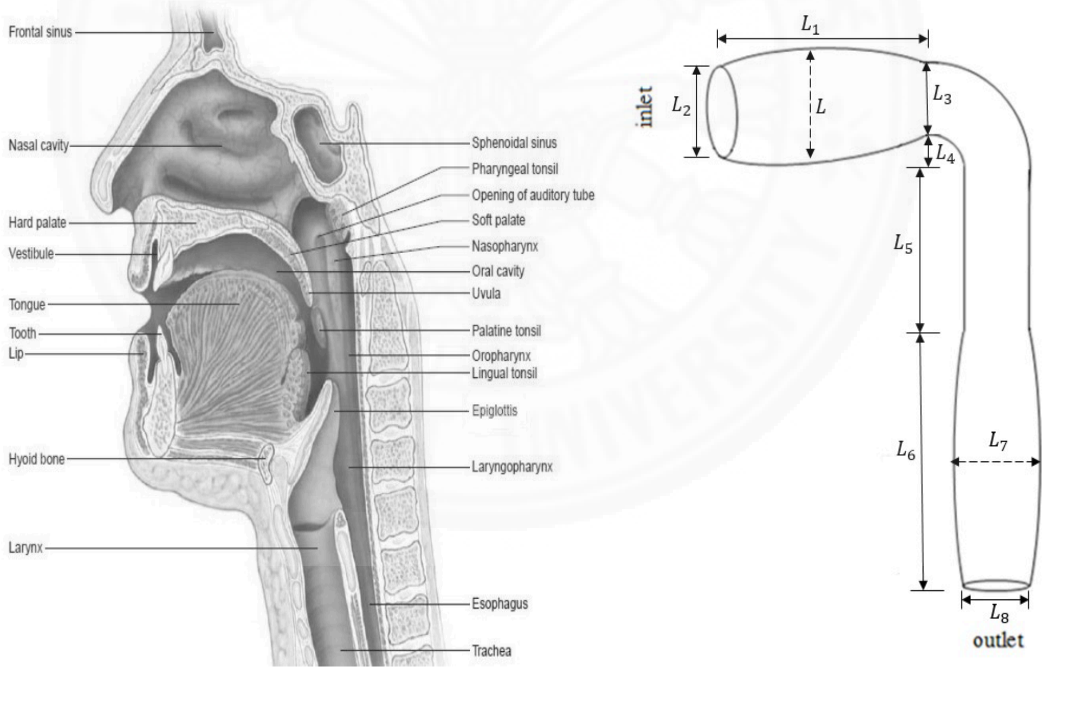
เมื่อ u_x u_y และ u_z คือ ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวนอน x แนวดิ่ง y และแนวลึก z ตามลำดับ p คือ ความดันอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ ρ และ μ คือ ความหนาแน่น และความหนืดของอากาศในทางเดินหายใจ ซึ่งมีค่าเป็น 1.148×10^{-3} กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร (g/cm^3) และ 1.82×10^{-5} ปาสคาล·วินาที $(Pa\cdot s)$ ตามลำดับ

สมการ (3.1)-(3.4) เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่แสดงการอนุรักษ์มวลโมเมนตัมและพลังงาน ซึ่งใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลสำหรับของไหลชนิดอัดไม่ได้โดยค่าของความเร็วจะเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งและเวลา ระบบสมการดังกล่าวมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ได้แก่ ค่าความเร็ว u_x, u_y, u_z และค่าความดัน p ซึ่งขั้นตอนต่อไปเราจะกำหนดบริเวณที่ใช้ทำการศึกษา พร้อมทั้งกำหนดค่าขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อใช้ในกระบวนการหาผลเฉลยของปัญหาต่อไป

3.2 บริเวณที่ใช้ทำการศึกษา

สำหรับขอบเขตของบริเวณที่ใช้ในการศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศนั้น เราจะศึกษาเฉพาะบริเวณทางเดินหายใจส่วนบน (upper respiratory tract) เท่านั้น โดยเริ่มตั้งแต่ทางเข้าของช่องปากผ่านเข้าสู่หลอดลมไปจนถึงบริเวณก่อนถึงขั้วปอดทั้งสองข้าง

ด้วยความซับซ้อนของโครงสร้างทางเดินหายใจของมนุษย์ที่แท้จริงดังภาพที่ 3.1 (ก) อันเป็นอุปสรรคในการสร้างโดเมนให้สมจริง เราจึงมองรูปทางเดินหายใจในสามมิติอย่างง่ายเพื่อสะดวกและง่ายต่อการจำลอง แต่ยังคงมีความใกล้เคียงกับความเป็นจริง โดยมองว่าในขณะที่ปากกำลังอ้าเปิดกว้างนั้น ภายในช่องปากมีลักษณะเป็นทรงรีที่มีความโค้ง และต่อกับหลอดลมเป็นท่อตรงลงมา ดังนั้นเราจึงนำเสนอแบบจำลองทางเดินหายใจส่วนบนในสามมิติดังแสดงในภาพที่ 3.1 (ข) ซึ่งในส่วนนี้เราได้ทำการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB โดยอาศัยข้อมูลทางกายภาพของโครงสร้างทางเดินหายใจของมนุษย์จากงานวิจัยของ Kongnuan และ Pholuang (2012) ดังแสดงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ไว้ในตารางที่ 3.1



(ก) (ข)

ภาพที่ 3.1 โครงสร้างทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ที่แท้จริง (ก). จาก "Hole's Essentials of Human Anatomy and Physiology," โดย Shier D. et.al และภาพจำลองทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ใน 3 มิติที่ใช้ในการศึกษา (ข)

ตารางที่ 3.1

ค่าพารามิเตอร์สำหรับการจำลองทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์

พารามิเตอร์	ค่าพารามิเตอร์ (เซนติเมตร)
ความกว้างบริเวณตรงกลางของช่องปาก , L	4.0
ความลึกของช่องปาก (oral cavity) , L_1	7.0
เส้นผ่านศูนย์กลางของทางเข้า (inlet) , L_2	3.125
เส้นผ่านศูนย์กลางของคอหอย , L_3	2.5
ระยะห่างจากหลังช่องปากก่อนถึงหลอดลมตอนต้น , L_4	1.5
ความยาวของหลอดลมตอนต้น , L_5	7.0
ความยาวของหลอดลมตอนปลาย , L_6	9.0
ความกว้างบริเวณตรงกลางของหลอดลมตอนปลาย , L_7	3.25
เส้นผ่านศูนย์กลางของทางออก (outlet) , L_8	2.0

3.3 การกำหนดค่าขอบ

เราจะเสนอแบบจำลองการไหลของอากาศที่ประกอบด้วยสมการต่อเนื่องและสมการเนเวียร์-สโตกส์ โดยกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ ดังนี้

บริเวณทางเข้า (inlet) คือทางเข้าของช่องปาก ซึ่งเป็นบริเวณที่เปิดสัมผัสกับบรรยากาศภายนอก จึงไม่มีแรงดันใด ๆ เกิดขึ้น ทำให้ความดันอากาศที่บริเวณนี้มีค่าเป็นศูนย์ (Xu, Leong, & Wang, 2008)

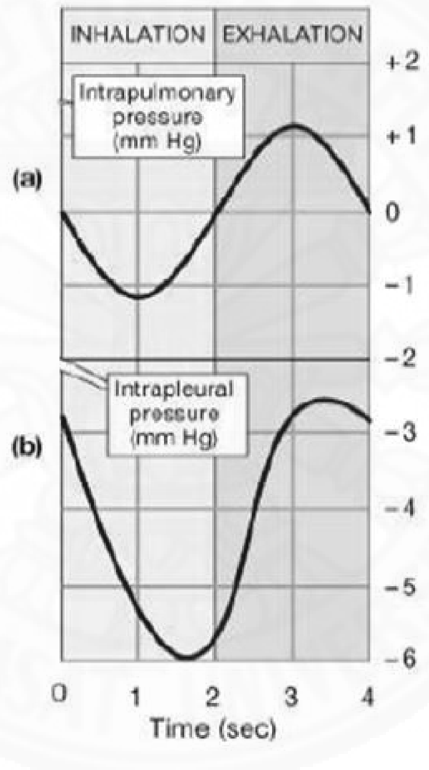
$$p = 0 \tag{3.5}$$

บริเวณผนังรอบทางเดินหายใจทั้งหมด กำหนดให้ความเร็วการไหลของอากาศสอดคล้องกับเงื่อนไขการไม่ลื่นไถล (no-slip condition) นั่นคือ เมื่ออากาศเคลื่อนที่เข้าใกล้กับผนังทางเดินหายใจ ความเร็วการไหลของอากาศจะมีค่าเป็นศูนย์ (Xu, Leong, & Wang, 2008)

$$\mathrm{u} = 0 \tag{3.6}$$

บริเวณทางออก (outlet) คือบริเวณส่วนปลายของหลอดลมซึ่งติดกับขั้วปอด เนื่องจากการหายใจเข้า-ออกของมนุษย์ เกิดขึ้นเมื่อมีการบีบรัดและคลายตัวของปอด เมื่อปอดคลายตัว ปริมาตรของอากาศ

ภายในปอดจะเพิ่มขึ้น ทำให้ความดันอากาศภายในปอดและเยื่อหุ้มปอดลดต่ำลงกว่าความดันอากาศภายนอก ส่งผลทำให้การเคลื่อนที่ของอากาศในทางเดินหายใจมีทิศพุ่งเข้าสู่ช่องปากผ่านทางเดินหายใจไปยังปอด ซึ่งก็คือ การหายใจเข้า และเมื่อปอดมีการขยายตัวเต็มที่แล้ว ปอดจะค่อยๆบีบตัวลง ทำให้ปริมาตรของอากาศภายในปอดลดลง ความดันอากาศภายในปอดและบริเวณรอบ ๆ จึงมีค่าสูงกว่าความดันอากาศภายนอก ส่งผลให้การไหลของอากาศค่อยๆเปลี่ยนทิศทางเป็นการไหลออกจากปอดไปสู่ภายนอก ซึ่งคือ การหายใจออก และหมุนเวียนเป็นวัฏจักรเช่นนี้เรื่อยไป ดังนั้น ความดันอากาศที่บริเวณทางออกซึ่งอยู่ใกล้กับขั้วปอดนี้สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันคาบของเวลา ซึ่งเราจะแทนด้วยฟังก์ชัน $p(t)$



ภาพที่ 3.2 กราฟความดันภายในปอด (a) และเยื่อหุ้มปอด (b) ในหนึ่งรอบของการหายใจ
จาก "APHNT: Respiratory Physiology Outlines," โดย Hranitz

จากกราฟของการเปลี่ยนแปลงความดันภายในถุงลมปอด ดังแสดงในภาพที่ 3.2 (a) จะเห็นได้ว่าในช่วงแรกของกราฟ ค่าความดันจะเริ่มจากศูนย์แล้วค่อย ๆ มีค่าติดลบมากขึ้นจนถึงจุดต่ำสุด และเมื่อเวลาผ่านไปค่าความดันดังกล่าวจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนเป็นศูนย์และเพิ่มมากขึ้นจนถึงจุดสูงสุด จากนั้นจึงค่อย ๆ ลดลงอีกในลักษณะแกว่งกวัดเช่นนี้เรื่อยไป ค่าความดันในบริเวณนี้จึงสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันไซน์ที่มีแอมพลิจูดเป็นลบนั่นเอง โดยในแต่ละคาบจะมีค่าความดันสูงสุดเป็น 1 มิลลิเมตรปรอท (mmHg) หรือ 133.32 ปาสคาล·วินาที ($Pa \cdot s$) อย่างไรก็ตาม จากการศึกษางานวิจัยทางการแพทย์พบว่า คาบของการหายใจของมนุษย์มี

ค่าประมาณ 4 วินาที (Zhang & Kleinstreuer, 2004, pp. 178-210) ดังนั้นเราจึงกำหนดฟังก์ชันของความดันอากาศบริเวณทางออก ดังนี้

$$p(t) = -133.32sin\left(\frac{2\pi t}{4}\right) = -Psin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \tag{3.7}$$

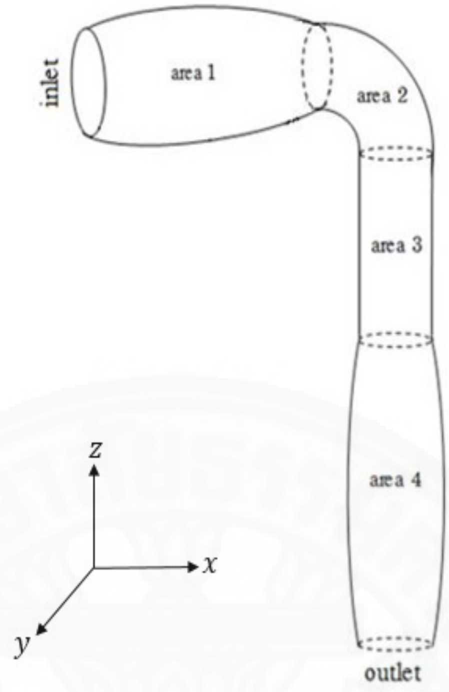
3.4 วิธีการและขั้นตอนในการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

สำหรับหัวข้อนี้จะเป็นการนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของความเร็วการไหลของอากาศตามเงื่อนไขค่าขอบที่กำหนดไว้ เพื่อนำผลเฉลยที่ได้นั้นมาจำลองและศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนแบบสามมิติ

จากสมการต่อเนื่องซึ่งแสดงในสมการที่ (3.1) และสมการเนเวียร์-สโตกส์ซึ่งแสดงในสมการที่ (3.2)–(3.4) ประกอบกับเงื่อนไขค่าขอบต่าง ๆ ดังแสดงในสมการที่ (3.5)–(3.7) ทำให้เราได้ปัญหาค่าขอบ (boundary value problem : B.V.P.) สำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งและเวลา และเนื่องจากสมการเนเวียร์-สโตกส์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equations) ปัญหานี้จึงเป็นปัญหาค่าขอบแบบไม่เชิงเส้น

แม้ว่าโดยส่วนใหญ่ปัญหาค่าขอบที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น มักจะหาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งต้องอาศัยโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพสูงในการคำนวณ แต่จากการศึกษางานวิจัยจำนวนหนึ่งพบว่า สำหรับบางเงื่อนไขสมการเนเวียร์-สโตกส์ก็สามารถหาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ เช่น การไหลผ่านช่องตรง (Tsangaris & Vlachakis, 2003) หรือกรณีที่ไม่ใช่การไหลผ่านช่องตรงก็สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้เช่นกัน แต่ก็ต้องอาศัยวิธีอื่น ๆ ร่วมด้วย เช่น วิธีการแปลง Hodograph-Legendre (Mohyuddin et al., 2008) ดังนั้นในส่วนนี้เราจะใช้วิธีการหาผลเฉลยในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบนี้ กระบวนการหาผลเฉลยเริ่มจากการอาศัยโปรแกรม MATLAB ในการสร้างโดเมนที่ใช้ทำการศึกษา โดยทำการแบ่งช่องทางเดินหายใจออกเป็น 4 บริเวณย่อยดังแสดงในภาพที่ 3.3 แล้วจึงหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับความเร็วการไหลของอากาศในทุกบริเวณที่ทำการศึกษา โดยการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของแต่ละส่วนย่อยมาประกอบกัน

สำหรับการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ในแต่ละบริเวณ เราจะทำการหาผลเฉลยของความเร็วการไหลของอากาศในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ที่แตกต่างกันออกไปขึ้นอยู่กับรูปร่างของบริเวณนั้น ๆ ซึ่งสามารถจำแนกได้ออกเป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ รูปร่างของบริเวณที่ 1 จะมีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกในแนวแกนนอน บริเวณที่ 2 มีลักษณะเป็นหนึ่งในสี่ของท่อทรงห่วงยาง ซึ่งเรียกว่า ทอรัส ส่วนบริเวณที่ 3 และ 4 จะมีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกในแนวแกนดิ่ง

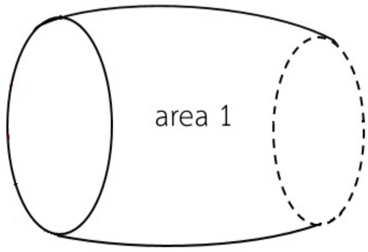


ภาพที่ 3.3 ภาพจำลองการแบ่งช่องทางเดินหายใจในสามมิติเป็น 4 บริเวณย่อย

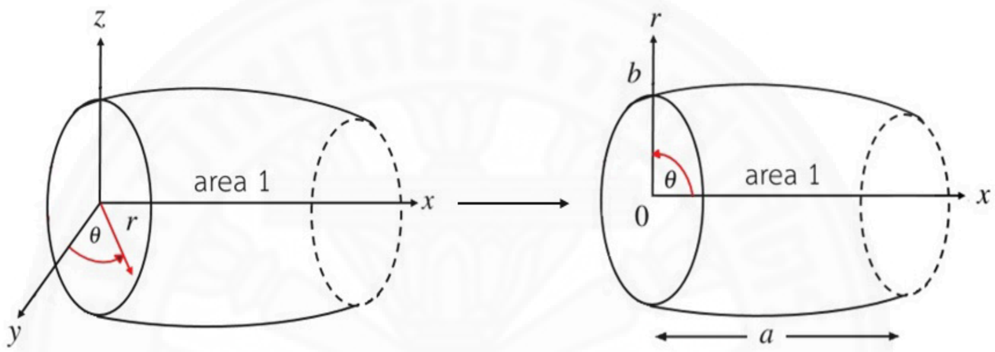
3.4.1 การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของความเร็วอากาศสำหรับบริเวณที่ 1

สำหรับวิธีการหาผลเฉลยของความเร็วการไหลของอากาศภายในช่องทางเดินหายใจบริเวณที่ 1 จะเริ่มจากการแปลงช่องทางเดินหายใจบริเวณนี้จากที่อยู่ในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก เนื่องจากรูปร่างของบริเวณที่ 1 ดังแสดงในภาพที่ 3.4 มีลักษณะคล้ายท่อทรงรี ดังนั้นเราจะสร้างสมการผิวของท่อทรงรีนี้ โดยนำสมการทรงรีมาพิจารณา นั่นคือ $\left(\frac{x'}{a_1}\right)^2+\left(\frac{y'}{b_1}\right)^2+\left(\frac{z'}{c_1}\right)^2=1$ โดยที่ $x'=x-x_1$, $y'=y-y_1$ และ $z'=z-z_1$

จากนั้นทำการแปลงสมการดังกล่าวให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยกำหนดให้ $x'=x'$, $y'=r\cos(\theta), z'=r\sin(\theta), \theta=\tan^{-1}1\left(\frac{z'}{y'}\right)$ และให้ $c_1=b_1$ สมการดังกล่าวจึงสามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบใหม่ดังนี้ : $\left(\frac{x'}{a_1}\right)^2+\left(\frac{r}{b_1}\right)^2=1$ โดยที่ $r^2=(y')^2+(z')^2$ เมื่อนำสมการที่ได้นี้ไปทำการวาดแบบจำลอง เราจะได้แบบจำลองช่องทางเดินหายใจของบริเวณที่ 1 ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังภาพที่ 3.5 (ก) และภายหลังจากการแปลงบริเวณนี้ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก จะได้รูปร่างของบริเวณที่ 1 ดังแสดงในภาพที่ 3.5 (ข) โดยแต่ละด้านถูกกำหนดด้วย $x=0, x=a=L_2, b=r(x)=b_1\sqrt{1-\left(\frac{x'}{a_1}\right)^2}$ เมื่อ $a_1=\frac{LL_1}{2\sqrt{L^2-L_2^2}}$ และ $b_1=\frac{L}{2}$



ภาพที่ 3.4 ภาพจำลองสำหรับบริเวณที่ 1



(ก) (ข)

ภาพที่ 3.5 ภาพการแปลงช่องทางเดินหายใจสำหรับบริเวณที่ 1 ในระบบพิกัดทรงกระบอก

เนื่องจากพื้นที่ในบริเวณที่ 1 มีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกตามแนวแกนนอนที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นทรงกลม จึงยากต่อการหาผลเฉลยสำหรับสมการควบคุมการไหลที่อยู่ในระบบพิกัดฉาก ดังนั้น เราจึงทำการแปลงสมการควบคุมการไหลจากระบบพิกัดฉากนี้ให้เป็นระบบพิกัดทรงกระบอกในทิศตามแนวแกนนอน ซึ่งอาศัยความรู้ในทางคณิตศาสตร์เรื่องกฎของลูกโซ่ (chain rule) โดยกำหนดให้ $x = x, y = r\cos(\theta), z = r\sin(\theta)$ โดยที่ $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ และ $\theta = \tan^{-1}(z/y)$ จากสมการที่ (3.1)-(3.4) จึงสามารถแปลงเป็นสมการควบคุมการไหลที่ประกอบด้วยสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดทรงกระบอกในทิศตามแนวแกนนอน (r, θ, x) ในรูปแบบดังนี้ สมการการไหลต่อเนื่อง :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \tag{3.8}$$

สมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดทรงกระบอกตามแนวแกนนอน :

$$\rho\Big(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}\Big)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\Big)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\Big] \quad (3.9)$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_x\frac{\partial u_\theta}{\partial x}\Big)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big)-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}\Big] \quad (3.10)$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\Big)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_x}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\Big] \quad (3.11)$$

โดยที่ u_r, u_x และ u_θ คือ ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกนรัศมี r แกนนอน x และแกนมุม θ ตามลำดับ p คือ ความดันของอากาศ ณ ตำแหน่งและเวลาใดๆ ρ และ μ คือ ความหนาแน่นและความหนืดของอากาศในทางเดินหายใจ ซึ่งมีค่าเป็น 1.148×10^{-3} กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร (g/cm^3) และ 1.82×10^{-5} ปาสคาล·วินาที $(Pa\cdot s)$ ตามลำดับ

เนื่องด้วยโครงสร้างของท่อทางเดินหายใจนี้มีลักษณะเป็นทรงกระบอกที่สมมาตรตามแนวแกน เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการจำลอง เราจึงสมมติให้การไหลของอากาศเป็นการไหลที่มีลักษณะสมมาตรตามแนวแกน (axially symmetric) นั่นคือ อากาศจะไม่มีการไหลแบบหมุนวนตามทิศมุม θ ความเร็วการไหลของอากาศในทิศตามแนวแกนมุม u_θ จึงมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้สมการที่ (3.8)-(3.11) เขียนอยู่ในรูปแบบใหม่ดังนี้

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_x}{\partial x}=0 \quad (3.12)$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\Big[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\Big] \quad (3.13)$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Big[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\Big] \quad (3.14)$$

เพื่อให้คำตอบของสมการอยู่ในรูปอย่างง่าย จึงกำหนดให้การไหลมีการพัฒนาเต็มที่ (fully developed flow) จะได้ว่า ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกน r มีค่าเป็น 0 นั่นคือ $u_r=0$ และความเร็ว

ตามแนวแกน x จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งในแนวแกน r เท่านั้น ซึ่งการไหลนี้จะสอดคล้องกับสมการการไหลต่อเนื่อง ดังสมการที่ (3.12) ดังนั้น สมการที่ (3.13) จึงไม่นำมาพิจารณา และเมื่อพิจารณาสมการที่ (3.14) ซึ่งก็คือ

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}\right]$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}\right]$$

ดังนั้น เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}\right] \tag{3.15}$$

เนื่องจากเราพิจารณาการไหลของอากาศที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของความดันแบบแกว่งกวัด (oscillating pressure gradient) ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงความดันเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของระยะตามแนวนอนมีขนาดเพิ่มขึ้นเป็น $\frac{P}{a}\sin(\omega t)$ นั่นคือ $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{P}{a}\sin(\omega t)$ และ $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ ซึ่ง $\frac{P}{a}$ คือ แอมพลิจูดของการเปลี่ยนแปลงความดัน (pressure gradient) เมื่อ a คือ ความยาวตามแนวแกนนอนของช่องทางเดินหายใจ และ ω คือ คาบของการเปลี่ยนแปลงความดันแบบแกว่งกวัด

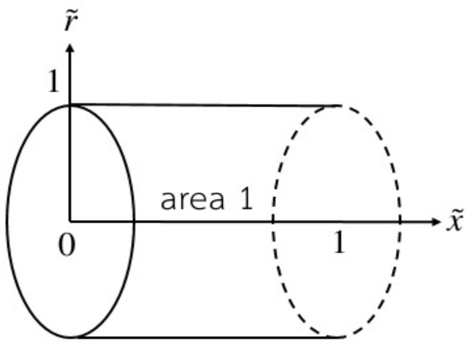
จากการศึกษางานวิจัยทางการแพทย์ (Zhang & Kleinstreuer, 2004) พบว่า คาบของการหายใจของมนุษย์มีค่าประมาณ 4 วินาที ดังนั้นเราจึงกำหนดให้คาบของการหายใจมีค่าเป็น 4 วินาที นั่นคือ $\omega=\frac{\pi}{2}$ และกำหนดให้ความเร็วที่เกิดจากการไหลของอากาศนี้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบ ซึ่งอยู่ในรูปของ

$$u_x(r,t)=u_s\sin(\omega t)+u_c\cos(\omega t) \tag{3.16}$$

โดยที่ u_s หมายถึง ความเร็วที่คูณกับ $\sin(\omega t)$ และ u_c หมายถึง ความเร็วที่คูณกับ $\cos(\omega t)$ เพื่อเป็นการหาผลเฉลยได้อย่างเที่ยงตรง เราจึงเปลี่ยนตัวแปรเหล่านี้ให้เป็นตัวแปรไร้มิติ ซึ่งจะได้

$$\tilde{r}=\frac{r}{b},\;\; \tilde{u}_x=\frac{u_x}{Pb^2}\mu a \;\text{ และ }\; \alpha=b\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

เมื่อ $b=r(x)$ คือความกว้างตามแนวรัศมี หลังจากการแปลงตัวแปรให้เป็นตัวแปรไร้มิติ รูปร่างของช่องทางเดินหายใจบริเวณนี้จะถูกแปลงให้เป็นรูปท่อทรงกระบอกดังภาพที่ 3.6



ภาพที่ 3.6 ภาพตัวอย่างของช่องทางเดินหายใจสำหรับบริเวณที่ 1 ภายหลังการแปลง

จากสมการที่ (3.16) หาอนุพันธ์เทียบกับ t จะได้

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t) \tag{3.17}$$

จากสมการที่ (3.16) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบ r จะได้

$$\frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{du_s}{dr}\sin(\omega t) + \frac{du_c}{dr}\cos(\omega t) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} = \frac{d^2 u_s}{dr^2}\sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dr^2}\cos(\omega t) \tag{3.19}$$

นำสมการที่ (3.17)-(3.19) แทนลงในสมการที่ (3.15) จะได้

$$\omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t) = -\frac{P}{\rho a}\sin(\omega t) + \frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{d^2 u_s}{dr^2}\sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dr^2}\cos(\omega t)$$

$$+\frac{1}{r}\Big(\frac{du_s}{dr}\sin(\omega t) + \frac{du_c}{dr}\cos(\omega t)\Big)\Big] \tag{3.20}$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\omega u_s = \frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{\partial^2 u_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial u_c}{\partial r}\Big)\Big] \quad \text{และ} \quad -\omega u_c = -\frac{P}{\rho a} + \frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial u_s}{\partial r}\Big)\Big] \tag{3.21}$$

คูณสมการทั้งสองสมการด้วย $\dfrac{\alpha^2}{\omega}$ ซึ่ง $\dfrac{\alpha^2}{\omega} = \dfrac{b^2}{\nu}\dfrac{\omega}{\omega} = \dfrac{b^2\rho}{\mu}$ ดังนั้น เราจะได้

$$\alpha^2 u_s = b^2\Big(\frac{\partial^2 u_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_c}{\partial r}\Big) \quad \text{และ} \quad -\alpha^2 u_c = -\frac{Pb^2}{\mu a} + b^2\Big(\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial r}\Big) \tag{3.22}$$

จากนั้นคูณสมการทั้งสองสมการด้วย $\dfrac{\mu a}{Pb^2}$ จะได้

$$\alpha^2\tilde{u}_s = \frac{\mu a}{Pb^2}b^2\left(\frac{d^2\tilde{u}_c}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_c}{d\tilde{r}}\right) \text{ และ } -\alpha^2\tilde{u}_c = -1+\frac{\mu a}{Pb^2}b^2\left(\frac{d^2\tilde{u}_s}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_s}{d\tilde{r}}\right) \quad (3.23)$$

เนื่องจาก $\dfrac{d^2u_x}{d\tilde{r}^2} = b^2\left(\dfrac{d^2u_x}{dr^2}\right)$ และ $\tilde{u}_x = \dfrac{u_x}{Pb^2}\mu a$ ดังนั้น เราจึงได้ระบบสมการเฮลม์โฮลต์ที่ไม่เป็นเอกพันธุ์ในหนึ่งมิติ (Rosu et al., 1999) ดังนี้

$$\alpha^2\tilde{u}_s = \frac{d^2\tilde{u}_c}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_c}{d\tilde{r}} \text{ และ } -\alpha^2\tilde{u}_c = -1+\frac{d^2\tilde{u}_s}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_s}{d\tilde{r}} \quad (3.24)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบสำหรับ $\tilde{u}_s$ และ $\tilde{u}_c$ เป็นเงื่อนไขการไม่ลื่นไหล ดังนี้

$$\tilde{u}_s(0)\in\mathbb{R},\ \tilde{u}_c(0)\in\mathbb{R},\ \tilde{u}_s(1)=0 \text{ และ } \tilde{u}_c(1)=0 \quad (3.25)$$

เมื่อให้ $\alpha^2 \equiv \lambda^2$ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากสมการที่ (3.24) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบดังสมการที่ (3.25) สามารถกำหนดได้ด้วยการวิเคราะห์ฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel analysis) ของ $\tilde{u}_s$ และ $\tilde{u}_c$ สำหรับ $\tilde{r}$ ดังนั้น $\tilde{u}_s, \tilde{u}_c$ และ 1 สามารถแทนได้ด้วยรูปแบบของการกระจายอนุกรมฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel expansion) ดังนี้ (Gockenbach, 2011)

$$\tilde{u}_s = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\lambda_m\tilde{r}) \quad (3.26)$$

$$\tilde{u}_c = \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0(\lambda_m\tilde{r}) \quad (3.27)$$

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m\tilde{r}) \quad (3.28)$$

เมื่อ J_0 คือฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ (Bessel function of order zero) และ λ_m คือค่ารากที่เป็นบวกของฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ซึ่งมีจำนวนไม่จำกัด $m = 1,2,3,\ldots$ โดยแสดงรายละเอียดวิธีการคำนวณดังในภาคผนวก ก กำหนดให้ J_0 แทนด้วย

$$J_0(\lambda_m\tilde{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\lambda_m\tilde{r}}{2}\right)^{2n} \quad (3.29)$$

นำสมการที่ (3.26)-(3.27) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับ $\tilde{r}$ แล้วแทนค่าลงในระบบสมการที่ (3.24) จะได้

$$\begin{aligned}
\alpha^2\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\lambda_m\tilde{r}) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0''(\lambda_m\tilde{r})\lambda_m^2 + \frac{1}{\tilde{r}}\sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0'(\lambda_m\tilde{r})\lambda_m \\
\text{และ}\quad -\alpha^2\sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0(\lambda_m\tilde{r}) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0''(\lambda_m\tilde{r})\lambda_m^2 + \frac{1}{\tilde{r}}\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0'(\lambda_m\tilde{r})\lambda_m \\
&\quad -\sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m\tilde{r})
\end{aligned} \quad (3.30)$$

จากสมการที่ (3.29) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับ $\tilde{r}$ แล้วแทนค่าลงไปในระบบสมการที่ (3.30) จากนั้นทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\alpha^2 A_m \frac{4}{(-1)(\lambda_m)^2} = B_m \lambda_m \Big(\frac{2(\lambda_m(2n-1)+1)}{n} \Big)$$

และ

$$\alpha^2 B_m = \lambda_m^3 A_m \Big(\frac{\lambda_m(2n-1)+1}{2n} \Big) + C_m \quad (3.31)$$

ดังนั้น เราจะได้ระบบสมการพีชคณิตซึ่งเป็นผลเฉลยของสัมประสิทธิ์ A_m และ B_m ดังนี้

$$A_m = -\Big(\frac{(2n)\lambda_m^3(\lambda_m(2n-1)+1)}{\alpha^4 4n^2 + [\lambda_m^3(\lambda_m(2n-1)+1)]^2} \Big) C_m$$

$$B_m = \Big(\frac{\alpha^2 4n^2}{\alpha^4 4n^2 + [\lambda_m^3(\lambda_m(2n-1)+1)]^2} \Big) C_m$$

โดย $m = 1,2,3,\ldots$ และ $n = 0,1,2,\ldots$ เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ C_m ได้ดังนี้

$$C_m = \frac{\int_0^1 J_0(\lambda_m \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r}}{\int_0^1 [J_0(\lambda_m \tilde{r})]^2 \tilde{r} d\tilde{r}} \quad ; m = 1,2,3,\ldots \quad (3.32)$$

สำหรับกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงความดันแบบแกว่งกวัด เราสามารถกำหนดรูปแบบความเร็วให้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบได้ ดังนี้

$$\tilde{u}_x = \tilde{u}_a \sin(\omega t) \quad \text{เมื่อ} \quad \tilde{u}_a = \sqrt{\tilde{u}_s^2 + \tilde{u}_c^2} \quad (3.33)$$

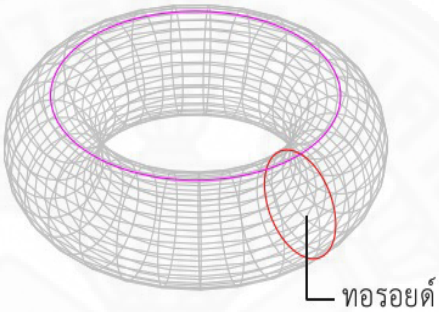
จากการศึกษางานวิจัย (Teager, 1980) พบว่าความเร็วสูงสุดสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจมีค่าประมาณ 304.8 เซนติเมตรต่อวินาที ดังนั้นเราจึงได้ความเร็วของอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ ดังนี้

$$u_x = 304.8 \tilde{u}_x \quad (3.34)$$

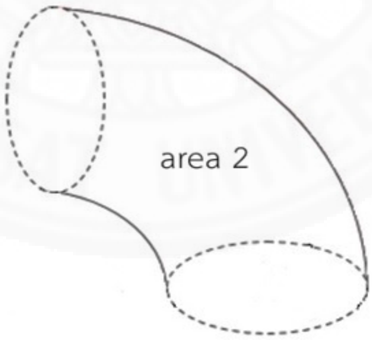
จากนั้นเราจะทำการแปลงผลเฉลยสำหรับความเร็วของอากาศที่ได้กลับไปเป็นผลเฉลยที่อยู่ในระบบพิกัดฉากโดยกำหนดให้ $u_x = u_x$, $u_y = u_r \cos(\theta)$ และ $u_z = u_r \sin(\theta)$ แทนความเร็วการไหลของอากาศในทิศตามแนวแกนนอน x แนวดิ่ง y และแนวลึก z ตามลำดับ

3.4.2 การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของความเร็วอากาศสำหรับบริเวณที่ 2

เนื่องจากพื้นที่ในบริเวณที่ 2 มีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกโค้ง ซึ่งเรามองว่าท่อนี้มีลักษณะเป็นหนึ่งในสี่ส่วนของทอรัส (torus) หรือ ทรงห่วงยางดังแสดงในภาพที่ 3.7 โดยที่ว่างซึ่งบรรจุอยู่ภายในพื้นผิวจะเรียกว่า ทอรอยด์ (toroid) ดังนั้น วิธีการหาผลเฉลยของความเร็วการไหลของอากาศสำหรับช่องทางเดินหายใจบริเวณที่ 2 จึงเริ่มจากการแปลงช่องทางเดินหายใจบริเวณบริเวณที่ 2 ดังภาพที่ 3.8 ให้อยู่ในระบบพิกัดทอรอยด์ (toroidal coordinates) ดังนี้



ภาพที่ 3.7 รูปทรงทอรัส (torus)

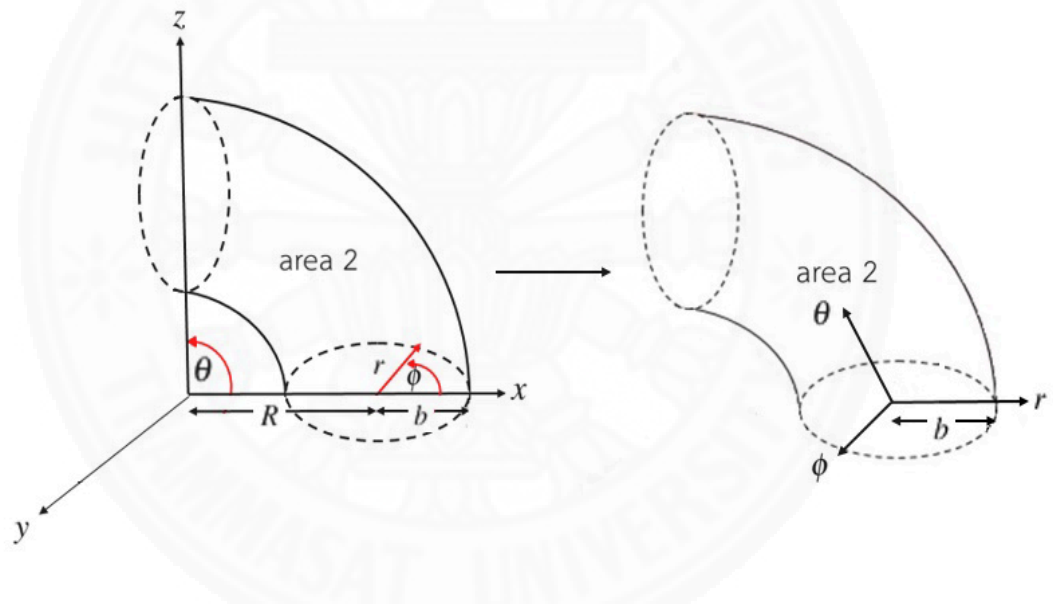


ภาพที่ 3.8 ภาพสำหรับบริเวณที่ 2

เราจะทำการแปลงช่องทางเดินหายใจบริเวณนี้ โดยนำสมการผิวของทอรัสที่มีแกน y เป็นแกนหมุนมาพิจารณา นั่นคือ $(R-\sqrt{x'^2+z'^2})^2+y'^2=r^2$ โดยที่ $x'=x-x_2$, $y'=y-y_2$ และ $z'=z-z_2$ จากนั้นทำการแปลงสมการดังกล่าวให้อยู่ในระบบพิกัดทอรอยด์ โดยกำหนดให้

$$x' = (R + r\cos\,\phi)\cos\,\theta,$$
$$z' = (R + r\cos\,\phi)\sin\,\theta,$$
$$y' = r\sin\,\phi$$

โดยที่ θ มีค่าอยู่ในช่วง $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, ϕ มีค่าอยู่ในช่วง $[0, 2\pi]$, R คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางในทอรอยด์ไปยังจุดศูนย์กลางของทอรัส และ r คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางในทอรอยด์ไปตั้งฉากกับพื้นผิว (รัศมีของทอรอยด์) เมื่อนำสมการดังกล่าวไปทำการวาดรูปแบบจำลอง เราจะได้แบบจำลองช่องทางเดินหายใจบริเวณที่ 2 ในระบบพิกัดทอรอยด์ดังแสดงในภาพที่ 3.9 (ก) และภายหลังการแปลงบริเวณนี้ให้อยู่ในระบบพิกัดทอรอยด์จะได้แบบจำลองของบริเวณที่ 2 ดังแสดงในภาพที่ 3.9 (ข) เมื่อ $b = \frac{L_3}{2}$ และ $R = \frac{L_3}{2} + L_4$



ภาพที่ 3.9 ภาพการแปลงช่องทางเดินหายใจสำหรับบริเวณที่ 2 ในระบบพิกัดทอรอยด์

จากนั้น เราจะทำการหาผลเฉลยของความเร็วในการไหลของอากาศในบริเวณที่ 2 นี้ โดยทำการแปลงสมการควบคุมการไหลที่อยู่ในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดทอรอยด์ โดยกำหนดให้ $x = (R + r\cos\,\phi)\cos\,\theta$, $z = (R + r\cos\,\phi)\sin\,\theta$, $y = r\sin\,\phi$ โดยที่ $r = \sqrt{(R - \sqrt{x^2 + z^2})^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(z/x)$ และ $\phi = \sin^{-1}(y/r)$ จากสมการที่ (3.1)-(3.4) จึงถูกแปลงเป็นสมการควบคุมการไหลที่ประกอบด้วยสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดทอรอยด์ (r, θ, ϕ) ในรูปแบบดังนี้ (Webster & Humphrey, 1997)

สมการการไหลต่อเนื่องในระบบพิกัดทอรอยด์ :

$$\frac{1}{r\xi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r\xi u_r)+\frac{\partial}{\partial \phi}(\xi u_\phi)+\frac{\partial}{\partial \theta}(r u_\theta)\Big)=0 \tag{3.35}$$

สมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดทอรอยด์ :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)u_r-\frac{u_\phi^2}{r}-\frac{\cos\phi}{\xi}u_\theta^2\\
&\quad= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\Big[\nabla^2 u_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\sin\phi}{r\xi}u_\phi\\
&\qquad+\frac{\cos\phi}{\xi^2}\Big(u_\phi\sin\phi-u_r\cos\phi-2\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_\phi}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)u_\phi-\frac{u_r u_\phi}{r}+\frac{\sin\phi}{\xi}u_\theta^2\\
&\quad= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\nu\Big[\nabla^2 u_\phi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}-\frac{u_\phi}{r^2}-\frac{\sin\phi}{r\xi}u_r\\
&\qquad-\frac{\sin\phi}{\xi^2}\Big(u_\phi\sin\phi-u_r\cos\phi-2\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)u_\theta+\frac{u_\theta}{\xi}(u_r\cos\phi-u_\phi\sin\phi)\\
&\quad= -\frac{1}{\rho}\frac{1}{\xi}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\Big[\nabla^2 u_\theta+\frac{2}{\xi^2}\Big(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\cos\phi-\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\sin\phi-\frac{u_\theta}{2}\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

โดยที่ $\xi = R+r\cos\phi,$

$$(\vec{u}\cdot\nabla) = u_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{u_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}+\frac{u_\theta}{\xi}\frac{\partial}{\partial \theta},$$

และ $$\nabla^2 = \frac{1}{r\xi}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\xi\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\Big(\xi\frac{\partial}{\partial \phi}\Big)+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(r\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)\Big]$$

เมื่อ u_r, u_ϕ และ u_θ คือ ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกนรัศมี r แกนมุม ϕ และแกนมุม θ ตามลำดับ R คือระยะจากจุดศูนย์กลางในท่อไปยังจุดศุนย์กลางของทอรัส p คือ ความดันของอากาศ ณ ตำแหน่งและเวลาใด ๆ และ $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ โดยที่ ρ และ μ คือ ความหนาแน่นและความหนืดของอากาศในทางเดินหายใจ ตามลำดับ

เนื่องจากเราสมมติให้การไหลของอากาศเป็นการไหลที่สมมาตรตามแนวแกนของท่อทางเดินหายใจ ดังนั้น อากาศจะไม่มีการไหลแบบหมุนวนตามทิศมุม ϕ ความเร็วการไหลของอากาศในทิศตามแกนมุม u_ϕ จึงมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้สมการที่ (3.35)-(3.38) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{1}{r\xi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r\xi u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(ru_\theta)\Big) = 0 \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)u_r - \frac{\cos\phi}{\xi}u_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\Big[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{\cos\phi}{\xi^2}\Big(u_r\cos\phi + 2\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\Big)\Big] \tag{3.40}$$

$$\frac{\sin\phi}{\xi}u_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\phi} + \nu\Big[\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\phi} - \frac{\sin\phi}{r\xi}u_r + \frac{\sin\phi}{\xi^2}\Big(u_r\cos\phi + 2\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\Big)\Big] \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)u_\theta + \frac{u_\theta}{\xi}(u_r\cos\phi) = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{\xi}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\Big[\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{\xi^2}\Big(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\cos\phi - \frac{u_\theta}{2}\Big)\Big] \tag{3.42}$$

เพื่อให้คำตอบของสมการอยู่ในรูปอย่างง่าย เราจึงกำหนดให้การไหลมีการพัฒนาเต็มที่ (fully developed flow) จะได้ว่า ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกน r มีค่าเป็น 0 นั่นคือ $u_r = 0$ และความเร็วตามแนวแกนมุม θ จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งในแนวแกนรัศมี r เท่านั้น ซึ่งการไหลนี้จะสอดคล้องกับสมการการไหลต่อเนื่องดังสมการที่ (3.39) ดังนั้น จากสมการที่ (3.40)-(3.42) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$-\frac{\cos\phi}{\xi}u_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{3.43}$$

$$\frac{\sin\phi}{\xi}u_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\phi} \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{\xi}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\Big[\frac{1}{r\xi}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\xi\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big) - \frac{u_\theta}{\xi^2}\Big] \tag{3.45}$$

เนื่องจากการไหลในกรณีนี้เป็นการไหลไปตามแนวท่อที่มีความโค้งตามมุม θ และเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของความดันแบบกวัดแกว่ง (oscillating pressure gradient) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันจึงขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของระยะตามมุม θ เท่านั้น นั่นคือ การเปลี่ยนแปลงของความดันจะไม่ขึ้นกับ r

และ ϕ ดังนั้น $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ และ $\frac{\partial p}{\partial \phi} = 0$ จากสมการที่ (3.43) เมื่อ $u_\theta \neq 0$ จะได้ cos $\phi = 0$ ทำให้เราได้ว่า $\xi = R + r\cos\phi = R$ และเมื่อพิจารณาสมการที่ (3.45) ซึ่งก็คือ

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho\xi}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\Big[\frac{1}{r\xi}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\xi\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big) - \frac{u_\theta}{\xi^2}\Big]$$

$$= -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\Big[\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\Big(rR\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big) - \frac{u_\theta}{R^2}\Big]$$

$$= -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\Big[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \Big(\frac{1}{rR}\frac{\partial (rR)}{\partial r}\Big)\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{R^2}\Big]$$

ดังนั้น เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\Big[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{R^2}\Big] \quad (3.46)$$

โดยที่อัตราการเปลี่ยนแปลงความดันเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของระยะมุม θ มีขนาดเพิ่มขึ้นเป็น $\frac{P}{a}\sin(\omega t)$ นั่นคือ $\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{P}{a}\sin(\omega t)$ และ $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ซึ่ง $\frac{P}{a}$ คือ แอมพลิจูดของการเปลี่ยนแปลงความดัน เมื่อ a คือ ความกว้างของมุม และ ω คือ คาบของการปลี่ยนแปลงความดันแบบกวัดแกว่ง

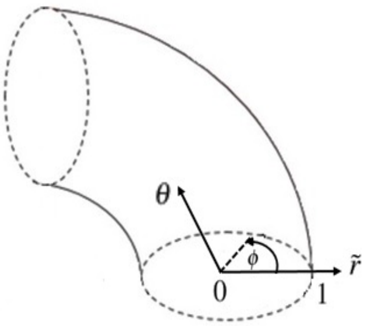
ในทำนองเดียวกันจากการศึกษางานวิจัยทางการแพทย์ (Zhang & Kleinstreuer, 2004) พบว่าคาบของการหายใจของมนุษย์มีค่าประมาณ 4 วินาที ดังนั้นเราจึงกำหนดให้คาบของการหายใจมีค่าเป็น 4 วินาที นั่นคือ $\omega = \frac{\pi}{2}$ และกำหนดให้ความเร็วที่เกิดจากการไหลของอากาศนี้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของ

$$u_\theta(r,t) = u_s\sin(\omega t) + u_c\cos(\omega t) \quad (3.47)$$

โดยที่ u_s หมายถึง ความเร็วที่คูณกับ sin(ωt) และ u_c หมายถึง ความเร็วที่คูณกับ cos(ωt) เพื่อเป็นการหาผลเฉลยได้อย่างเที่ยงตรง เราจึงเปลี่ยนตัวแปรเหล่านี้ให้เป็นตัวแปรไร้มิติ ซึ่งจะได้

$$\tilde{r} = \frac{r}{b}, \;\; \tilde{u}_\theta = \frac{u_\theta}{Pb^2}\mu a \;\; \text{และ} \;\; \alpha = b\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

เมื่อ b คือความกว้างตามแนวรัศมี หลังจากการแปลงตัวแปรให้เป็นตัวแปรไร้มิติ รูปร่างของช่องทางเดินหายใจบริเวณนี้จะถูกแปลงดังแสดงในภาพที่ 3.10



ภาพที่ 3.10 ภาพตัวอย่างของช่องทางเดินหายใจสำหรับบริเวณที่ 2 ภายหลังการแปลง

จากสมการที่ (3.47) หาอนุพันธ์เทียบกับ t จะได้

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t) \tag{3.48}$$

จากสมการที่ (3.47) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบ r จะได้

$$\frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{du_s}{dr}\sin(\omega t) + \frac{du_c}{dr}\cos(\omega t) \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} = \frac{d^2 u_s}{dr^2}\sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dr^2}\cos(\omega t) \tag{3.50}$$

นำสมการที่ (3.48)-(3.50) แทนลงในสมการที่ (3.46) จะได้

$$\omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t)$$

$$= -\frac{P\sin(\omega t)}{\rho Ra} + \frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{d^2 u_s}{dr^2}\sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dr^2}\cos(\omega t)$$

$$+\frac{1}{r}\Big(\frac{du_s}{dr}\sin(\omega t) + \frac{du_c}{dr}\cos(\omega t)\Big) - \frac{1}{R^2}\Big(u_s \sin(\omega t) + u_c \cos(\omega t)\Big)\Big] \tag{3.51}$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\omega u_s = \frac{\mu}{\rho}\Big(\frac{d^2 u_c}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_c}{dr} - \frac{u_c}{R^2}\Big) \text{ และ } -\omega u_c = -\frac{P}{\rho Ra} + \frac{\mu}{\rho}\Big(\frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_s}{dr} - \frac{u_s}{R^2}\Big) \tag{3.52}$$

คูณสมการทั้งสองสมการด้วย $\frac{\alpha^2}{\omega}$ ซึ่ง $\frac{\alpha^2}{\omega} = \frac{b^2}{\nu}\frac{\omega}{\omega} = \frac{b^2 \rho}{\mu}$ ดังนั้น เราจะได้

$$\alpha^2 u_s = b^2\Big(\frac{d^2 u_c}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_c}{dr} - \frac{u_c}{R^2}\Big) \text{ และ } -\alpha^2 u_c = -\frac{Pb^2}{\mu Ra} + b^2\Big(\frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_s}{dr} - \frac{u_s}{R^2}\Big) \tag{3.53}$$

จากนั้นคูณสมการทั้งสองสมการด้วย $\dfrac{\mu a}{Pb^2}$ จะได้

$$\alpha^2\tilde{u}_s = \frac{\mu a}{Pb^2}b^2\Big(\frac{d^2u_c}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_c}{dr}-\frac{u_c}{R^2}\Big) \text{ และ } -\alpha^2\tilde{u}_c = -\frac{1}{R}+\frac{\mu a}{Pb^2}b^2\Big(\frac{d^2u_s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_s}{dr}-\frac{u_s}{R^2}\Big)$$

เนื่องจาก $\dfrac{d^2u_\theta}{d\tilde{r}^2} = b^2\Big(\dfrac{d^2u_\theta}{dr^2}\Big)$ และ $\tilde{u}_\theta = \dfrac{u_\theta}{Pb^2}\mu a$ ดังนั้น เราจึงได้ระบบสมการเฮลม์โฮลต์ที่ไม่เป็นเอกพันธุ์ในหนึ่งมิติ (Rosu et al., 1999) ดังนี้

$$\alpha^2\tilde{u}_s = \frac{d^2\tilde{u}_c}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_c}{d\tilde{r}}-\frac{b^2}{R^2}\tilde{u}_c \text{ และ } -\alpha^2\tilde{u}_c = -\frac{1}{R}+\frac{d^2\tilde{u}_s}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_s}{d\tilde{r}}-\frac{b^2}{R^2}\tilde{u}_s \tag{3.54}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบสำหรับ $\tilde{u}_s$ และ $\tilde{u}_c$ ดังนี้

$$\tilde{u}_s(0)\in\mathbb{R},\ \tilde{u}_c(0)\in\mathbb{R},\ \tilde{u}_s(1)=0 \text{ และ } \tilde{u}_c(1)=0 \tag{3.55}$$

เมื่อให้ $\alpha^2-\frac{b^2}{R^2}\equiv\lambda^2$ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากสมการที่ (3.54) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบดังสมการที่ (3.55) สามารถกำหนดได้ด้วยการวิเคราะห์ฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel analysis) ของ $\tilde{u}_s$ และ $\tilde{u}_c$ สำหรับ $\tilde{r}$ ดังนั้น $\tilde{u}_s,\ \tilde{u}_c$ และ $\frac{1}{R}$ สามารถแทนได้ด้วยรูปแบบของการกระจายอนุกรมฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel expansion) ดังนี้ (Gockenbach, 2011)

$$\tilde{u}_s = \sum_{m=1}^{\infty} A_mJ_0(\lambda_m\tilde{r}) \tag{3.56}$$

$$\tilde{u}_c = \sum_{m=1}^{\infty} B_mJ_0(\lambda_m\tilde{r}) \tag{3.57}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{m=1}^{\infty} C_mJ_0(\lambda_m\tilde{r}) \tag{3.58}$$

เมื่อ J_0 คือฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ (Bessel function of order zero) และ λ_m คือค่ารากที่เป็นบวกของฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ซึ่งมีจำนวนไม่จำกัด $m=1,2,3,\ldots$ โดยแสดงรายละเอียดวิธีการคำนวณดังในภาคผนวก ก กำหนดให้ J_0 แทนด้วย

$$J_0(\lambda_m\tilde{r}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\Big(\frac{\lambda_m\tilde{r}}{2}\Big)^{2n} \tag{3.59}$$

นำสมการที่ (3.56)-(3.57) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับ $\tilde{r}$ แล้วแทนค่าลงในระบบสมการที่ (3.54) จะได้

$$\begin{aligned}\alpha^2\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0(\lambda_m\tilde{r}) = \sum_{m=1}^{\infty}B_m\lambda_m^2J_0''(\lambda_m\tilde{r})+\frac{1}{\tilde{r}}\sum_{m=1}^{\infty}B_m\lambda_mJ_0'(\lambda_m\tilde{r})\\ -\frac{b^2}{R^2}\sum_{m=1}^{\infty}B_mJ_0(\lambda_m\tilde{r})\end{aligned}$$

$$\text{และ} -\alpha^2\sum_{m=1}^{\infty}B_mJ_0(\lambda_m\tilde{r}) = \sum_{m=1}^{\infty}A_m\lambda_m^2J_0''(\lambda_m\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}}\sum_{m=1}^{\infty}A_m\lambda_mJ_0'(\lambda_m\tilde{r}) - \frac{b^2}{R^2}\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0(\lambda_m\tilde{r}) - \sum_{m=1}^{\infty}C_mJ_0(\lambda_m\tilde{r}) \tag{3.60}$$

จากสมการที่ (3.59) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับ $\tilde{r}$ แล้วแทนค่าลงไปในระบบสมการนี้ เมื่อทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\alpha^2A_m = -B_m\Big(\frac{R^2(\lambda_m)^3(\lambda_m(2n-1)+1)+2nb^2}{2nR^2}\Big)$$

$$\alpha^2B_m = A_m\Big(\frac{R^2(\lambda_m)^3(\lambda_m(2n-1)+1)+2nb^2}{2nR^2}\Big) + C_m$$

ดังนั้น เราจะได้ระบบสมการพีชคณิตซึ่งเป็นผลเฉลยของสัมประสิทธิ์ A_m และ B_m ดังนี้

$$A_m = \Big(\frac{-2nR^2(R^2(\lambda_m)^3(\lambda_m(2n-1)+1)+2nb^2)^2}{(4n^2\alpha^4R^2)+(R^2(\lambda_m)^3(\lambda_m(2n-1)+1)+2nb^2)^2}\Big)C_m$$

$$B_m = \Big(\frac{\alpha^2}{(4n^2\alpha^4R^2)+(R^2(\lambda_m)^3(\lambda_m(2n-1)+1)+2nb^2)^2}\Big)C_m$$

โดย $m = 1,2,3,...$ และ $n = 0,1,2,...$ เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ C_m ได้ดังนี้

$$C_m = \frac{\displaystyle\int_0^1 J_0(\lambda_m\tilde{r})\tilde{r}d\tilde{r}}{\displaystyle\int_0^1 [J_0(\lambda_m\tilde{r})]^2\tilde{r}d\tilde{r}} \quad ;m = 1,2,3,... \tag{3.61}$$

สำหรับกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงความดันแบบแกว่งกวัด เราสามารถกำหนดรูปแบบความเร็วให้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบได้ดังนี้

$$\tilde{u}_\theta = \tilde{u}_a\sin(\omega t) \ \text{ เมื่อ } \ \tilde{u}_a = \sqrt{\tilde{u}_s^2+\tilde{u}_c^2} \tag{3.62}$$

เนื่องด้วยจากการศึกษางานวิจัย (Teager, 1980) พบว่าความเร็วสูงสุดสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจมีค่าประมาณ 304.8 เซนติเมตรต่อวินาที ดังนั้นเราจึงได้ความเร็วการไหลของอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ ดังนี้

$$u_\theta = 304.8\tilde{u}_\theta \tag{3.63}$$

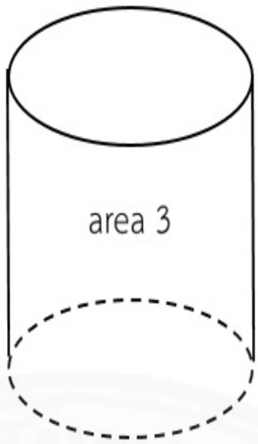
จากนั้นเราทำการแปลงผลเฉลยสำหรับความเร็วของอากาศที่ได้กลับไปเป็นผลเฉลยที่อยู่ในระบบพิกัดฉาก โดยกำหนดให้ $u_x = u_\theta\sin(\theta)$, $u_y = 0$ และ $u_z = -u_\theta\cos(\theta)$ แทนความเร็วการไหลของอากาศในทิศตามแนวแกนนอน x แนวดิ่ง y และแนวลึก z ตามลำดับ

3.4.3 การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของความเร็วอากาศสำหรับบริเวณที่ 3-4

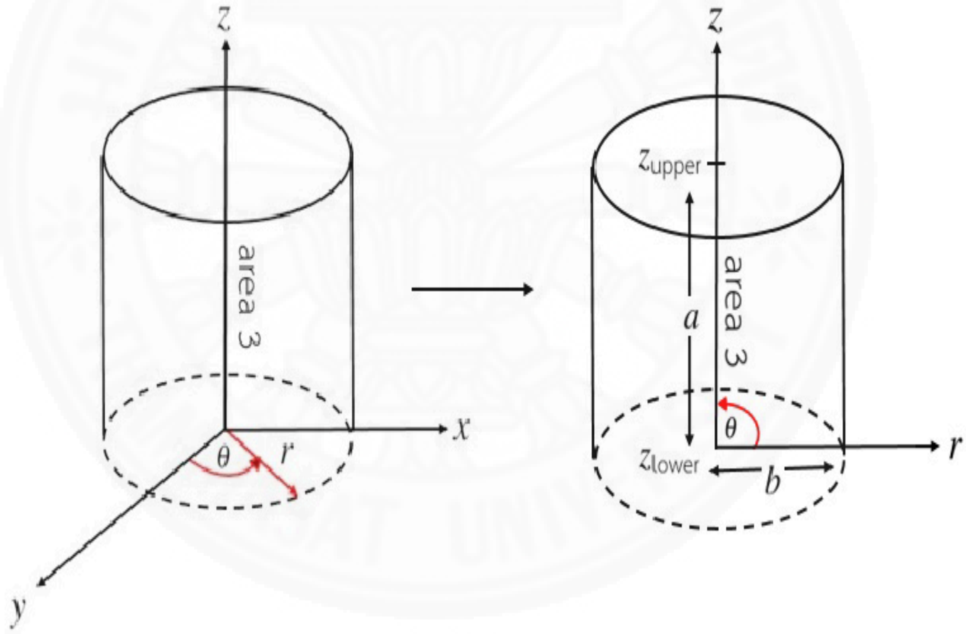
เนื่องจากพื้นที่ในบริเวณที่ 3-4 จะมีลักษณะคล้ายกัน คือมีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกที่อยู่ในทิศตามแนวแกนตั้ง ดังนั้น เราจึงใช้วิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับความเร็วการไหลของอากาศภายในช่องทางเดินหายใจบริเวณที่ 3 และบริเวณที่ 4 ในรูปแบบเดียวกัน โดยจะเริ่มจากการแปลงช่องทางเดินหายใจทั้งสองบริเวณนี้จากที่อยู่ในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังต่อไปนี้

สำหรับรูปร่างของบริเวณที่ 3 ดังแสดงในภาพที่ 3.11 มีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอก เราจึงสร้างสมการผิวของท่อทรงกระบอกนี้ โดยนำสมการทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมมาพิจารณา นั่นคือ $x'^2+y'^2=\left(\frac{L_3}{2}\right)^2$ โดยที่ $x'=x-x_3$ และ $y'=y-y_3$ จากนั้นทำการแปลงสมการดังกล่าวให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยกำหนดให้ $x'=r\sin(\theta)$, $y'=r\cos(\theta)$ โดยที่ $r=\sqrt{x'^2+y'^2}$ และ $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x'}{y'}\right)$ เมื่อนำสมการไปที่ได้นี้ไปทำการวาดรูปแบบจำลอง เราจะได้แบบจำลองช่องทางเดินหายใจบริเวณที่ 3 ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังภาพที่ 3.12 (ก) และภายหลังจากการแปลงบริเวณนี้ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก จะได้ภาพจำลองของบริเวณที่ 3 ดังแสดงในภาพที่ 3.12 (ข) โดยแต่ละด้านถูกกำหนดด้วย $z=z_{\text{upper}}=L_6+L_5$, $z=z_{\text{lower}}=L_6$ และ $b=\frac{L_3}{2}$

และสำหรับรูปร่างของบริเวณที่ 4 ดังแสดงในภาพที่ 3.13 จะมีลักษณะคล้ายท่อทรงรี เราจึงสร้างสมการผิวของท่อทรงรีนี้ โดยนำสมการทรงรีมาพิจารณา นั่นคือ $\left(\frac{x'}{a_4}\right)^2+\left(\frac{y'}{b_4}\right)^2+\left(\frac{z'}{c_4}\right)^2=1$ โดยที่ $x'=x-x_4$, $y'=y-y_4$ และ $z'=z-z_4$ จากนั้นทำการแปลงสมการดังกล่าวให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก โดยกำหนดให้ $x'=r\sin(\theta)$, $y'=r\cos(\theta)$, $z'=z'$, $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x'}{y'}\right)$ และให้ $a_4=b_4$ สมการดังกล่าวจึงสามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบใหม่ดังนี้ : $\left(\frac{z'}{c_4}\right)^2+\left(\frac{r}{b_4}\right)^2=1$ โดยที่ $r^2=(x')^2+(y')^2$ เมื่อนำสมการที่ได้นี้ไปทำการวาดแบบจำลอง เราจะได้แบบจำลองช่องทางเดินหายใจของบริเวณที่ 4 ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังภาพที่ 3.14 (ก) และภายหลังจากการแปลงบริเวณนี้ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก จะได้รูปร่างของบริเวณที่ 4 ดังแสดงในภาพที่ 3.14 (ข) โดยแต่ละด้านถูกกำหนดด้วย $z=z_{\text{upper}}=L_6$, $z=z_{\text{lower}}=0$, $b=r(x)=b_4\sqrt{1-\left(\frac{z'}{c_4}\right)^2}$ เมื่อ $c_4=\sqrt{(\frac{L_6}{2})^2\Big/1-\left(\frac{L_3}{L_7}\right)^2}$ และ $b_4=\frac{L_7}{2}$



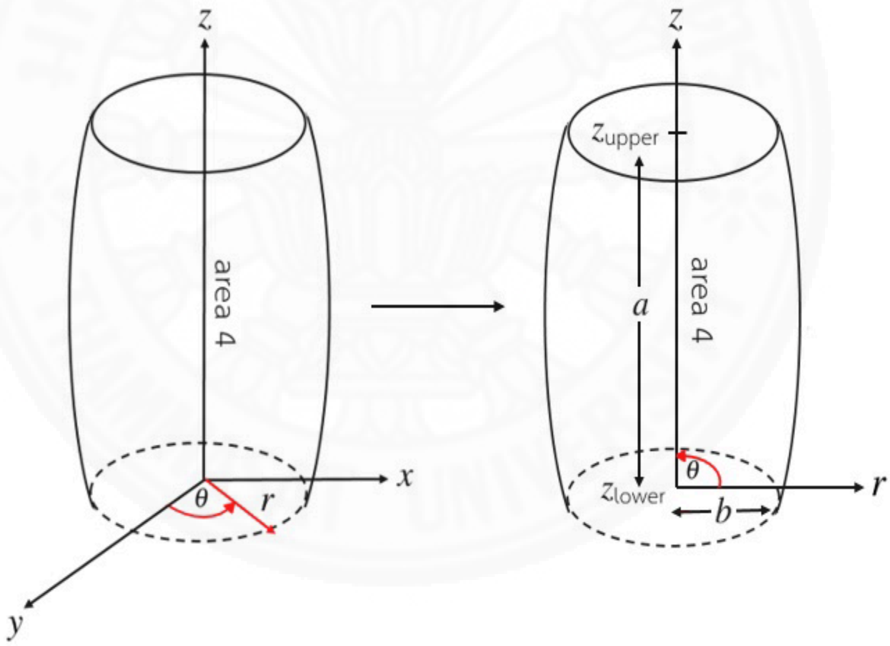
ภาพที่ 3.11 ภาพสำหรับบริเวณที่ 3



(ก) (ข)

ภาพที่ 3.12 ภาพการแปลงช่องทางเดินหายใจสำหรับบริเวณที่ 3 ในระบบพิกัดทรงกระบอก

ภาพที่ 3.13 ภาพสำหรับบริเวณที่ 4



(ก) (ข)

ภาพที่ 3.14 ภาพการแปลงช่องทางเดินหายใจสำหรับบริเวณที่ 4 ในระบบพิกัดทรงกระบอก

เนื่องจากพื้นที่ในบริเวณที่ 3-4 มีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกในทิศตามแนวแกนตั้งที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นทรงกลม จึงยากต่อการหาผลเฉลยสำหรับสมการควบคุมการไหลที่อยู่ในระบบพิกัดฉาก ดังนั้นเราจึงทำการแปลงสมการควบคุมการไหลจากระบบพิกัดฉากนี้ให้เป็นระบบพิกัดทรงกระบอกในทิศตามแนวแกนตั้ง ซึ่งอาศัยความรู้ในทางคณิตศาสตร์เรื่องกฎของลูกโซ่ (chain rule) โดยกำหนดให้ $x = r\sin(\theta), y = r\cos(\theta), z = z$ โดยที่ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ และ $\theta = \tan^{-1}(x/y)$ จากสมการที่ (3.1)-(3.4) จึงสามารถแปลงเป็นสมการควบคุมการไหลที่ประกอบด้วยสมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดทรงกระบอกตามแนวแกนตั้ง (r, θ, z) ในรูปแบบดังนี้

สมการการไหลต่อเนื่อง :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{3.64}$$

สมการเนเวียร์-สโตกส์ในระบบพิกัดทรงกระบอกตามแนวแกนตั้ง :

$$\rho\Big(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\Big)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\Big) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\Big] \tag{3.65}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\Big)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\Big] \tag{3.66}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big] \tag{3.67}$$

โดยที่ u_r, u_z และ u_θ คือ ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกนรัศมี r แกนตั้ง z และแกนมุม θ ตามลำดับ p คือ ความดันของอากาศ ณ ตำแหน่งและเวลาใด ๆ ρ และ μ คือ ความหนาแน่นและความหนืดของอากาศในทางเดินหายใจ ซึ่งมีค่าเป็น 1.148×10^{-3} กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร (g/cm^3) และ 1.82×10^{-5} ปาสคาล·วินาที $(Pa \cdot s)$ ตามลำดับ

เนื่องด้วยโครงสร้างของท่อทางเดินหายใจนี้มีลักษณะเป็นทรงกระบอกที่สมมาตรตามแนวตั้ง เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการจำลอง เราจึงสมมติให้การไหลของอากาศเป็นการไหลที่มีลักษณะสมมาตรตามแนวแกน (axially symmetric) นั่นคือ อากาศจะไม่มีการไหลแบบหมุนวนตามทิศมุม θ ความเร็วการไหลของอากาศในทิศตามแกนมุม u_θ จึงมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้สมการที่ (3.64)-(3.67) เขียนอยู่ในรูปแบบใหม่ดังนี้

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{3.68}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\Big[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\Big] \tag{3.69}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Big[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big] \tag{3.70}$$

เพื่อให้คำตอบของสมการอยู่ในรูปอย่างง่าย จึงกำหนดให้การไหลมีการพัฒนาเต็มที่ (fully developed flow) จะได้ว่า ความเร็วของอากาศในทิศตามแนวแกน r มีค่าเป็น 0 นั่นคือ $u_r=0$ และความเร็วตามแนวแกน z จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งในแนวแกน r เท่านั้น ซึ่งการไหลนี้จะสอดคล้องกับสมการการไหลต่อเนื่องดังสมการที่ (3.68) ดังนั้น สมการที่ (3.69) จึงไม่นำมาพิจารณา และเมื่อพิจารณาสมการที่ (3.70) ซึ่งก็คือ

$$\rho\Big(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Big[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big]$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_z}{\partial t}\Big)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Big[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big]$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big]$$

ดังนั้น เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือ

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Big[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big] \tag{3.71}$$

เนื่องจากเราพิจารณาการไหลของอากาศที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของความดันแบบแกว่งกวัด (oscillating pressure gradient) ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงความดันเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของระยะตามแนวตั้งมีขนาดลดลงเป็น $\frac{P}{a}\sin(\omega t)$ นั่นคือ $\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{P}{a}\sin(\omega t)$ และ $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ ซึ่ง $\frac{P}{a}$ คือ แอมพลิจูดของการเปลี่ยนแปลงความดัน (pressure gradient) เมื่อ $a=z_{\text{upper}}-z_{\text{lower}}$ คือ ความยาวตามแนวแกนตั้งของช่องทางเดินหายใจ และ ω คือ คาบของการเปลี่ยนแปลงความดันแบบแกว่งกวัด

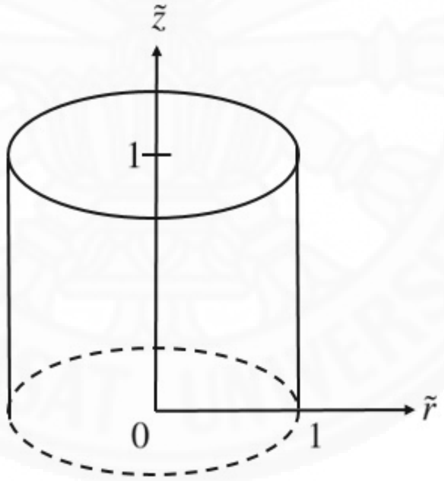
ในทำนองเดียวกัน จากการศึกษางานวิจัยทางการแพทย์ (Zhang & Kleinstreuer, 2004) พบว่า คาบของการหายใจของมนุษย์มีค่าประมาณ 4 วินาที ดังนั้นเราจึงกำหนดให้คาบของการหายใจมีค่าเป็น 4 วินาที นั่นคือ $\omega = \frac{\pi}{2}$ และกำหนดให้ความเร็วที่เกิดจากการไหลของอากาศนี้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของ

$$u_z(r,t) = u_s \sin(\omega t) + u_c \cos(\omega t) \tag{3.72}$$

โดยที่ u_s หมายถึง ความเร็วที่คูณกับ $\sin(\omega t)$ และ u_c หมายถึง ความเร็วที่คูณกับ $\cos(\omega t)$ เพื่อเป็นการหาผลเฉลยได้อย่างเที่ยงตรง เราจึงเปลี่ยนตัวแปรเหล่านี้ให้เป็นตัวแปรไร้มิติ ซึ่งจะได้

$$\tilde{r} = \frac{r}{b},\ \ \tilde{u}_z = \frac{u_z}{Pb^2}\mu a \ \text{ และ } \ \alpha = b\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

เมื่อ b คือความกว้างตามแนวรัศมี หลังจากการแปลงตัวแปรให้เป็นตัวแปรไร้มิติ รูปร่างของช่องทางเดินหายใจบริเวณที่ 3-4 จะถูกแปลงให้เป็นรูปท่อทรงกระบอกดังภาพที่ 3.15



ภาพที่ 3.15 ภาพตัวอย่างของช่องทางเดินหายใจสำหรับบริเวณที่ 3-4 ภายหลังการแปลง

จากสมการที่ (3.72) หาอนุพันธ์เทียบกับ t จะได้

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t) \tag{3.73}$$

จากสมการที่ (3.72) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบ r จะได้

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{du_s}{dr}\sin(\omega t) + \frac{du_c}{dr}\cos(\omega t) \tag{3.74}$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = \frac{d^2 u_s}{dr^2}\sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dr^2}\cos(\omega t) \tag{3.75}$$

นำสมการที่ (3.72)-(3.75) แทนลงในสมการที่ (3.71) จะได้

$$\omega u_s \cos(\omega t) - \omega u_c \sin(\omega t) = \frac{P}{\rho a}\sin(\omega t) + \frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{d^2 u_s}{dr^2}\sin(\omega t) + \frac{d^2 u_c}{dr^2}\cos(\omega t)$$

$$+ \frac{1}{r}\Big(\frac{du_s}{dr}\sin(\omega t) + \frac{du_c}{dr}\cos(\omega t)\Big)\Big] \tag{3.76}$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\omega u_s = \frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{\partial^2 u_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial u_c}{\partial r}\Big)\Big] \text{ และ } -\omega u_c = \frac{P}{\rho a} + \frac{\mu}{\rho}\Big[\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial u_s}{\partial r}\Big)\Big] \tag{3.77}$$

คูณสมการทั้งสองสมการด้วย $\frac{\alpha^2}{\omega}$ ซึ่ง $\frac{\alpha^2}{\omega} = \frac{b^2}{\nu}\frac{\omega}{\omega} = \frac{b^2\rho}{\mu}$ ดังนั้น เราจะได้

$$\alpha^2 u_s = b^2\Big(\frac{\partial^2 u_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_c}{\partial r}\Big) \text{ และ } -\alpha^2 u_c = \frac{Pb^2}{\mu a} + b^2\Big(\frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial r}\Big) \tag{3.78}$$

จากนั้นคูณสมการทั้งสองสมการด้วย $\frac{\mu a}{Pb^2}$ จะได้

$$\alpha^2 \tilde{u}_s = \frac{\mu a}{Pb^2}b^2\Big(\frac{d^2\tilde{u}_c}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_c}{d\tilde{r}}\Big) \text{ และ } -\alpha^2 \tilde{u}_c = 1 + \frac{\mu a}{Pb^2}b^2\Big(\frac{d^2\tilde{u}_s}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_s}{d\tilde{r}}\Big) \tag{3.79}$$

เนื่องจาก $\frac{d^2 u_z}{d\tilde{r}^2} = b^2\Big(\frac{d^2 u_z}{dr^2}\Big)$ และ $\tilde{u}_z = \frac{u_z}{Pb^2}\mu a$ ดังนั้น เราจึงได้ระบบสมการเฮลม์โฮลต์ที่ไม่เป็นเอกพันธุ์ในหนึ่งมิติ (Rosu et al., 1999) ดังนี้

$$\alpha^2 \tilde{u}_s = \frac{d^2\tilde{u}_c}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_c}{d\tilde{r}} \text{ และ } -\alpha^2 \tilde{u}_c = 1 + \frac{d^2\tilde{u}_s}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}_s}{d\tilde{r}} \tag{3.80}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบสำหรับ $\tilde{u}_s$ และ $\tilde{u}_c$ เป็นเงื่อนไขการไม่ลื่นไหล ดังนี้

$$\tilde{u}_s(0) \in \mathbb{R},\ \tilde{u}_c(0) \in \mathbb{R},\ \tilde{u}_s(1) = 0 \text{ และ } \tilde{u}_c(1) = 0 \tag{3.81}$$

เมื่อให้ $\alpha^2 \equiv \lambda^2$ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากสมการที่ (3.80) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบในสมการที่ (3.81) สามารถกำหนดได้ด้วยการวิเคราะห์ฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel analysis) ของ $\tilde{u}_s$ และ

$\tilde{u}_c$ สำหรับ $\tilde{r}$ ดังนั้น $\tilde{u}_s$, $\tilde{u}_c$ และ 1 สามารถแทนได้ด้วยรูปแบบของการกระจายอนุกรมฟูเรียร์เบสเซล (Fourier-Bessel expansion) ดังนี้ (Gockenbach, 2011)

$$\tilde{u}_s = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\lambda_m \tilde{r}) \tag{3.82}$$

$$\tilde{u}_c = \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0(\lambda_m \tilde{r}) \tag{3.83}$$

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m \tilde{r}) \tag{3.84}$$

เมื่อ J_0 คือฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ (Bessel function of order zero) และ λ_m คือค่ารากที่เป็นบวกของฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ซึ่งมีจำนวนไม่จำกัด $m = 1, 2, 3, \ldots$ โดยแสดงรายละเอียดวิธีการคำนวณดังในภาคผนวก ก กำหนดให้ J_0 แทนด้วย

$$J_0(\lambda_m \tilde{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \Big(\frac{\lambda_m \tilde{r}}{2}\Big)^{2n} \tag{3.85}$$

นำสมการที่ (3.82)-(3.84) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับ $\tilde{r}$ แล้วแทนค่าลงในระบบสมการที่ (3.80) จะได้

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\lambda_m \tilde{r}) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0^{''}(\lambda_m \tilde{r}) \lambda_m^2 + \frac{1}{\tilde{r}} \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0^{'}(\lambda_m \tilde{r}) \lambda_m \\ \text{และ} \quad -\alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0(\lambda_m \tilde{r}) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0^{''}(\lambda_m \tilde{r}) \lambda_m^2 + \frac{1}{\tilde{r}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0^{'}(\lambda_m \tilde{r}) \lambda_m \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m \tilde{r}) \end{aligned} \tag{3.86}$$

จากสมการที่ (3.85) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองเทียบกับ $\tilde{r}$ แล้วแทนค่าลงไปในระบบสมการที่ (3.86) จากนั้นทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$\begin{aligned} \alpha^2 A_m \frac{4}{(-1)(\lambda_m)^2} &= B_m \lambda_m \Big(\frac{2(\lambda_m(2n-1)+1)}{n}\Big) \\ \alpha^2 B_m &= \lambda_m^3 A_m \Big(\frac{\lambda_m(2n-1)+1}{2n}\Big) - C_m \end{aligned} \tag{3.87}$$

ดังนั้น เราจะได้ระบบสมการพีชคณิตซึ่งเป็นผลเฉลยของสัมประสิทธิ์ A_m และ B_m ดังนี้

$$\begin{aligned} A_m &= \Big(\frac{(2n)\lambda_m^3(\lambda_m(2n-1)+1)}{\alpha^4 4n^2 + [\lambda_m^3(\lambda_m(2n-1)+1)]^2}\Big) C_m \\ B_m &= \Big(\frac{-\alpha^2 4n^2}{\alpha^4 4n^2 + [\lambda_m^3(\lambda_m(2n-1)+1)]^2}\Big) C_m \end{aligned} \tag{3.88}$$

โดย $m = 1,2,3,...$ และ $n = 0,1,2,...$ เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ C_m ได้ดังนี้

$$C_m = \frac{\int_0^1 J_0(\lambda_m \tilde{r})\tilde{r}d\tilde{r}}{\int_0^1 [J_0(\lambda_m \tilde{r})]^2 \tilde{r}d\tilde{r}} \quad ; m = 1,2,3,... \tag{3.89}$$

สำหรับกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงความดันแบบแกว่งกวัด เราสามารถกำหนดรูปแบบความเร็วให้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบได้ ดังนี้

$$\tilde{u}_z = \tilde{u}_a \sin(\omega t) \text{ เมื่อ } \tilde{u}_a = \sqrt{\tilde{u}_s^2 + \tilde{u}_c^2} \tag{3.90}$$

จากการศึกษางานวิจัย (Teager, 1980) พบว่าความเร็วสูงสุดสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจมีค่าประมาณ 304.8 เซนติเมตรต่อวินาที ดังนั้น เราจึงได้ความเร็วของอากาศที่ตำแหน่งและเวลาใด ๆ ดังนี้

$$u_z = 304.8\tilde{u}_z \tag{3.91}$$

จากนั้นเราจะทำการแปลงผลเฉลยสำหรับความเร็วของอากาศที่ได้กลับไปเป็นผลเฉลยที่อยู่ในระบบพิกัดฉาก โดยกำหนดให้ $u_x = u_r \sin(\theta)$, $u_y = u_r \cos(\theta)$ และ $u_z = u_z$ แทนความเร็วการไหลของอากาศในทิศตามแนวแกนนอน x แนวดิ่ง y และแนวลึก z ตามลำดับ

จากหัวข้อย่อยที่ 3.4.1-3.4.3 เราได้ทำการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับความเร็วการไหลของอากาศในแต่ละบริเวณย่อยครบทั้ง 4 บริเวณของแบบจำลองทางเดินหายใจส่วนบนแล้ว เราจะนำผลเฉลยในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ที่ได้นั้นมาเขียนโปรแกรมเพื่อจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบน โดยอาศัยโปรแกรม MATLAB ซึ่งเราจะแสดงผลการจำลองที่ได้ในหัวข้อถัดไป

บทที่ 4

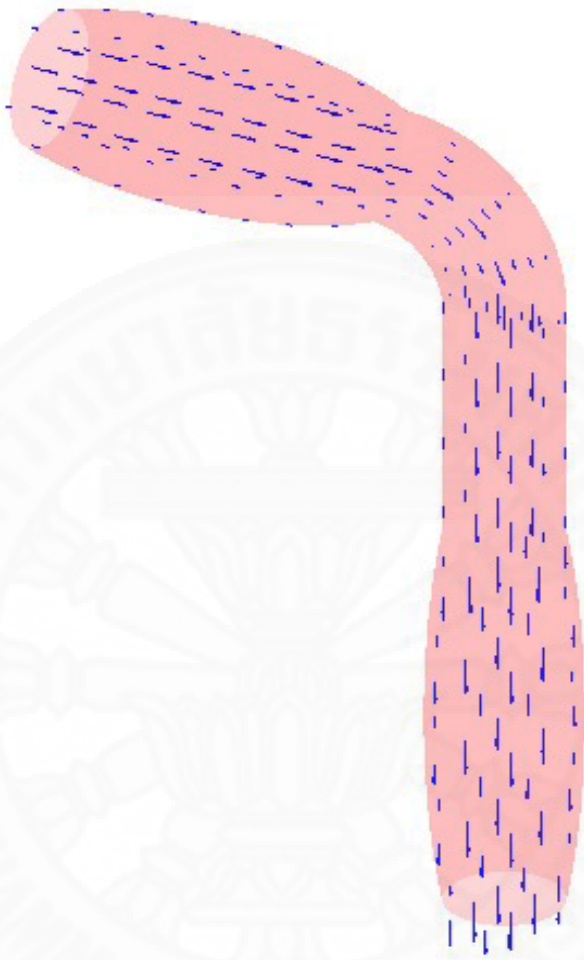
การจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

สำหรับการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ เราจะนำเสนอผลการจำลองการไหลของอากาศโดยแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ การจำลองใน รูปแบบแผนภาพลูกศร (arrow plot) และแบบแผนภาพโครงร่าง (contour plot) เพื่อแสดงทิศทางและขนาดของความเร็วในการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ณ เวลาต่าง ๆ ตามลำดับ

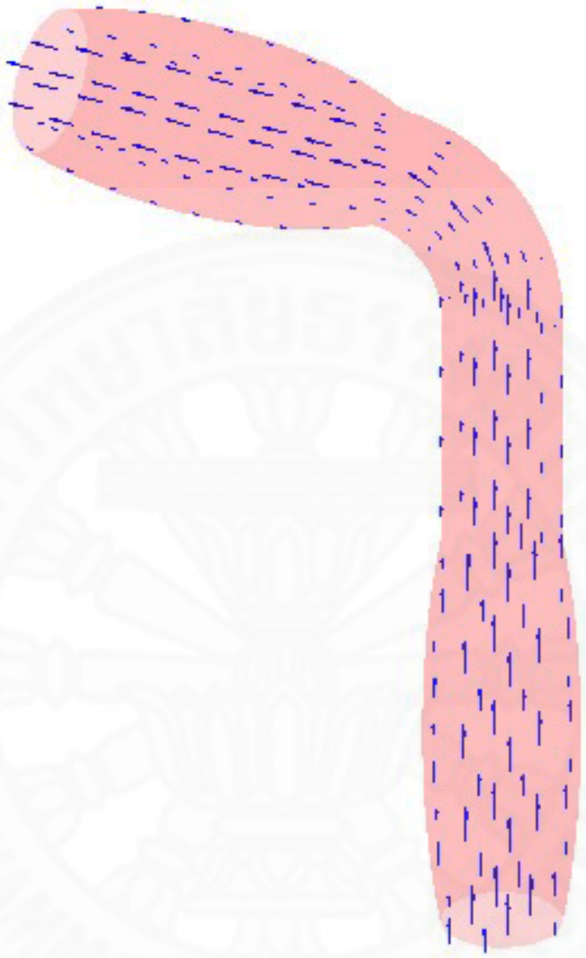
4.1 การจำลองในรูปแบบแผนภาพลูกศร

เพื่อจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจที่สมจริง เราจึงนำเสนอการจำลองในรูปแบบแผนภาพลูกศร 3 มิติ (3D arrow plot) ดังแสดงในภาพที่ 4.1 - 4.2 เมื่อพิจารณาภาพที่ 4.1 ซึ่งแสดงทิศทางการไหลของอากาศแบบแผนภาพลูกศรสามมิติ เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที พบว่า อากาศมีทิศทางการไหลจากภายนอกเข้าสู่ท่อทางเดินหายใจซึ่งสอดคล้องกับสภาวะที่ปอดมีการคลายตัว (pulmonary relaxation) ทำให้ปริมาตรของอากาศภายในปอดเพิ่มขึ้น ส่งผลให้ความดันภายในปอดลดลง และในทางตรงกันข้าม เมื่อพิจารณาภาพที่ 4.2 พบว่า เมื่อเวลาผ่านไป 2.5 วินาที อากาศมีการเปลี่ยนทิศทางการไหลเป็นการไหลออกจากท่อทางเดินหายใจซึ่งสอดคล้องกับสภาวะที่ปอดมีการบีบตัว (pulmonary contraction) ทำให้ปริมาตรของอากาศภายในปอดลดลง ส่งผลให้ความดันภายในปอดเพิ่มขึ้น จึงทำให้อากาศมีการเปลี่ยนทิศทางการไหล นอกจากนี้ เมื่อเปรียบเทียบขนาดของลูกศร ซึ่งบ่งบอกถึงขนาดของความเร็ว พบว่า ความเร็วการไหลของอากาศที่ตำแหน่งเดียวกัน จะมีขนาดและทิศทางต่างกันด้วย โดยในแต่ละช่วงเวลาความเร็วจะมีขนาดโตที่สุดที่บริเวณแกนกลางของท่อทางเดินหายใจแล้วลดลงตามสัดส่วนจนมีขนาดน้อยมากเมื่อเข้าใกล้กับผนังทางเดินหายใจ

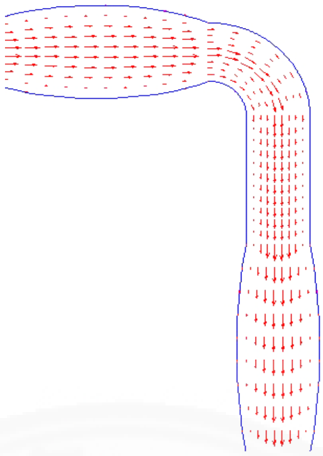
อย่างไรก็ตาม เพื่อให้มองสนามการไหลของอากาศที่ชัดเจนมากขึ้น เราจึงนำเสนอการจำลองภาพทางเดินหายใจในระนาบ xz ซึ่งเป็นบริเวณระนาบแกนกลางของท่อทางเดินหายใจ $(y' = 0)$ โดยแสดงทิศทางการไหลของอากาศในรูปแบบแผนภาพลูกศร เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที 2.05 วินาที และ 2.5 วินาที ดังแสดงในภาพที่ 4.3 (ก)-(ค) ตามลำดับ จากผลการจำลองพบว่า เมื่อเวลา 1.4 วินาทีและ 2.5 วินาที ดังภาพที่ 4.3 (ก) และ (ค) พบว่าความเร็วการไหลของอากาศมีการเปลี่ยนแปลงสูงเมื่อเข้าใกล้ผนัง ในขณะที่ความเร็วการไหลของอากาศมีการเปลี่ยนแปลงต่ำที่บริเวณแนวแกนกลางของท่อทางเดินหายใจ โดยขนาดของความเร็วจะมีค่าสูงสุดที่บริเวณแนวแกนกลาง จากนั้นจะมีขนาดลดลงตามสัดส่วนและมีค่าน้อยมากจนเป็นศูนย์ที่ผนัง สำหรับเวลา 2.05 วินาที ดังภาพที่ 4.3 (ข) ซึ่งเป็นช่วงเวลาที่อากาศกำลังจะมีการเปลี่ยนทิศทางการไหลเป็นการไหลออกจากระบบทางเดินหายใจ ดังนั้นจึงพบว่าขนาดของความเร็วมีค่าน้อยกว่าช่วงเวลาอื่น



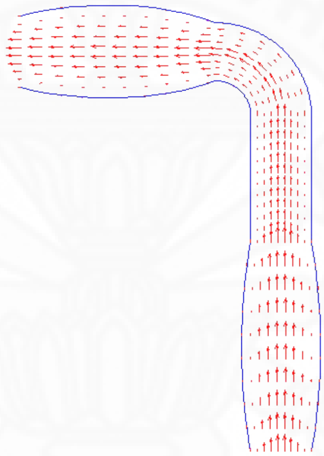
ภาพที่ 4.1 แสดงทิศทางการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแบบแผนภาพลูกศร 3 มิติ เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที



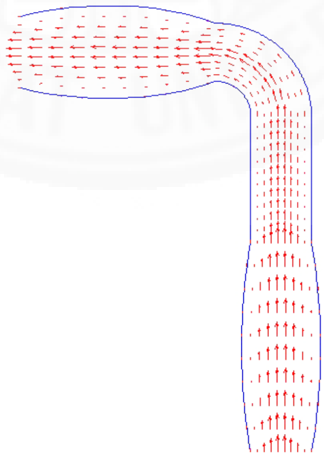
ภาพที่ 4.2 แสดงทิศทางการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแบบแผนภาพลูกศร 3 มิติ เมื่อเวลาผ่านไป 2.5 วินาที



(ก) 1.4 วินาที



(ข) 2.05 วินาที

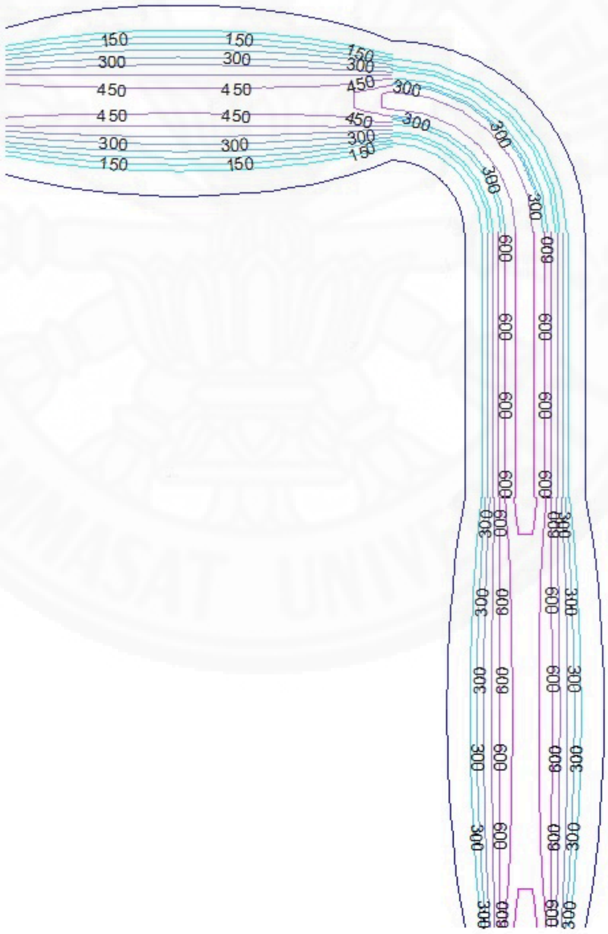


(ค) 2.5 วินาที

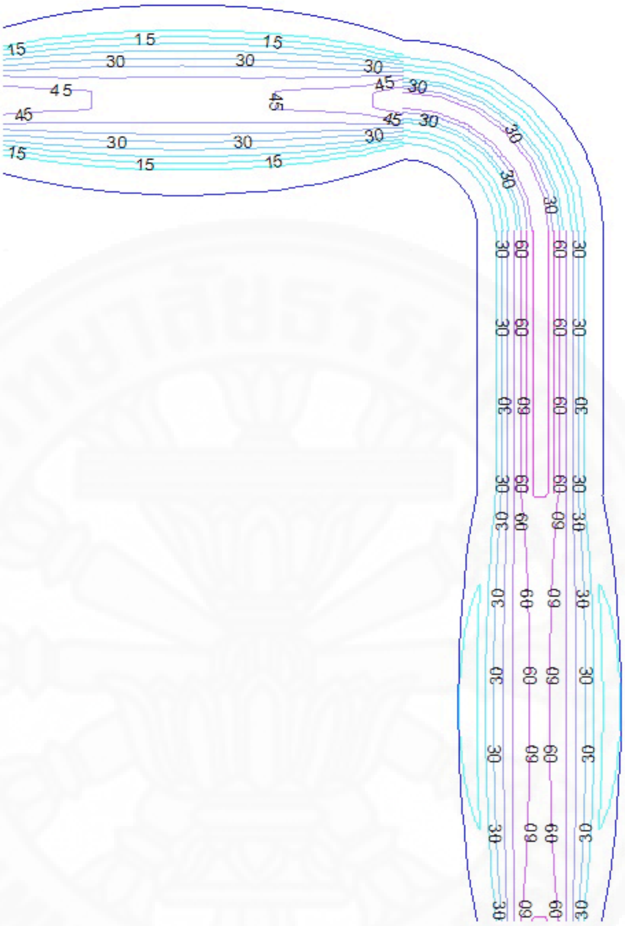
ภาพที่ 4.3 แสดงทิศทางการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแบบแผนภาพลูกศรในระนาบ xz ที่บริเวณแกนกลางของท่อทางเดินหายใจ $(y' = 0)$ ณ เวลาต่าง ๆ

4.2 การจำลองในรูปแบบแผนภาพโครงร่าง

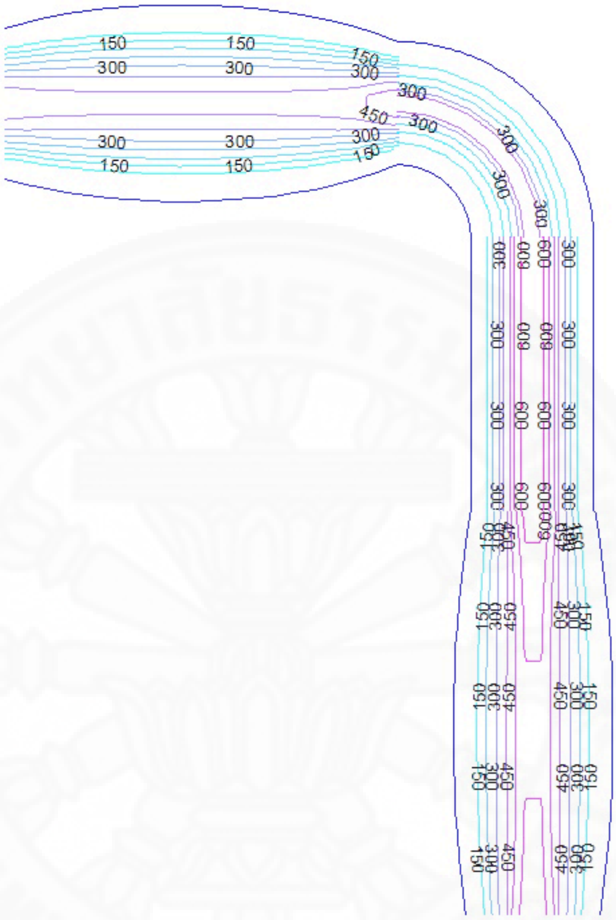
เมื่อพิจารณาความเร็วการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแบบแผนภาพโครงร่าง ดังแสดงในภาพที่ 4.4 เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที 2.05 วินาที และ 2.5 วินาที ตามลำดับ พบว่า เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที ดังภาพที่ 4.4 (ก) และ 2.5 วินาที ดังภาพที่ 4.4 (ค) ความเร็วของอากาศจะมีการเปลี่ยนแปลงสูงเมื่อเข้าใกล้กับผนัง ในขณะที่บริเวณแกนกลาง ความเร็วของอากาศจะมีการเปลี่ยนแปลงต่ำ โดยค่าความเร็วสูงสุดมีค่าประมาณ 600 เซนติเมตรต่อวินาทีที่บริเวณหลอดลมตอนต้นและหลอดลมตอนปลาย สำหรับเวลา 2.05 วินาที ดังภาพที่ 4.4 (ข) เป็นช่วงที่อากาศกำลังเปลี่ยนทิศทางการไหล ค่าความเร็วจึงมีขนาดน้อยกว่าช่วงเวลาอื่น โดยมีค่าความเร็วสูงสุดประมาณ 60 เซนติเมตรต่อวินาที



(ก) 1.4 วินาที


15
15
15
30
30
30
45
45
45
45
30
30
45
30
30
15
30
30
15
15
30
30
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30
30
60
60
30

(ข) 2.05 วินาที



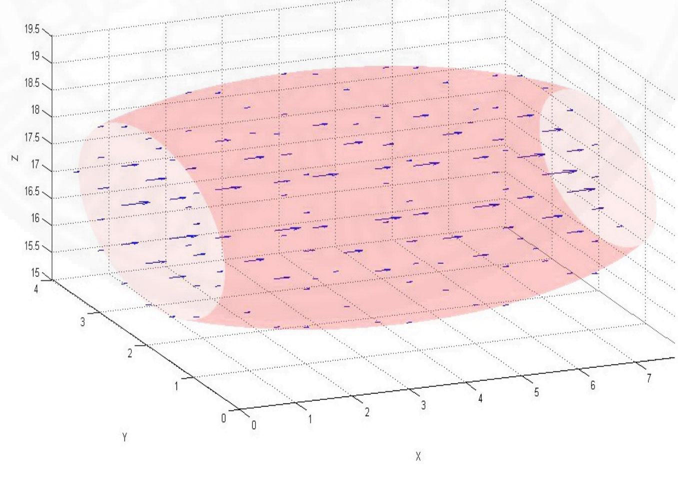
(ค) 2.5 วินาที

ภาพที่ 4.4 แสดงความเร็วการไหลของอากาศในทางเดินหายใจแบบแผนภาพโครงร่างในระนาบ xz ที่บริเวณแกนกลางของท่อทางเดินหายใจ $(y' = 0)$ ณ เวลาต่าง ๆ

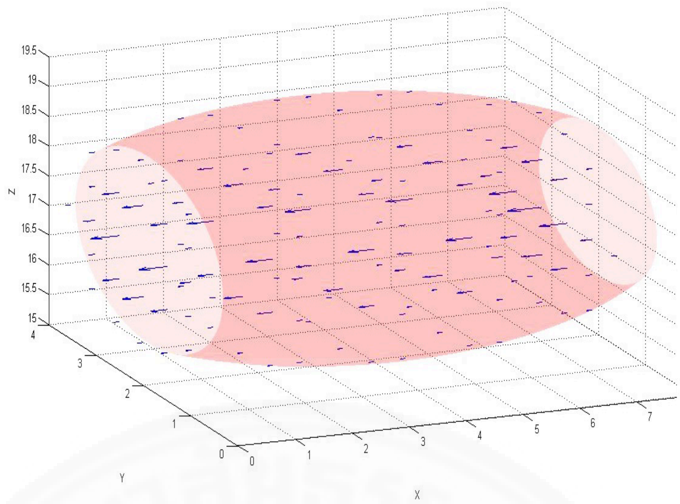
4.3 ตัวอย่างการเปรียบเทียบผลการจำลองในแต่ละหน้าตัด

เนื่องจากเราทำการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจรูปแบบสามมิติ เพื่อให้เห็นการจำลองแต่ละบริเวณย่อยของทางเดินหายใจในมุมมองที่ชัดเจนมากขึ้น เราจึงยกตัวอย่างการจำลองการไหลของอากาศในบริเวณที่ 1 นั่นก็คือบริเวณช่องปาก โดยนำเสนอการจำลองทั้งแบบแผนภาพลูกศร 3 มิติและแบบแผนภาพโครงร่างเพื่อแสดงทิศทางการไหล และแสดงขนาดความเร็วการไหลของอากาศ ซึ่งการจำลองแบบแผนภาพโครงร่างจะถูกนำเสนอโดยแบ่งออกเป็น 3 ส่วน ได้แก่ หน้าตัดบริเวณระนาบแกนกลาง ด้านซ้าย และด้านขวาของช่องปาก เพื่อนำผลการจำลองในแต่ละหน้าตัดมาเปรียบเทียบกัน

เมื่อพิจารณาทิศทางการไหลของอากาศแบบแผนภาพลูกศร 3 มิติ ดังแสดงในภาพที่ 4.5-4.6 พบว่า เมื่อเวลา 1.4 วินาที อากาศมีการไหลเข้าสู่ช่องปาก ซึ่งสอดคล้องกับสภาวะที่ปอดคลายตัว ในทางตรงกันข้าม เมื่อเวลา 2.5 วินาที อากาศมีการไหลออกจากช่องปากซึ่งสอดคล้องกับสภาวะที่ปอดมีการบีบตัว ทั้งนี้ เมื่อเปรียบเทียบทิศทางการไหลของอากาศพบว่า ค่าความเร็วของอากาศที่ตำแหน่งเดียวกันจะมีขนาดและทิศทางต่างกันเมื่อเวลาต่างกัน โดยความเร็วจะมีขนาดโตสุดที่บริเวณแกนกลางของช่องปากและลดลงตามสัดส่วนเมื่อเข้าใกล้กับผนัง

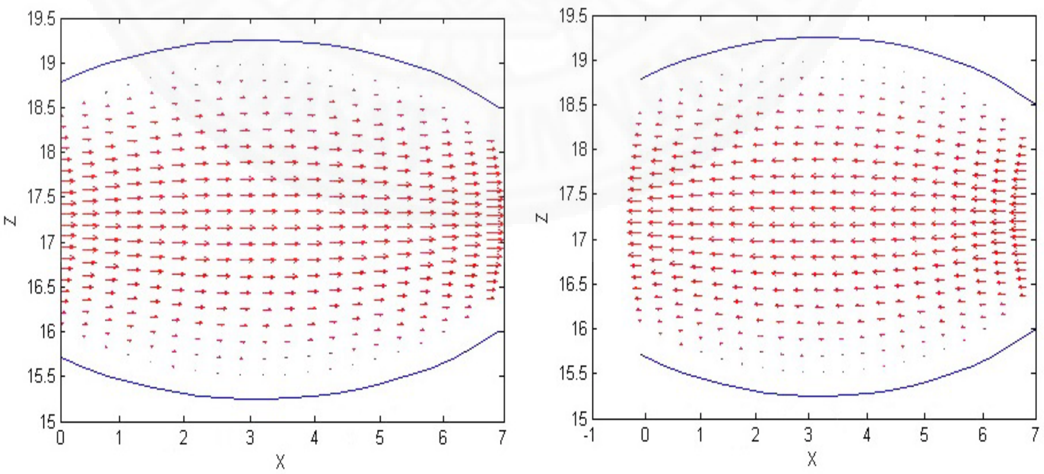


ภาพที่ 4.5 แสดงทิศทางการไหลของอากาศในช่องปากแบบแผนภาพลูกศร 3 มิติที่เวลา 1.4 วินาที



ภาพที่ 4.6 แสดงทิศทางการไหลของอากาศในช่องปากแบบแผนภาพลูกศร 3 มิติที่เวลา 2.5 วินาที

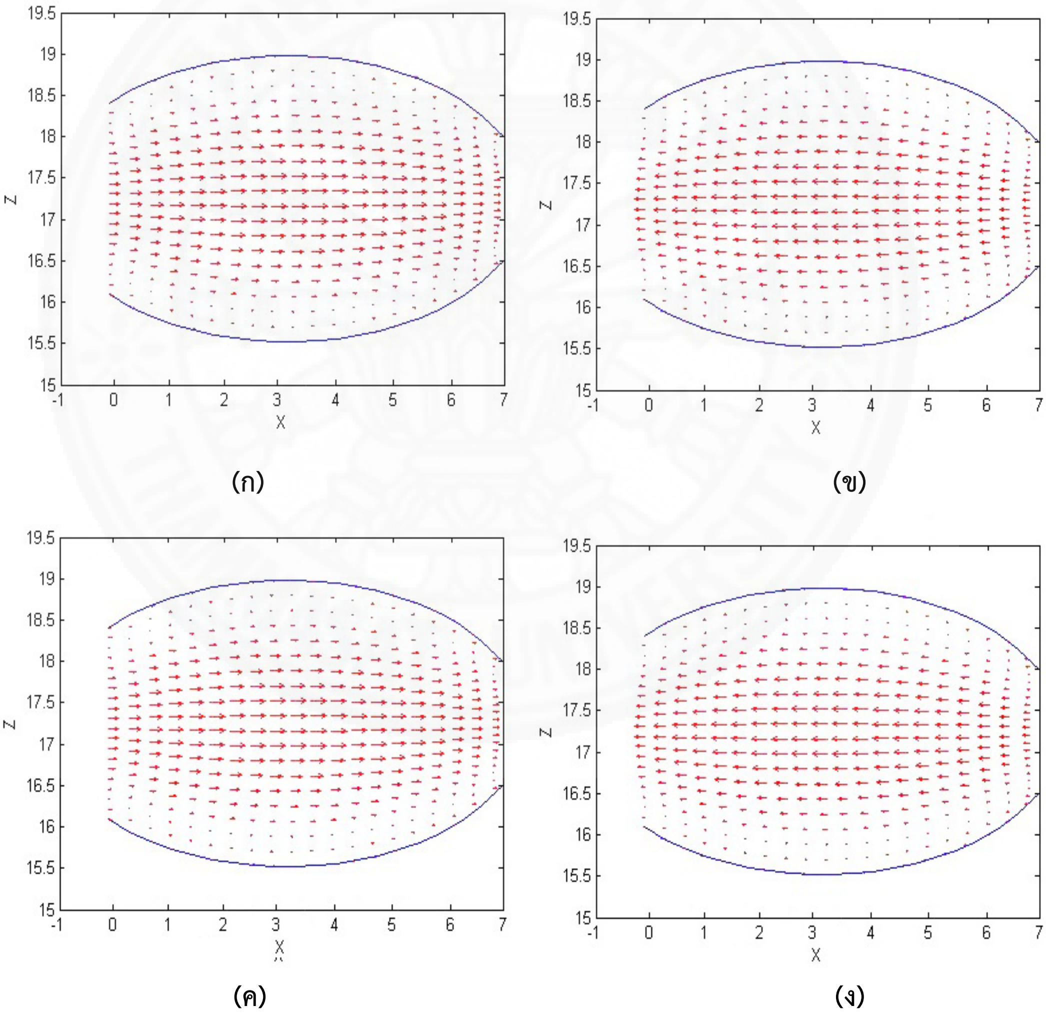
จากภาพที่ 4.7 (ก)-(ข) แสดงทิศทางการไหลของอากาศแบบแผนภาพลูกศรในระนาบ xz ที่บริเวณแกนกลางของช่องปาก $(y' = 0)$ เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที และ 2.5 วินาที ตามลำดับ จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ความเร็วการไหลของอากาศจะมีขนาดโตสุดที่บริเวณแกนกลางและลดลงจนมีค่าเป็นศูนย์ที่ผนัง โดยที่เวลา 1.4 วินาที ดังภาพที่ 4.7 (ก) อากาศจะมีทิศไหลเข้าสู่ช่องปาก และมีค่าความเร็วสูงสุดประมาณ 549 เซนติเมตรต่อวินาทีที่แกนกลางของช่อง ในทางตรงกันข้าม เมื่อเวลาที่ 2.5 วินาทีดังภาพที่ 4.7 (ข) อากาศมีการเปลี่ยนทิศเป็นการไหลออกจากช่องปาก และมีค่าความเร็วสูงสุดประมาณ 480 เซนติเมตรต่อวินาที



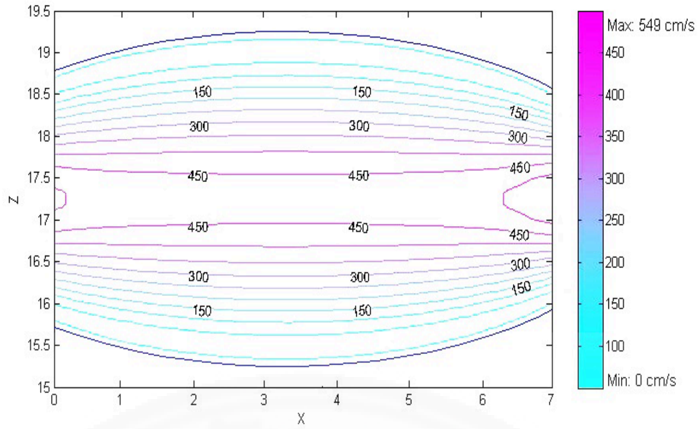
(ก) **(ข)**

ภาพที่ 4.7 แสดงทิศทางการไหลของอากาศที่บริเวณแกนกลางของช่องปาก $(y' = 0)$ แบบแผนภาพลูกศรในระนาบ xz เมื่อเวลา 1.4 วินาที (ก) และ 2.5 วินาที (ข)

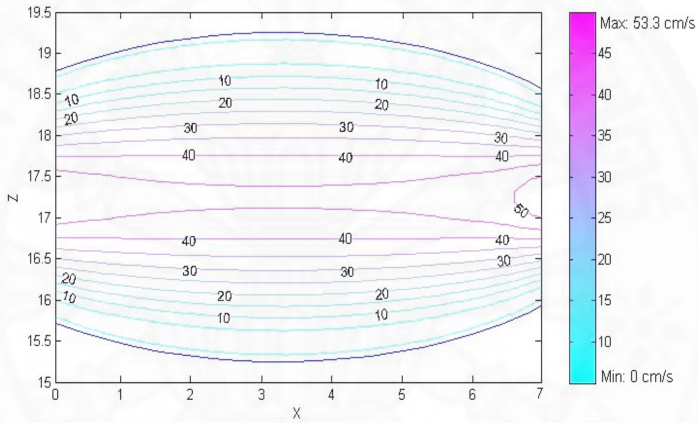
เมื่อพิจารณาภาพที่ 4.8 (ก)-(ง) ซึ่งแสดงภาพจำลองหน้าตัดด้านซ้าย $(y' = 1)$ และด้านขวา $(y' = -1)$ ของช่องปากในระนาบ xz จะเห็นว่า บริเวณด้านข้างทั้งสองด้านจะมีพื้นที่ที่แคบกว่าบริเวณแกนกลางของช่องปาก จากผลการจำลองพบว่า เมื่อเวลา 1.4 วินาที ดังภาพที่ (ก) และ ภาพที่ (ค) การไหลของอากาศจะมีทิศเข้าสู่ช่องปาก และมีค่าความเร็วสูงสุดประมาณ 273 เซนติเมตรต่อวินาทีที่แกนกลางของช่อง ในทางตรงกันข้าม เมื่อเวลา 2.5 วินาที ดังภาพที่ (ข) และ ภาพที่ (ง) การไหลของอากาศมีทิศไหลออกจากช่องปาก โดยขนาดความเร็วมีค่าสูงสุดที่บริเวณแกนกลางของช่องเช่นเดียวกัน ซึ่งมีค่าประมาณ 238 เซนติเมตรต่อวินาที เมื่อเปรียบขนาดของความเร็วการไหลของอากาศ จะพบว่า หน้าตัดบริเวณแกนกลางจะมีขนาดความเร็วที่มากกว่าบริเวณด้านข้างทั้งสองด้านของช่องปาก



ภาพที่ 4.8 แสดงทิศทางการไหลของอากาศที่บริเวณด้านข้างของช่องปากแบบแผนภาพลูกศรในระนาบ xz สำหรับด้านขวาของช่องปาก (ก)-(ข) และด้านซ้ายของช่องปาก (ค)-(ง) เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที (ซ้าย) และ 2.5 วินาที (ขวา)



(ก)



(ข)

ภาพที่ 4.9 แสดงค่าความเร็วของอากาศแบบแผนภาพโครงร่างในระนาบ xz $(y'=0)$ ที่บริเวณแกนกลางของช่องปาก เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที (ก) และ 2.05 วินาที (ข)

เมื่อพิจารณาความเร็วของอากาศในบริเวณแกนกลางของช่องปาก $(y'=0)$ แบบแผนภาพโครงร่างในระนาบ xz ซึ่งแสดงในภาพที่ 4.9 (ก)-(ข) เมื่อเวลาผ่านไป 1.4 วินาที และ 2.05 วินาที ตามลำดับ พบว่า เมื่อเวลา 1.4 วินาทีดังภาพที่ 4.9 (ก) ความเร็วการไหลของอากาศจะมีการเปลี่ยนแปลงสูงเมื่อเข้าใกล้ผนัง ในขณะที่ความเร็วบริเวณแกนกลางจะมีการเปลี่ยนแปลงต่ำ โดยขนาดของความเร็วจะมีค่าสูงสุดที่บริเวณแกนกลางของช่องปากและลดลงจนมีค่าเป็นศูนย์ที่ผนัง ซึ่งสอดคล้องกับการจำลองในรูปแบบแผนภาพลูกศร และเมื่อเวลา 2.05 วินาทีดังภาพที่ 4.9 (ข) เป็นช่วงเวลาที่อากาศกำลังจะเปลี่ยนทิศเป็นการไหลออก ดังนั้นจึงได้ค่าความเร็วที่มีขนาดน้อยกว่าช่วงเวลาอื่น ความเร็วการไหลของอากาศที่ได้จากการจำลองทั้งหมดข้างต้นนั้นมีค่าอยู่ในช่วง [0,900] เซนติเมตรต่อวินาที ซึ่งมีความสอดคล้องกับผลการจำลองของงานวิจัยอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง (Kongnuan & Pholuang, 2012; Zhang & Kleinstreuer, 2004)

4.4 สรุปผลการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ

จุดประสงค์ของการศึกษาในบทนี้ คือ การศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์แบบ 3 มิติ โดยผู้วิจัยได้ทำการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับความเร็วการไหลของอากาศ ซึ่งผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์เบสเซล และนำผลเฉลยที่ได้มาทำการจำลอง ผู้วิจัยได้นำเสนอแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบ 3 มิติสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ ซึ่งผลที่ได้จากการจำลองพบว่า การไหลของอากาศมีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางตามการเปลี่ยนแปลงของเวลา อากาศมีการไหลเข้าและออกเป็นฟังก์ชันคาบของเวลาซึ่งสอดคล้องกับการทำงานของระบบทางเดินหายใจตามความเป็นจริง สำหรับในช่วงสองวินาทีแรก อากาศจะมีทิศไหลจากภายนอกเข้าสู่ทางเดินหายใจ และอากาศจะมีการเปลี่ยนทิศทางการไหลเมื่อเข้าสู่วินาทีที่สอง ซึ่งค่าความเร็วการไหลของอากาศเมื่อเปรียบเทียบในแต่ละบริเวณ ณ เวลาที่ต่างกันพบว่า ค่าความเร็วในตำแหน่งเดียวกันจะมีขนาดและทิศทางที่ต่างกัน โดยค่าความเร็วจะมีขนาดสูงสุดที่บริเวณแนวแกนกลางของท่อทางเดินหายใจ ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วงประมาณ 400-600 เซนติเมตรต่อวินาที และค่าความเร็วจะมีค่าน้อยมากจนเป็นศูนย์ที่ผนังทางเดินหายใจ ทั้งนี้ขนาดความเร็วมีค่าสูงสุดที่บริเวณหลอดลมตอนต้นและตอนปลาย และมีค่าต่ำสุดที่บริเวณคอหอยซึ่งมีค่าประมาณ 300 เซนติเมตรต่อวินาที

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่อยู่ในรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์เบสเซลสำหรับแบบจำลองการไหลของอากาศนี้มีความถูกต้องแม่นยำในระดับที่น่าพึงพอใจ และหากนำแบบจำลองนี้ไปปรับปรุงและพัฒนาให้มีความสมจริงมากยิ่งขึ้น ก็จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยาในทางเดินหายใจได้เป็นอย่างดี อีกทั้งยังสามารถนำผลเฉลยของปัญหานี้ไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา เพื่อศึกษาพฤติกรรมของอนุภาคละอองยาต่อไปได้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในสามมิติสำหรับการจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบนของมนุษย์ โดยมีวัตถุประสงค์ของงานวิจัย เพื่อศึกษาพฤติกรรมการไหลของอากาศและวิเคราะห์ขนาดและทิศทางของความเร็วในการไหลของอากาศ

สำหรับแบบจำลองการไหลของอากาศ เราได้นำเสนอสมการทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายการไหลของอากาศในทางเดินหายใจ โดยใช้สมการการไหลต่อเนื่อง และสมการเนเวียร์-สโตกส์ ซึ่งเป็นสมการที่ถูกใช้อธิบายการไหลของอากาศอย่างแพร่หลาย งานวิจัยชิ้นนี้จะมองว่าการไหลของอากาศเป็นการไหลที่สมมาตรตามแนวแกน และมีลักษณะแกว่งแกวัดตามคาบของเวลา เนื่องจากอากาศในช่องทางเดินหายใจมีทิศการไหลเข้าและออกตามการเปลี่ยนแปลงของความดันภายในถุงลมปอดซึ่งเกิดขึ้นหมุนวนเป็นวัฏจักร และเพื่อการจำลองที่สมจริง เจาได้ทำการศึกษาปัญหานี้ในสามมิติ แต่ด้วยความซับซ้อนของทางเดินหายใจ เราจึงจำลองทางเดินหายใจในสามมิติอย่างง่ายที่ไม่ซับซ้อนมากนัก ดังนั้นการไหลของอากาศในท่อทางเดินหายใจดังกล่าวจึงถูกมองว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบ เมื่อกำหนดสมมติฐานต่าง ๆ จนสามารถสร้างแบบจำลองที่อธิบายการไหลของอากาศได้แล้ว จึงทำการหาผลเฉลยของปัญหาโดยวิธีการคำนวนเชิงวิเคราะห์ และได้นำผลเฉลยดังกล่าวมาจำลองในโปรแกรม MATLAB เพื่อวิเคราะห์ขนาดและทิศทางของการไหลของอากาศ ซึ่งสามารถสรุปผลการวิจัยได้ ดังต่อไปนี้

1. จากการจำลองการไหลของอากาศที่เวลาต่าง ๆ พบว่าการไหลของอากาศมีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทางตามการเปลี่ยนแปลงของเวลา คือมีการไหลเข้าและออกเป็นฟังก์ชันคาบของเวลา ซึ่งสอดคล้องกับการทำงานของระบบทางเดินหายใจตามความเป็นจริง โดยในช่วงสองวินาทีแรก อากาศจะมีทิศไหลจากภายนอกเข้าสู่ภายในทางเดินหายใจ และเริ่มเปลี่ยนทิศการไหลเป็นทิศทางตรงข้ามเมื่อเข้าสู่วินาทีที่สอง

2. สำหรับค่าของความเร็วอากาศ เมื่อเปรียบเทียบในแต่ละบริเวณที่เวลาต่างกันพบว่า ค่าความเร็วในตำแหน่งเดียวกันจะมีขนาดและทิศทางต่างกัน โดยในแต่ละเวลา ขนาดของความเร็วจะมีขนาดโตสุดที่บริเวณแนวแกนกลางของท่อทางเดินหายใจ แล้วมีขนาดลดลงตามสัดส่วนของระยะห่างจากผนัง และมีค่าน้อยมากจนเป็นศูนย์ ทั้งนี้ขนาดของความเร็วจะมีการเปลี่ยนแปลงสูงเมื่อเข้าใกล้ผนังทางเดินหายใจ ในขณะที่บริเวณแกนกลางค่าความเร็วจะมีการเปลี่ยนแปลงต่ำ

3. เนื่องจากผลการจำลองที่ได้มีความสอดคล้องกับความเป็นจริง จึงสรุปได้ว่าแบบจำลองการไหลของอากาศนี้มีความถูกต้องและแม่นยำอยู่ในระดับที่น่าพึงพอใจ แต่ด้วยแบบจำลองนี้เป็นเพียงแบบจำลองสามมิติที่มีรูปร่างอย่างง่าย หากแบบจำลองนี้ถูกนำไปพัฒนาให้มีโดเมนที่ซับซ้อนมากขึ้น ก็จะได้แบบจำลองที่มีความสมจริงมากยิ่งขึ้น และเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาและวิเคราะห์การไหลของอากาศในทางเดินหายใจ รวมถึงสามารถนำไปประยุกต์กับแบบจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคละอองยา เพื่อศึกษาพฤติกรรมของอนุภาคละอองยาในทางเดินหายใจได้อีกด้วย

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

วัชรา บุญสวัสดิ์ (บรรณาธิการวิชาการ). (2554). *การพัฒนาระบบการดูแลโรคหอบหืด เครือข่ายหน่วยบริการปฐมภูมิระดับอำเภอ (CUP) และโรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพตำบล* (พิมพ์ครั้งที่ 1). บริษัท บูเลติน จำกัด.

อัญชุลี ณ ตะกั่วทุ่ง, สุพัชระ คงนวน, และ สิทธิพงศ์ รักตะเมธากูล. (2553). การจำลองเชิงตัวเลขสำหรับการไหลของอากาศในทางเดินหายใจของมนุษย์โดยผ่านช่องปาก. *การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี 2553 (ครั้งที่ 15).*

สำเนา ผาติเสนะ. (ม.ป.ป.). ฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์. *ศูนย์บรรณสารและสื่อการศึกษา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี*, สืบค้นจาก http://sutir.sut.ac.th:8080/sutir/bitstream/123456789/2079/1/bib1508_F.pdf

ภาษาอังกฤษ

หนังสือ

Gockenbach, M. S. (2011). *Partial differential equations: analytical and numerical methods* (2nd ed.). The United States of America: The Society for Industrial and Applied Mathematics.

บทความวารสาร

Riahi, D. N., Roy, R., & Cavazos, S. (2011). On arterial blood flow in the presence of an overlapping stenosis. *Mathematical and Computer Modelling,54,* 2999-3006.

Ali, A., Asghar, S., & Alsulami, H. H. (2013). Oscillatory flow of second grade fluid in cylindrical tube. *Appl. Math. Mech. -Engl Ed., 34(9),* 1097-1106.

Tsangaris, S., & Vlachakis, N. W. (2003). Exact solution of the Navier-Stokes equations for the oscillating flow in duct of a cross-section of right-angled isosceles triangle. Z. angew. *Math. Phys., 54,* 1094-1100.

Tang, H., Tu, J. Y., Li, H. F., Au-Hijleh, B., Xue, C. C., & Li, C. G. (2004). Dynamic analysis of airflow features in a 3D real-anatomical geometry of the human nasal cavity. *15th Australasian Fluid Mechanics Conference.*

Wen, J., Inthavong, K., Tian, Z. F., Tu, J. Y., & Li, C. G. (2007). Airflow patterns in both sides of a realistic human nasal cavity for laminar and turbulent conditions. *16th Australasian Fluid Mechanics Conference,* 68-74.

Fadl, A., Wang, J., & Cheng. (2007). Effects of MDI spray angle on aerosol penetration efficiency through an oral airway cast. *Journal of Aerosol Science. 38,* 853-864.

Qingxing, X., Fong, Y. L., & Chi-Hwa, W. (2009). Transport and deposition of inertial aerosols in bifurcated tubes under oscillatory flow. *Chemical Engineering Science, 64,* 830-846.

Kongnuan, S., & Pholuang, J. (2012). A Fourier Series-Based Analytical Solution for the oscillating Airflow in a Human Respiratory Tract. *International journal of pure and applied mathematics, 78(5),* 721-733.

Kongnuan, S., Unchulee Na-Thakuatung, & Pholuang, J. (2014). A comparative of analytical and numerical simulations for the oscillating airflow in a human oral airway. *International Journal of Pure and Applied Mathematics. 90(3),* 321-333.

Otarod, O., & Otarod, D. (2006). Analytical solution for Navier-Stokes equations in two dimensions for laminar incompressible flow. Retrieved from http://arxiv.org/physics/0609186

Lyberg, M, D., & Tryggeson, H. (2007). An analytical solution of the Navier-Stokes equation for internal flows. *J. Phys. A: Math. Theory. 40,* 465-471.

Mohyuddin, M. R., Siddiqui, A. M., Hayat, T., Siddqui, J., & Asghar, S. (2008). Exact solutions of time-dependent Navier-Stokes equations by Hodograph-Legendre transformation method. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 24(3),* 257-268.

Vlachakis, N. W., & Baldoukas, A. K. (2002). Exact solution of a 3D spiral flow model for a viscous fluid in a stationary porous pipe with application to blood vessels. *3rd WSEAS Internationa lConference on Differential Equations-Theory and Applications in Wolin-Island Poland.*

Muriel, A. (2010). An exact solution of the 3-D Navier-Stokes equation. *Fluid Dynamics,Mathematical Physics.*

Rosu, H., & Romero, J. L. (1999). Ermakov approach for the one-dimensional

Helmholtz Hamiltonian. *Nuovo Cimento, 114,* 569-574.

Zhang, Z., & Kleinstreuer, C. (2004). Airflow structures and nano-particle deposition in a human upper airway model. *Journal of Computational Physics, 198,* 178-210.

Teager, H. M. (1980). Some observations on oral air flow during phonation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process, Vol. 28(5),* 599-601.

Xu, Q., Leong, F. Y., & Wang, C. (2008, November 11). Transport and deposition of inertial aerosals in bifurcated tubes under oscillatory flow. *Chemical Engineering Science, 64,* 830-846.

Webster, D. R., & Humphrey, J. A. C. (1997, February). Traveling wave instability in helical coil flow. *Phys. Fluids., 9(2),* 407-418.

สื่ออิเล็กทรอนิกส์

Hranitz, M. J. (n. d.). *APHNT: Respiratory Physiology Outlines.* Retrieved July 26, 2015, from http://facstaff. bloomu.edu/jhranitz/Courses/APHNT/Outlines/ Respir%20phys.pdf

Shier, D., Butler, J., & Lewis, R. (n. d.). *Hole's Essentials of Human Anatomy and Physiology.* Retrieved August 18, 2015, from http://www.metaphysicspirit.com/books/Hole's %20Human%20Anatomy%20and%20Physiology.pdf

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Function)

ฟังก์ชันเบสเซลเกิดจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซล (Bessel's differential equation) ซึ่งมักเกิดกับปัญหาเชิงฟิสิกส์ที่ใช้พิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate) หรือปัญหาที่มีรูปร่างเป็นทรงกระบอก เช่น การหาความเร็วสำหรับการไหลของของไหลภายในท่อ เป็นต้น สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$r^2\frac{d^2\mathsf{u}(r)}{dr^2}+r\frac{d\mathsf{u}(r)}{dr}+(r^2-\gamma)\mathsf{u}(r)=0$$

ซึ่งอาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้เป็น

$$\frac{d^2\mathsf{u}(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mathsf{u}(r)}{dr}+\left(1-\frac{\gamma}{r^2}\right)\mathsf{u}(r)=0$$

โดยที่ γ เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และเรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลอันดับ γ (Bessel's equation of order γ)

สำหรับวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซล ในที่นี้เราจะยกตัวอย่างการหาผลเฉลยสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เบสเซลที่มีอันดับศูนย์ $(\gamma=0)$ ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{d^2\mathsf{u}(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mathsf{u}(r)}{dr}+\lambda^2\mathsf{u}(r)=0 \tag{1}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ คือ

$$\mathsf{u}(0)\in\mathbb{R},\ \ \mathsf{u}(1)=0,\ \ 0\le r\le 1 \tag{2}$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงที่ซึ่งเป็นจำนวนบวก เราจะทำการหาผลเฉลยของสมการที่ (1) โดยเริ่มจากการเปลี่ยนตัวแปรอิสระใหม่ กำหนดให้

$$s=\sqrt{\lambda^2 r}=\lambda r$$

นิยามโดย

$$S(s)=u\frac{s}{\lambda}\Longleftrightarrow u(r)=S(\lambda r)$$

ดังนั้น

$$\frac{du(r)}{dr}=\lambda\frac{dS(\lambda r)}{ds}=\lambda\frac{dS(s)}{ds}$$

และ

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}=\lambda^2\frac{d^2S(\lambda r)}{ds^2}=\lambda^2\frac{d^2S(s)}{ds^2}$$

จากสมการที่ (1) ทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\lambda^2u &= \lambda^2\frac{d^2S}{ds^2}+\frac{1}{s/\lambda}\lambda\frac{dS}{ds}+\lambda^2S \\ &= \lambda^2\Big(\frac{d^2S}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dS}{ds}+S\Big)\end{aligned}$$

เนื่องจาก λ^2 เป็นค่าคงที่ซึ่งมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\frac{d^2S}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dS}{ds}+S=0$$

เรียกสมการดังกล่าวว่า สมการเบสเซลอันดับศูนย์ (Bessel's equation of order zero) ดังนั้นจากสมการที่ (1) เมื่อทำการเปลี่ยนตัวแปรแล้ว จึงได้สมการและเงื่อนไขค่าขอบในรูปแบบตัวแปรใหม่ดังนี้

$$\frac{d^2S}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dS}{ds}+S=0, \tag{3}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ

$$S(0)\in\mathbb{R},\ \ S(\lambda)=0 \tag{4}$$

เราจะหาผลเฉลยของสมการเบสเซลนี้ในรูปอนุกรมกำลัง (power series) โดยวิธีของโฟรเบนิอุส ซึ่งจะสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$S(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^{k+\beta}, a_0\neq 0 \tag{5}$$

เมื่อ β เป็นค่าคงที่เช่นเดียวกับค่าสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ซึ่งเราสามารถหาค่าคงที่เหล่านี้ได้จากการนำสมการอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าขอบดังสมการที่ (3)-(4) มาพิจารณา โดยเริ่มจากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $S(s)$ เทียบกับ s จะได้

$$\frac{dS(s)}{ds}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_ks^{k+\beta-1},$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{s}\frac{dS(s)}{ds}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_ks^{k+\beta-2},$$

และหาอนุพันธ์อันดับสองของ $S(s)$ เทียบกับ s จะได้

$$\frac{d^2S(s)}{ds^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_ks^{k+\beta-2}$$

จากนั้น แทนค่า $S(s)$, $\frac{1}{s}\frac{dS(s)}{ds}$ และ $\frac{d^2S(s)}{ds^2}$ ลงในสมการ (3) จะได้

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_k s^{k+\beta-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\beta)a_k s^{k+\beta-2}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}s^{k+\beta-2}=0$$

เขียนพจน์ของอนุกรมที่หนึ่งและอนุกรมที่สองแยกออกเป็น

$$\beta(\beta-1)a_0 s^{\beta-2}+\beta(\beta+1)a_1 s^{\beta-1}+\sum_{k=2}^{\infty}(k+\beta)(k+\beta-1)a_k s^{k+\beta-2}+(\beta)a_0 s^{\beta-2}$$

$$+(\beta+1)a_1 s^{\beta-1}+\sum_{k=2}^{\infty}(k+\beta)a_k s^{k+\beta-2}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}s^{k+\beta-2}=0$$

รวมพจน์ต่าง ๆ ของ s ที่มีกำลังเท่ากันไว้ด้วยกัน จะได้

$$a_0\{\beta(\beta-1)+\beta\}s^{\beta-2}+a_1\{\beta(\beta+1)+(\beta+1)\}s^{\beta-1}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\{a_k((k+\beta)(k+\beta-1)+(k+\beta))+a_{k-2}\}s^{k+\beta-2}=0 \qquad (6)$$

ซึ่งสมการดังกล่าวจะเป็นจริงเมื่อสัมประสิทธิ์ของ s กำลังต่าง ๆ ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$a_0\{\beta(\beta-1)+\beta\}=0, \qquad (7)$$

$$a_1\{\beta(\beta+1)+(\beta+1)\}=0, \qquad (8)$$

และเมื่อ $k \geqslant 2$ จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) คือ

$$a_k((k+\beta)(k+\beta-1)+(k+\beta))+a_{k-2}=0 \text{ หรือ } a_k=-\frac{a_{k-2}}{(k+\beta)^2} \qquad (9)$$

เนื่องจาก $a_0 \neq 0$ จากสมการที่ (7) ทำให้ได้ $\beta^2=0$ นั่นคือ $\beta=0$ และเมื่อแทนค่า β ที่ได้นี้ลงในสมการที่ (8) จะได้ว่า $a_1=0$ และความสัมพันธ์เวียนเกิดจากสมการที่ (9) จึงได้เป็น

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k^2}, \quad k \geqslant 2$$

เนื่องจาก $a_1=0$ ดังนั้นจากความสัมพันธ์เวียนเกิดจะได้ว่า ทุก ๆ สัมประสิทธิ์ที่ k เป็นเลขคี่จะมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ $a_3=a_5=a_7=\ldots=0$ และในทางตรงกันข้าม สำหรับ k ที่เป็นเลขคู่ กำหนดให้ $k=2n$ จะได้

$$a_{2n}=-\frac{a_{2n-2}}{(2n)^2}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

เนื่องจาก a_0 เป็นค่าคงตัวที่ไม่เจาะจง ในที่นี้เราเลือก $a_0 = 1$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า n ต่าง ๆ ในความสัมพันธ์เวียนเกิดจะได้

$$
\begin{aligned}
n = 1; \quad & a_2 = -\frac{a_0}{2^2} \\
n = 2; \quad & a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{4^2.2^2} = \frac{1}{2^4(2!)^2} \\
n = 3; \quad & a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{6^2.2^4.2^2} = -\frac{1}{2^6(3!)^2} \\
n = 4; \quad & a_8 = -\frac{a_6}{8^2} = \frac{a_0}{8^2.2^4.2^2.6^2} = \frac{1}{2^8(4!)^2} \\
\vdots &
\end{aligned}
$$

โดยรูปแบบทั่วไปจะได้

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ลงในผลเฉลยที่สมมติไว้ดังสมการที่ (5) จะได้ผลเฉลยของสมการเบสเซลซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ J_0 นั่นคือ

$$J_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{s}{2}\right)^{2n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

เนื่องจาก $s = \lambda r$ ดังนั้น

$$J_0(\lambda r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

และเรียก J_0 ว่า ฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ (Bessel function of order zero)

จากการแก้สมการที่ (1) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ทำให้เราได้ผลเฉลยของสมการเบสเซลอยู่ในรูป $\mathrm{u}(r) = J_0(\lambda r)$ จากเงื่อนไขค่าขอบ $\mathrm{u}(r)$ มีค่าเป็นศูนย์ที่ $r = 1$ ดังนั้น $J_0(\lambda) = 0$ ซึ่งต้องให้ λ เป็นรากของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ 0 โดยให้ s_{0m} เป็นค่าศูนย์ (zeros) ที่ m ของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ 0 นี้ แต่เนื่องจากฟังก์ชันเบสเซลในแต่ละอันดับจะมีรากที่เป็นบวกซึ่งมีจำนวนไม่จำกัด ดังนั้นจึงเขียนได้ว่า

$$\lambda = \lambda_m = s_{0m}; \quad m = 1, 2, 3, ...$$

อย่างไรก็ตาม ค่าศูนย์ของฟังก์ชันเบสเซลไม่ได้เกิดขึ้นที่ช่วงปรกติ จึงต้องคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขและกำหนดเป็นตาราง ซึ่งอาจหาค่าของฟังก์ชันเบสเซลสำหรับค่าอันดับอื่น ๆ โดยทั่วไปได้จากหนังสือ

คู่มือ แต่ในที่นี้เราสนใจเฉพาะฟังก์เบสเซลที่มีอันดับศูนย์ ดังนั้นจึงขอแสดงเพียงบางค่าสำหรับค่าศูนย์ของฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ไว้ดังนี้ (Gockenbach, 2011, p.478)

$$s_{0m} = 2.404825557690968,\ \ 5.520078109856846,$$
$$8.65372791291017,\ \ 11.79153381314112, \ldots$$

สำหรับ $m = 1, 2, 3, \ldots$ และจากคุณสมบัติของการตั้งฉากร่วมกันของฟังก์ชันเบสเซล (สำเนา ผาติเสนะ, น. 6-17) ผลเฉลยทั่วไปของทุกฟังก์ชันที่นิยามในปัญหานี้จึงสามารถเขียนได้ในรูปแบบการกระจายอนุกรมฟังก์ชันเบสเซลอันดับศูนย์ดังนี้

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m r)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ C_m สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$C_m = \frac{\langle f, J_0(\lambda_m r)\rangle}{\langle J_0(\lambda_m r), J_0(\lambda_m r)\rangle}$$

$$= \frac{\int_0^1 J_0(\lambda_m \tilde{r})\tilde{r}d\tilde{r}}{\int_0^1 [J_0(\lambda_m \tilde{r})]^2 \tilde{r}d\tilde{r}} \qquad ; m = 1, 2, 3, \ldots$$

อย่างไรก็ตาม การคำนวณจากสูตรดังกล่าวจำเป็นจะต้องอาศัยสมบัติของฟังก์ชันเบสเซลประกอบ ซึ่งมีผู้วิจัยหลายท่านได้พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ของเบสเซลไว้แล้ว (สำเนา ผาติเสนะ; Gockenbach, 2011) และสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีการเชิงตัวเลข ในที่นี้จึงขอละไว้

ภาคผนวก ข

โปรแกรมสำหรับการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และโปรแกรมจำลองการไหลของอากาศในทางเดินหายใจส่วนบน

exactmain.m

```
L = 4; % [cm] diameter of the center zone 1
L1 = 7; % [cm] length of zone 1
L2 = 3.125; % [cm] diameter of inlet
L3 = 2.5; % [cm] the hight of zone 2
L4 = 1.5; L5 = 5.5; L6 = 9; L7 = 3.25 ; L8 = 2; Rmajor = (L3/2)+L4; rminor = L3/2;
XYZ = zeros(3,10); %Variable to contain the positions of coordinates in the domain
UVW = zeros(3,10);
maxtime = 4; % [seconds] maximum allowable time for integrating trajctory
mintime = 0;
MT = 10; % maximum number length of time
deltatime = maxtime/MT;
MX = 10; % maximum number length of X
MY = 10; % maximum number lenght of Y
MZ = 10; % maximum number length of Z
omega = pi/2; TIME = mintime:deltatime:maxtime; % vector with all the times

a1 = sqrt((L1/2)^2/(1-((L2/2)/2)^2)); b1 = L/2; c1 = L/2;
x1 = a1;
y1 = L/2;
z1 = L6+L5+Rmajor;

x2 = a1+a1*cos(asin(L3/4));
z2 = L6+L5;
```

```
y2 = y1;

x3 = x2+Rmajor;
y3 = y1;
z3 = L5+L6;

a4 = L7/2; b4 = a4; c4 = sqrt((L6/2)^2/(1-((L8/4)/(L7/2))^2));
x4 = x2+Rmajor;
y4 = y1;
z4 = L6/2;
T = TIME(4);
%%%%%%%%%%%%%%%%%% PLOT THE AIRFLOW IN 3D %%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%% zone 1 %%%%%%%%%%%%%%
[XYZ1,NumN1] = genzone13D;
        for N = 1 : NumN1
             x = XYZ1(1,N); y = XYZ1(2,N); z = XYZ1(3,N);
             [U1,U2,U3]=calzone1(x,y,z,T);
             UVW1(1,N)=U1;
             UVW1(2,N)=U2;
             UVW1(3,N)=U3;
        end
plotzone13D(XYZ1,UVW1);
hold on;
%%%%%%%%%%%%%% zone 2 %%%%%%%%%%%%%%
[XYZ2,NumN2]=genzone23D;
        for N = 1 : NumN2
             x = XYZ2(1,N); y = XYZ2(2,N); z = XYZ2(3,N);
```

```
            [U1,U2,U3]=calzone21(x,y,z,T);
            UVW2(1,N)=U1;
            UVW2(2,N)=U2;
            UVW2(3,N)=U3;
        end
plotzone23D(XYZ2,UVW2);
hold on;
%%%%%%%%%%%%%% zone 3 %%%%%%%%%%%%%%
[XYZ3,NumN3] = genzone33D;
        for N = 1 : NumN3
            x = XYZ3(1,N); y = XYZ3(2,N); z = XYZ3(3,N);
            [U1,U2,U3]=calzone3(x,y,z,T);
            UVW3(1,N)=U1; UVW3(2,N)=U2; UVW3(3,N)=U3;
        end
plotzone33D(XYZ3,UVW3);
hold on;
%%%%%%%%%%%%%% zone 4 %%%%%%%%%%%%%%
[XYZ4,NumN4] = genzone43D;
        for N = 1 : NumN4
            x = XYZ4(1,N); y = XYZ4(2,N); z = XYZ4(3,N);
            [U1,U2,U3]=calzone4(x,y,z,T);
            UVW4(1,N)=U1; UVW4(2,N)=U2; UVW4(3,N)=U3;
        end
plotzone43D(XYZ4,UVW4);
%%%%%%%%%%%%%%% draw surface of the domain %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%% zone 1 %%%%%%%%%%%%%%
```

```
phi=linspace(asin((L3/2)/c1),pi-asin((L2/2)/2),64);
theta=linspace(0,2*pi,64);
[theta,phi] = meshgrid(theta,phi);
z = c1*sin(phi).*cos(theta)+z1;
y = b1*sin(phi).*sin(theta)+y1;
x = a1*cos(phi)+x1-2;
surf(x,y,z,'FaceColor','red','EdgeColor','none');alpha(0.1);
grid off;
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
hold on;
%%%%%%%%%%%%%% zone 2 %%%%%%%%%%%%%%
z = L5+L6:0.001:L4+L3+L6+L5;
phi = linspace(-pi, pi, 64) ; % Poloidal angle
theta = linspace(0, pi/2, 64) ; % Toroidal angle
[theta, phi] = meshgrid(theta, phi);
x = (Rmajor + rminor.*cos(phi)) .* cos(theta)+x2-2;
z = (Rmajor + rminor.*cos(phi)) .* sin(theta)+z2;
y = rminor.*sin(phi)+y2;
surf(x, y, z,'FaceColor','red','EdgeColor','none');alpha(0.1);
%mesh(x,y,z)
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
hold on;
%%%%%%%%%%%%%% zone 3 %%%%%%%%%%%%%%
theta = linspace(0,2*pi,64);
z = linspace(L6,L6+L5,64);
[z,theta] = meshgrid(z,theta);
r = L3/2;
x = r*cos(theta)+x3-2;
y = r*sin(theta)+y3;
surf(x,y,z,'FaceColor','red','EdgeColor','none');alpha(0.1);
```

```
%shading(gca,'interp');
%mesh(x,y,z)
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
hold on;
%%%%%%%%%%%%%% zone 4 %%%%%%%%%%%%%%
phi=linspace(asin((L3/2)/(L7/2)),pi-asin((L3/2)/(L7/2)),64);
theta=linspace(0,2*pi,64);
[theta,phi]=meshgrid(theta,phi);
x=a4*sin(phi).*cos(theta)+x4-2;
y=b4*sin(phi).*sin(theta)+y4;
z=c4*cos(phi)+z4;
surf(x,y,z,'FaceColor','red','EdgeColor','none');alpha(0.1);
%shading(gca,'interp');
%mesh(x,y,z)
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
%%%%%%%%%%%%%%%% generate mesh in zone 1 %%%%%%%%%%%%%%%%
```

genzone13D.m

```
function [XYZ1,NumN]=genzone13D
XYZ1 = zeros(3,10); % Variable to contain the positions of coordinates in the domain
x=linspace(0,7,8);
xb = x-x1;
ypeak = b1*sqrt((1-(xb/a1).^2))+y1; ybase = -b1*sqrt((1-(xb/a1).^2))+y1;
Numnodes=1;
    for xindex=1:length(x)
        Y=linspace(ybase(xindex),ypeak(xindex),4);
        for yindex=1:length(Y)
            zpeak = b1*sqrt((1-((Y(yindex)-y1)/b1).^2-(x(xindex)-x1).^2/a1.^2))+z1;
            zbase = -b1*sqrt((1-((Y(yindex)-y1)/b1).^2-(x(xindex)-x1).^2/a1.^2))+z1;
```

```
            Z=linspace(zbase,zpeak,4);
            for zindex=1:length(Z)
                XYZ1(1,Numnodes)=x(xindex);
                XYZ1(2,Numnodes)=Y(yindex);
                XYZ1(3,Numnodes)=Z(zindex);
        Numnodes= Numnodes+1;
            end
        end
    end
NumN1=Numnodes-1;
%%%%%%%%%%%%%%%% generate mesh in zone 2 %%%%%%%%%%%%%%%%
```

genzone23D.m

```
function [XYZ2,NumN2]=genzone23D
r = linspace(0,rminor , 4) ;
phi = linspace(0, 2*pi, 3) ;% Poloidal angle
theta = linspace(0, pi/2, 5) ; % Toroidal angle
Numnodes=1;
    for pindex=1:length(phi)
        for rindex = 1:length(r)
            for thindex=1:length(theta)
             XYZ2(1,Numnodes)=(Rmajor + r(rindex).*cos(phi(pindex))) .* cos(theta(thindex))
+x2;
             XYZ2(2,Numnodes)=r(rindex).*sin(phi(pindex))+y2;
             XYZ2(3,Numnodes)=(Rmajor + r(rindex).*cos(phi(pindex))) .* sin(theta(thindex))+z2;
        Numnodes= Numnodes+1;
            end
```

```
        end
    end
NumN2=Numnodes-1;
%%%%%%%%%%%%%%%%% generate mesh in zone 3 %%%%%%%%%%%%%%%%%
```

genzone33D.m

```
function [XYZ3,NumN]=genzone33D
z = linspace(L6+0.5,L6+L5,4);
y = linspace(y3-(L3/2),y3+(L3/2),4);
r = L3/2; yb = y-y3; zb = z-z3;
xpeak = sqrt(r^2-(yb.^2))+x3+0.*zb; xbase = -sqrt(r^2-(yb.^2))+x3+0.*zb;
Numnodes=1;
    for zindex=1:length(z)
        for yindex=1:length(y)
            X=linspace(xbase(yindex),xpeak(yindex),4);
            for xindex=1:length(X)
                XYZ3(1,Numnodes)=X(xindex);
                XYZ3(2,Numnodes)=y(yindex);
                XYZ3(3,Numnodes)=z(zindex);
        Numnodes= Numnodes+1;
            end
        end
    end
NumN3=Numnodes-1;
%%%%%%%%%%%%%%%%% generate mesh in zone 4 %%%%%%%%%%%%%%%%%
```

genzone43D.m

```
function [XYZ4,NumN]=genzone43D
z=linspace(0,8,5);
```

```
zb = z-z4;
xpeak = b4*sqrt((1-(zb/c4).^2))+x4;
xbase = -b4*sqrt((1-(zb/c4).^2))+x4;
Numnodes=1;
    for zindex=1:length(z)
        X=linspace(xbase(zindex),xpeak(zindex),4);
        for xindex=1:length(X)
            ypeak = b1*sqrt((1-((X(xindex)-x4).^2/a4^2)-((z(zindex)-z4)/c4)^2))+y4;
            ybase = -b1*sqrt((1-((X(xindex)-x4).^2/a4^2)-((z(zindex)-z4)/c4)^2))+y4;
            for yindex=1:length(Y)
                XYZ4(1,Numnodes)=X(xindex);
                XYZ4(2,Numnodes)=Y(yindex);
                XYZ4(3,Numnodes)=z(zindex);
        Numnodes= Numnodes+1;
            end
        end
    end
NumN4=Numnodes-1;
%%%%%%%%%%%%%%%%% calculation U for zone 1 %%%%%%%%%%%%%%%%%
```

calzone1.m

```
function [U1,U2,U3]=calzone1(x,y,z,T)
n = 0; % Order of Bessel function desired
xmax = 500; % Look for roots in interval [0, xmax]
Jn = chebfun(@(t) besselj(n,t), [0, xmax]); % Construct the chebfun
lamda = roots(Jn); % Find roots to nearly full double precision accuracy
mu = 1.82 *(10^(-5)); %Pa.s
rho = 1.148 *(10^(-3)); %g/cm^3
```

```
omega = pi/2 ; %s^-1
xb = x-x1; yb = y-y1; zb = z-z1;
zpeak = b1*sqrt((1-(xb/a1).^2))+z1; zbase = -b1*sqrt((1-(xb/a1).^2))+z1;
r = sqrt(zb^2+yb^2);
rbar =r/(zpeak - zbase);
alpha =(zpeak - zbase)*(sqrt((omega*rho)/mu));
Us = 0; Uc = 0;
    for m = 1:100
        for n = m-1
            J0 = besselj(0,lamda(m)*rbar);
            rb = linspace(0,1);
            J = besselj(0,lamda(m)*rb);
            F = J.*rb;
            intF = trapz(rb,F);
            G = (J.^2).*rb;
            intG = trapz(rb,G);
            cm = intF/intG;
            am = (cm*(-1))*((2*n)*(lamda(m)^3)*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))/((alpha^4)*4*(n^2)+
((lamda(m)^3)*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))^2);
            bm = (am*((lamda(m)^3*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))/2*n)+cm)/(alpha^2);
            Us = Us + am*J0;
            Uc = Uc + bm *J0;
        end
    end
amp = sqrt((Us^2)+(Uc^2));
UX = 304.8*amp*sin(T*omega)*(133.32*(zpeak - zbase)^2/mu*L1);
```

```
UR = 0; theta = atan(zb/yb);
U1 = UX; U2 = UR*cos(theta); U3 = UR*sin(theta);
return
%%%%%%%%%%%%%%%% calculation U for zone 2 %%%%%%%%%%%%%%%%
```

calzone2.m

```
function [U1,U2,U3]=calzone2(x,y,z,T)
n = 0; % Order of Bessel function desired
xmax = 500; % Look for roots in interval [0, xmax]
Jn = chebfun(@(t) besselj(n,t), [0, xmax]); % Construct the chebfun
lamda = sqrt(roots(Jn)+(rminor/Rmajor)); % Find roots to nearly full double precision accuracy
xb = x-x2; yb = y-y2; zb = z-z2;
r = sqrt((Rmajor-sqrt(xb^2+zb^2))^2+yb^2);
b = rminor;
rbar =r/b;
theta = atan(zb/xb);
phi = asin(yb/rbar);
alpha =b*(sqrt((omega*rho)/mu));
Us = 0; Uc = 0;
        for m = 1:100
           for n = m-1
              J0 = besselj(0,lamda(m)*rbar);
              rb = linspace(0,1);
              J = besselj(0,lamda(m)*rb);
              F = J.*rb;
              intF = trapz(rb,F);
              G = (J.^2).*rb;
              intG = trapz(rb,G);
```

```
            cm = intF/intG;
            am =cm*((2*n*Rmajor^2*Rmajor^2*(lamda(m))^3*(lamda(m)*(2*n-1)+1)+2*n*(b^
2))^2)/((-4*n^2*alpha^4*Rmajor^2)-(Rmajor^2*(lamda(m))^3*(lamda(m)*(2*n-1)+1)+2*n*(b^2))^
2);
            bm = -cm*(alpha^2/((-4*n^2*alpha^4*Rmajor^2)-(Rmajor^2*(lamda(m))^3*(lamda(m)*(2*n-
1)+1)+2*n*(b^2))^2));
            Us = Us + am*J0;
            Uc = Uc + bm *J0;
        end
    end
amp = sqrt((Us^2)+(Uc^2));
a = L3+L4;
Uthe = 304.8*amp*sin(T*omega)*(133.32*(rminor)^2/mu*a);
U1 = Uthe*sin(theta); U2 = 0; U3 = -Uthe*cos(theta);
return
%%%%%%%%%%%%%%%%%% calculation U for zone 3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

calzone3.m

```
function [U1,U2,U3]=calzone3(x,y,z,T)
n = 0; % Order of Bessel function desired
xmax = 500; % Look for roots in interval [0, xmax]
Jn = chebfun(@(t) besselj(n,t), [0, xmax]); % Construct the chebfun
lamda = roots(Jn); % Find roots to nearly full double precision accuracy
zb = z-z3; yb = y-y3; xb = x-x3;
A = L3/2;
xpeak = sqrt(A^2-(yb.^2))+x3; xbase = -sqrt(A^2-(yb.^2))+x3;
r = sqrt(xb^2+yb^2);
alpha =(xpeak - xbase)*(sqrt((omega*rho)/mu));
Us = 0; Uc = 0;
```

```
for m = 1:100
    for n = m-1
        J0 = besselj(0,lamda(m)*rbar);
        rb = linspace(0,1);
        J = besselj(0,lamda(m)*rb);
        F = J.*rb;
        intF = trapz(rb,F);
        G = (J.^2).*rb;
        intG = trapz(rb,G);
        cm = intF/intG;
        am = cm*((2*n)*(lamda(m)^3)*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))/((alpha^4)*4*(n^2)+((lamda(m)
^3)*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))^2);
        bm = (am*((lamda(m)^3*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))/2*n)-cm)/(alpha^2);
        Us = Us + am*J0;
        Uc = Uc + bm *J0;
    end
end
amp = sqrt((Us^2)+(Uc^2));
UX = 304.8*amp*sin(T*omega)*(133.32*(xpeak - xbase)^2/mu*L5);
UR = 0; theta = atan(xb/yb);
U1 = UR*sin(theta); U2 = UR*cos(theta); U3 = UZ;
return
%%%%%%%%%%%%%%%%%% calculation U for zone 4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

calzone4.m

```
function [U1,U2,U3]=calzone3(x,y,z,T)
n = 0; % Order of Bessel function desired
```

```
xmax = 500; % Look for roots in interval [0, xmax]
Jn = chebfun(@(t) besselj(n,t), [0, xmax]); % Construct the chebfun
lamda = roots(Jn); % Find roots to nearly full double precision accuracy
zb = z-z4; yb = y-y4; xb = x-x4;
xpeak = b4*sqrt((1-(zb/c4).^2))+x4; xbase = -b4*sqrt((1-(zb/c4).^2))+x4;
r = sqrt(xb^2+yb^2);
rbar =r/(xpeak - xbase);
alpha =(xpeak - xbase)*(sqrt((omega*rho)/mu));
Us = 0; Uc = 0;
    for m = 1:100
        for n = m-1
            J0 = besselj(0,lamda(m)*rbar);
            rb = linspace(0,1);
            J = besselj(0,lamda(m)*rb);
            F = J.*rb;
            intF = trapz(rb,F);
            G = (J.^2).*rb;
            intG = trapz(rb,G);
            cm = intF/intG;
            am = cm*((2*n)*(lamda(m)^3)*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))/((alpha^4)*4*(n^2)+((lamda(m)
^3)*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))^2);
            bm = (am*((lamda(m)^3*(lamda(m)*((2*n)-1)+1))/2*n)-cm)/(alpha^2);
            Us = Us + am*J0;
            Uc = Uc + bm *J0;
        end
    end
```

```
amp = sqrt((Us^2)+(Uc^2));
UX = 304.8*amp*sin(T*omega)*(133.32*(xpeak - xbase)^2/mu*L6);
UR = 0; theta = atan(xb/yb);
U1 = UR*sin(theta); U2 = UR*cos(theta); U3 = UZ;
return
%%%%%%%%%%%% example for the arrow 3d plot and contour plot %%%%%%%%%%%%
function plotzone13D(XYZ1,UVW1)
x1=XYZ(1,:);
y1=XYZ(2,:);
z1=XYZ(3,:);
u1=UVW(1,:);
v1=UVW(2,:);
w1=UVW(3,:);
[C,h] = contour(x1,y1,z1,u1,v1,w1,4);
set(h,'ShowText','on','TextStep',get(h,'LevelStep')*2)
colormap cool
figure
quiver3(x1,y1,z1,u1,v1,w1,'Color','blue','AutoScaleFactor',0.75,'MaxHeadSize',1);
hold on;
```

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นางสาวฉัตรวารินทร์ ตาสว่าง
วันเดือนปีเกิด	5 ตุลาคม 2533
วุฒิการศึกษา	ปีการศึกษา 2555: วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ทุนการศึกษา	ทุนอุดหนุนการทำวิทยานิพนธ์เพื่อนำไปสู่การตีพิมพ์เผยแพร่ ประจำปีการศึกษา 2558 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ผลงานทางวิชาการ	Chatvarin Tasawang and Supachara Kongnuan. (2016). Analytical solution of a 3D model for the airflow in a human oral cavity. *Naresuan University Journal: Science and Technology, 24(2),* 132-141.