การศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น ในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง

โดย

นายยศกร ประทุมวัลย์

ดุษฎีนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมทางการแพทย์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ปีการศึกษา 2559

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

การศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น ในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง

โดย

นายยศกร ประทุมวัลย์

ดุษฎีนิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมทางการแพทย์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ปีการศึกษา 2559
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

THE STUDY OF BLOOD FLOW THROUGH THE CAROTID BIFURCATION IN PATIENTS WITH ISCHEMICS STROKE

BY

MR. YOTSAKORN PRATUMWAL

A DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE
REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTORAL OF PHYLOSOPHY
MEDICAL ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
THAMMASAT UNIVERSITY
ACADEMIC YEAR 2016

COPYRIGHT OF THAMMASAT UNIVERSITY

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์

ดุษฎีนิพนธ์

ของ

นายยศกร ประทุมวัลย์

เรื่อง

การศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น
ในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง

ได้รับการตรวจสอบและอนุมัติ ให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต

เมื่อวันที่ 17 มิถุนายน พ.ศ. 2559

ประธานกรรมการสอบดุษฎีนิพนธ์ ____________________
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กริช เจียมจิโรจน์)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาดุษฎีนิพนธ์ ____________________
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ่มตระการ)

กรรมการสอบดุษฎีนิพนธ์ ____________________
(รองศาสตราจารย์ นายแพทย์สมบัติ มุ่งทวีพงษา)

กรรมการสอบดุษฎีนิพนธ์ ____________________
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

กรรมการสอบดุษฎีนิพนธ์ ____________________
(ดร.อธิพงษ์ มาลาทิพย์)

คณบดี ____________________
(รองศาสตราจารย์ ดร.ประภัสสร์ วังศกาญจน์)

หัวข้อดุษฎีนิพนธ์	การศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือด แคโรติดไบเฟอร์เคชั่นในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง
ชื่อผู้เขียน	นายยศกร ประทุมวัลย์
ชื่อปริญญา	ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา/คณะ/มหาวิทยาลัย	สาขาวิชาวิศวกรรมทางการแพทย์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รองศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ่มตระการ
ปีการศึกษา	2559

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นและการวิเคราะห์ความแข็งแรงของผนังหลอดเลือดในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง จะช่วยให้ทราบถึงความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือด ซึ่งเป็นข้อมูลที่จะทำให้ทราบถึงโอกาสการแตกของผนังหลอดเลือดที่มีการอุดตัน การทำนายจะมีความแม่นยำ เมื่อมีการนำเอาคุณสมบัติของเลือด ผนังหลอด รวมทั้งความเร็วการไหลตามช่วงเวลาการบีบตัวของหัวใจของผู้ป่วยแต่ละรายมาใช้ในการวิเคราะห์

ในงานวิจัยนี้จึงสร้างเครื่องมือวัดความหนืดเลือดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆ เพื่อวัดความหนืดเลือดของผู้ป่วย และการนำภาพจากอัตราซาวด์มาคำนวณคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด นอกจากนี้ภาพจากอัตราซาวด์ถูกนำมาสร้างกราฟความเร็วการไหลของเลือดในช่วงเวลาการบีบตัวของหัวใจด้วย สำหรับรูปร่างของผนังหลอดเลือดจะนำภาพจากการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็กมาสร้างเป็นแบบจำลองสามมิติสำหรับการคำนวณ

ข้อมูลที่ได้ทั้งหมดจะถูกนำไปคำนวณการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดและคำนวณความแข็งแรงของผนังหลอดเลือด โดยผลลัพธ์จากการคำนวณ จะนำไปตรวจสอบความถูกต้องกับการวัดความเร็วการไหลด้วยอัตราซาวด์บริเวณทางออกของหลอดเลือดอินเทอร์นอลและเอ็กเทอร์นอลแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น ซึ่งพบว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี สามารถนำกระบวนการทดสอบหาคุณสมบัติของหลอดเลือดและ วิธีการวิเคราะห์ปัญหาไปใช้ในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองได้

คำสำคัญ: แคโรติดไบเฟอร์เคชั่น, โรคหลอดเลือดสมอง, การไหลของเลือด**,** เครื่องวัดความหนืดเลือด

Dissertation Title	THE STUDY OF BLOOD FLOW THROUGH THE CAROTID BIFURCATION IN PATIENTS WITH ISCHEMICS STROKE
Author	Mr. Yotsakorn Pratumwal
Degree	Doctoral of Phylosophy
Major field/Faculty/University	Medical Engineering Engineering Faculty Thammasat University
Dissertation Advisor	Associate Professor Wiroj Limtrakan, Ph.D.
Academic Years	2016

ABSTRACT

The data obtained from an analysis of blood flow through the carotid bifurcation in stroke patients can be used as an indicator of the stress on the vessel wall. and the chance of plaque rupture. Putting together the properties of the carotid bifurcation and the blood flow velocity from the stroke patient into the analysis, the prediction of the stress on the vessel wall will be more accurate.

In this study, the U-tube viscometer using image processing program was built to measure blood viscosity of stroke patients. The image from the ultrasound was used to calculate the mechanical properties of the vessel wall. The pulse velocity of blood also was captured from the ultrasound picture. The MRI data was used to generate the three-dimensional model of the carotid bifurcation. All data is applied to the simulation of blood flow and strength analysis.

The data is obtained to calculate the blood flow through the carotid artery and strength of the vessel walls. The results of the calculations are verified with velocity data from the ultrasound at the exit of internal and external carotid bifurcation. As a result, the calculation was the closest to the results from the ultrasound. It can be shown that the testing and the calculating can be applied into the treatment on stroke patients.

Keywords: carotid bifurcation, stroke, blood flow, U-tube viscometer

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. วิโรจน์ ลิ่มตระการ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดต่างๆที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง อันเป็นแรงบันดาลใจและกำลังใจให้ผู้วิจัยสามารถทำงานได้สำเร็จลุล่วง

ขอกราบขอบพระคุณประธานกรรมการและกรรมการทุกท่าน ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ภรรยาและลูกชาย ที่คอยให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

นายยศกร ประทุมวัลย์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	(1)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	(2)
กิตติกรรมประกาศ	(4)
สารบัญตาราง	(10)
สารบัญภาพ	(11)
รายการสัญลักษณ์และคำย่อ	(15)
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์	4
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	4
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
2.1 โรคหลอดเลือดในสมองอุดตัน	6
2.1.1 การรักษาโรคหลอดเลือดสมองตีบตัน	8
2.1.2 ความหนืดของเลือด	9
2.2 การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง	14

2.2.1 Unsteady, three-dimensional fluid mechanic analysis of blood flow in plaque-narrowed and plaque-freed arteries 15
2.2.1.1 ปัญหาการวิจัย 15
2.2.1.2 สมมุติฐานการวิจัย 15
2.2.1.3 ขอบเขตการวิจัย 15
2.2.1.4 เครื่องมือและทฤษฎีปัญหาการวิจัย 16
2.2.1.5 บทนำ 16
2.2.1.6 การวิเคราะห์ปัญหา 16
2.2.1.7 ผลการวิเคราะห์ 19
2.2.1.8 สรุปงานวิจัย 23
2.2.1.9 วิจารณ์งานวิจัย 24
2.2.2 How critical is fibrous cap thickness to carotid plaque stability? A flow-plaque interaction model 24
2.2.2.1 ปัญหาการวิจัย 25
2.2.2.2 สมมุติฐานการวิจัย 25
2.2.2.3 ขอบเขตการวิจัย 25
2.2.2.4 เครื่องมือและทฤษฎีปัญหาการวิจัย 25
2.2.2.5 บทนำ 25
2.2.2.6 การวิเคราะห์ปัญหา 26
2.2.2.7 ผลการวิเคราะห์ 27
2.2.2.8 สรุปงานวิจัย 29
2.2.2.9 วิจารณ์งานวิจัย 29
2.2.3 Sites of Rupture in Human Atherosclerotic Carotid Plaques Are Associated With modeling High Structural Stresses: An In Vivo MRI-Based 3D Fluid-Structure Interaction Study 30
2.2.3.1 ปัญหาการวิจัย 30
2.2.3.2 สมมุติฐานการวิจัย 30
2.2.3.3 ขอบเขตการวิจัย 31
2.2.3.4 เครื่องมือและทฤษฎีปัญหาการวิจัย 31
2.2.3.5 บทนำ 31

2.2.3.6 การวิเคราะห์ปัญหา 32
2.2.3.7 ผลการวิเคราะห์ 33
2.2.3.8 สรุปงานวิจัย 35
2.2.3.9 วิจารณ์งานวิจัย 36
2.2.4 Carotid arterial plaque stress analysis using fluid–structure interactive simulation based on in-vivo magnetic resonance images off our patients 36
2.2.4.1 ปัญหาการวิจัย 37
2.2.4.2 สมมุติฐานการวิจัย 37
2.2.4.3 ขอบเขตการวิจัย 37
2.2.4.4 เครื่องมือและทฤษฏีปัญหาการวิจัย 37
2.2.4.5 บทนำ 37
2.2.4.6 การวิเคราะห์ปัญหา 38
2.2.4.7 ผลการวิเคราะห์ 39
2.2.4.8 สรุปงานวิจัย 43
2.2.4.9 วิจารณ์งานวิจัย 44

บทที่ 3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง 45

3.1 ของไหล 45
3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล 45
3.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม 48
3.1.3 สมการความต่อเนื่องในสามมิติ (Continuity equation) 51
3.1.4 สมการนาเวียร์-สโตกส์ในสามมิติ (Navier-Stokes equation) 52
3.1.5 แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน 54
3.1.6 เงื่อนไขขอบ 59
3.1.7 ของไหลแบบนิวโตเนี่ยน 63
3.1.8 ของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยน 64

3.2 ของแข็ง 71
3.2.1 คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ 71
3.2.2 สมการไฟไนเอลิเมนต์ 76
3.3 ชีวกลศาสตร์ (Biomechanics) 84
3.3.1 คุณสมบัติของวัสดุไฮเปอร์อิลาสติก 85

บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล 99

4.1 การวัดความหนืดของเลือด 99
4.1.1 การวัดระดับการไหลในหลอดรูปตัวยูเทียบกับเวลา 100
4.1.2 การคำนวณหาค่าความหนืดของเลือด 101
4.1.3 การวัดความหนืดของเลือดในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง 105
4.2 การหาค่าคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด 106
4.3 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น 109
4.5 ผลการวิเคราะห์ 113

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ 118

5.1 สรุปผลการวิจัย 118
5.1.1 การวัดความหนืดเลือด 118
5.1.2 การหาค่าคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด 118
5.1.3 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น 119
5.1.4 การวัดความเร็วการไหลของเลือดตามการบีบตัวของหัวใจ 119
5.1.5 การวิเคราะห์การไหลและความเค้นของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น 119
5.2 ข้อเสนอแนะ 119

รายการอ้างอิง 121

ประวัติผู้เขียน 124

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ THAMMASAT UNIVERSITY

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

2.1 อัตราการไหลของเลือดที่ไหลผ่านหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันกับหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน 19

2.2 แสดงความเค้นเฉลี่ยที่ผนังของ Plaque ของ Lipid Core, Calcification, Wall 34

2.3 แสดงความเค้นเฉือนสูงสุดของ Ulcer, Lipid Core, Calcification, Wall 35

2.4 ผลของค่าความเค้นและ Morphological factor ของกลุ่มตัวอย่าง 42

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

1.1 carotid bifurcation 1
1.2 Pulse wave velocity 3
1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของผนังหลอดเลือดจากภาพ Ultrasound 4
2.1 โรคหลอดเลือดสมองตีบตัน 7
2.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนืดและปริมาณของ particle 10
2.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนืดและการเกาะตัวของเม็ดเลือด 11
2.4 หลักการทำงานของ cone-and-plate viscometer 12
2.5 scanning capillary-tube rheometer using image processing technique 12
2.6 ระดับของไหลในท่อรูปตัว U ที่ช่วงเวลาต่างๆ 13
2.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดและ shear rate ที่ได้จากการวัดด้วย SCTR 14
2.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดและ shear rate ที่ได้จากการวัดด้วย SCTR 14
2.9 แสดงเส้นเลือด posterior tibial artery 17
2.10 ภาพตัดขวางของหลอดเลือดจาก Intravenous ultrasound 17
2.11 แสดง CAD ของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันและหลอดเลือด ที่มีการนำไขมันที่อุดตันออกแล้ว 17
2.12 รูปแบบการไหลของเลือดที่ไหลผ่าน posterior tibial artery 18
2.13 แสดง mesh ของหลอดเลือดที่มีการสร้าง Inflation ที่บริเวณใกล้ผนังหลอดเลือด 19
2.15 แสดงอัตราการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันเปรียบเทียบกันระหว่าง เลือดที่มีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-Newtonian 20
2.16 แสดงค่าความเค้นเฉือนรวม (ตามยาวและแนวเส้นรอบวง) เฉลี่ยของหลอดเลือดใน ช่วงเวลาต่างๆ กันของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน 21
2.17 แสดงค่าความเค้นเฉือนเฉลี่ยตามแนวเส้นรอบวงในแต่ละช่วงเวลา ณ ตำแหน่งต่างๆ ของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน 21
2.18 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นเฉือนรวมเฉลี่ยของเลือดที่มีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-Newtonian ผ่านหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน 22

2.19 แสดงความเร็วการไหลของเลือดในรูปแบบของเวกเตอร์และคอนทัวร์ ของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน ณ ช่วงเวลาต่างๆ 22
2.20 แสดงค่าความเค้นเฉือนบนผนังหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตันณ ช่วงเวลาต่างๆ 23
2.21 แสดงรูปร่างและขนาดของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันใน 2 มิติ 26
2.22ก แสดงการไหลเป็นเวกเตอร์และค่าการกระจายของความเค้นของเส้นเลือด ที่มีการอุดตัน 70% และ Fibrous cap มีความหนา 1 mm. 27
2.22ข แสดงการไหลเป็นสตรีมไลด์และค่าการกระจายของความเค้นของเส้นเลือด ที่มีการอุดตัน 80% และ Fibrous cap มีความหนา 0.5 mm. 27
2.23ก แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาของ Fibrous cap กับเปอร์เซ็นต์การอุดตันของ หลอดเลือด 40% และ 50% ที่มีผลต่อค่าความเค้น 28
2.23ข แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์การอุดตันของหลอดเลือดกับความหนา ของ Fibrous cap ที่มีผลต่อค่าความเค้น 28
2.24 แสดงหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันจาก TOF, T2, PD และ เนื้อเยื่อ ซึ่งแสดงถึงบริเวณ ความเสียหายของเนื้อเยื่อบริเวณนั้นรวมทั้งการเกาะตัวของลิ่มเลือดด้วย 32
2.25 แสดง PD-weighted ของภาพ MR และภาพตัดของหลอดเลือดในสามมิติ 33
2.26 แสดงการกระจายตัวของความเค้นในสามมิติ ซึ่งแสดงค่าความเค้นสูงสุดที่เนื้อเยื่อ ที่เกิดความเสียหาย 33
2.27 แสดงองค์ประกอบของ Plaque 38
2.28 แสดงรูปร่างสามมิติของหลอดในกลุ่มตัวอย่าง 38
2.29 เงื่อนไขในการวิเคราะห์ปัญหา 39
2.30 แสดงการกระจายตัวของความเค้นเฉือนที่ผนังเฉลี่ยและขณะมีอัตราการไหลสูงสุด ของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 4 ตัวอย่าง 39
2.31 แสดงการกระจายตัวของความเค้นสูงสุด โดยในคอลัมน์แรกแสดงการกระจายตัว ของความเค้นบนหลอดเลือดภาคตัดตามยาว คอลัมน์ที่สองแสดงการกระจายตัว ของความเค้นในภาคตัดขวางหลอดเลือด และคอลัมน์ที่สามแสดงค่าความเค้นเฉือน ที่ผนังสูงสุดของหลอดเลือดที่ตำแหน่งต่างๆเป็นกราฟแท่ง 40
2.32 แสดงการกระจายตัวของค่าเค้นบน Fibrous cap โดยคอลัมน์แรกแสดงผิวของ Fibrous cap ของแต่ละกลุ่มตัวอย่าง คอลัมน์ที่สองแสดงความหนาของ Fibrous cap คอลัมน์ที่สามแสดงการกระจายตัวของความเค้นเฉือนสูงสุดบน Fibrous cap และ คอลัมน์ที่สี่แสดงการกระจายตัวของความเค้น relative cyclic VWTS 41

3.1 มวลของของไหลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมสองมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน 45
3.2 แรงที่กระทำบนปริมาตรควบคุมสองมิติ 48
3.3 ปริมาตรควบคุมที่ผนัง 59
3.4 การกระจายตัวของความเร็วที่ผนัง 60
3.5 Turbulent boundary layer 61
3.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนกับอัตราการเฉือนของของไหลแบบนิวโตเนี่ยน 64
3.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและความหนืดกับอัตราการเฉือนของของไหลแบบนิวโตเนี่ยนและนอนนิวโตเนี่ยน 65
3.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดกับอัตราการเฉือนของ Cross model 67
3.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับอัตราการเฉือนของ Bingham plastic model กับ Casson model 69
3.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับอัตราการเฉือนของ Carreau model 70
3.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดกับอัตราการเฉือนของ Carreau Yasuda model 71
3.12 ลักษณะของแรงกระทำชนิดต่าง ๆ 73
3.13 ความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain) 74
3.14 ความเครียดเฉือน (Shear strain) 75
3.15 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain Curve) แบบมีจุดคราก (Yield point) 76
3.16 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain Curve) สำหรับวัสดุประเภทเนื้อเยื่อนุ่ม (Soft tissue) 76
3.17 ความสมดุลตามตำแหน่งใดๆ ในของแข็งสามมิติ 77
3.18 เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อ 80
3.19 แสดงกฎความสัมพันธ์ของฮุค 86
3.20 แสดงพฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้นของยาง 87
3.21 แสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนระยะยืด 87
4.1 แผนภาพการทำงานและอุปกรณ์ของเครื่องวัดความหนืดเลือด 100
4.2 โปรแกรมประมวลผลภาพที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัย 100
4.3 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับเวลาจากการไหลของเลือดในหลอดรูปตัวยูที่ได้จากโปรแกรมการประมวลผลจากภาพ 101

4.4 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับระยะ $h_1 - h_2$ 103
4.5 กราฟแสดงค่าความหนืดของเลือดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆ ด้วย Casson model 104
4.6 เครื่องวัดความหนืดแบบ Rotating Viscometer (RV) 104
4.7 กราฟเปรียบเทียบค่าความหนืดที่ได้จากการวัดด้วย RV กับเครื่องวัดความหนืดที่พัฒนาขึ้นตลอดช่วงอัตราเฉือน 105
4.8 กราฟแสดงค่าความหนืดเลือดของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองที่อัตราเฉือนต่างๆ จำนวน 19 ราย 106
4.9 ภาพอัตราซาวด์บริเวณแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง 107
4.10 ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา 108
4.11 ความเค้นและความเครียดของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นจากการคำนวณ 109
4.12 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นจากภาพการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็ก 109
4.13 กราฟความหนืดเลือดของผู้ป่วยกับค่าอัตราเฉือนสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหล 110
4.14 ภาพจากอัตราซาวด์สำหรับหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา 110
4.15 แสดงตำแหน่งการวัดความเร็วการไหลของเลือด 111
4.16 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของเลือดกับเวลาที่ common carotid 112
4.17 แผนภาพการวิเคราะห์ปัญหาแบบ 2 way Fluid Solid Interaction (2 way FSI) 112
4.18 แสดงเวกเตอร์ความเร็วการไหลของเลือดที่เวลาต่างๆกัน 114
4.19 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของเลือดกับเวลาที่ common carotid 115
4.20 กราฟเปรียบเทียบความเร็วเฉลี่ยของเลือดที่ช่วงเวลาต่างกันจากการวัดจริงจากอัตราซาวด์กับผลจากการวิเคราะห์การไหล บริเวณทางออกของ internal carotid bifurcation 115
4.21 กราฟเปรียบเทียบความเร็วเฉลี่ยของเลือดที่ช่วงเวลาต่างกันจากการวัดจริงจากอัตราซาวด์กับผลจากการวิเคราะห์การไหล บริเวณทางออกของ external carotid bifurcation 116
4.22 เปรียบเทียบเวกเตอร์ความเร็วจากการคำนวณด้วยวิธี 1 way FSI และ 2 way FSI ที่เวลา 1.2 วินาที 117
4.23 เปรียบเทียบการกระจายตัวของความเค้นจากการคำนวณด้วยวิธี 1 way FSI และ 2 way FSI ที่เวลา 1.2 วินาที 117

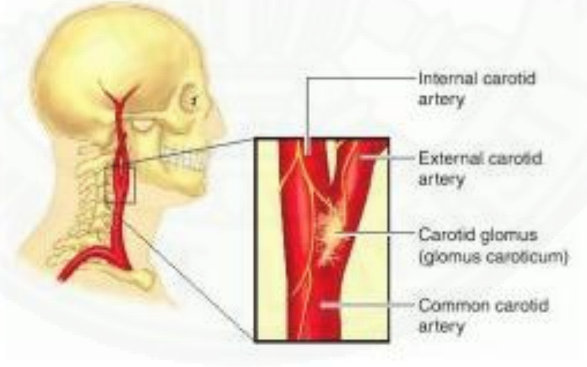
รายการสัญลักษณ์และคำย่อ

สัญลักษณ์/คำย่อ	คำเต็ม/คำจำกัดความ
ALE	Arbitrary Lagrangian-Eluerian
CCA	Common Carotid Artery
CT	Computer Tomography
ECA	External Carotid Artery
FMSS	Flow maximum shear stress
FSI	Fluid-solid interaction
ICA	Internal Carotid Artery
MRI	Magnetic Resonance Imaging
MRA	Magnetic Resonance Angiography
PWS	Wall maximum principal stress
rcVWTS	relative cyclic VWTS
SCRT	Scanning Capillary-tube Rheometer
TIA	Transient Ischemic Attack
TCD	Trans Cranial Doppler

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ปัจจุบันโรคหลอดเลือดสมองหรือ Stroke เป็นสาเหตุการเสียชีวิตอันดับ 3 ของคนไทย โดยผู้ป่วยที่ไม่เสียชีวิตก็จะมีความทรมานจากความพิการ อัมพฤกษ์หรืออัมพาต หลงเหลือเป็นจำนวนมาก การรักษาผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองอุดตัน โดยเฉพาะชนิดแบบขาดเลือดเฉียบพลันคือ การส่งผู้ป่วยมาโรงพยาบาลให้เร็วที่สุดภายในระยะ 3 ชั่วโมงแรกตั้งแต่เริ่มมีอาการ เพื่อให้ผู้ป่วยมีเลือดกลับมาเลี้ยงสมองให้เร็วที่สุด สำหรับวิธีการตรวจที่แพทย์ใช้ในการวินิจฉัยโรคหลอดเลือดสมอง คือ ตรวจด้วยเครื่องมือแพทย์ เช่น เครื่องตรวจดูภาพและตรวจการไหลเวียนเลือด (Echo-Ultrasound) ของหลอดเลือดใหญ่ที่คอ (carotid bifurcation) ช่วยให้แพทย์เห็นความผิดปกติของหลอดเลือดใหญ่ที่คอ ว่ามีไขมันอุดตันหรือไม่และมากน้อยเพียงใด มีเลือดไหลผ่านไปเลี้ยงสมองดีหรือไม่ ซึ่งช่วยบอกการตีบตันของหลอดเลือดในสมองได้



รูปที่ 1.1 carotid bifurcation (http://www.nhs.uk/)

เมื่อแพทย์เห็นถึงแนวโน้มความผิดปกติก็จะสามารถให้การรักษาได้อย่างทันท่วงที โดยหากพบว่าสาเหตุเกิดจากการตีบของผนังภายในหลอดเลือด แพทย์ก็สามารถใช้บอลลูนหรือตาข่ายลวด (Stent) เพื่อถ่างขยายผนังภายในหลอดเลือดที่ตีบให้ขยายตัวกว้างขึ้น ข้อสำคัญของการรักษาผู้ป่วยหลอดเลือดสมองอุดตันเฉียบพลันให้ได้ผลดี และลดต้นเหตุของการเป็นอัมพาตนั้น ต้องอาศัย

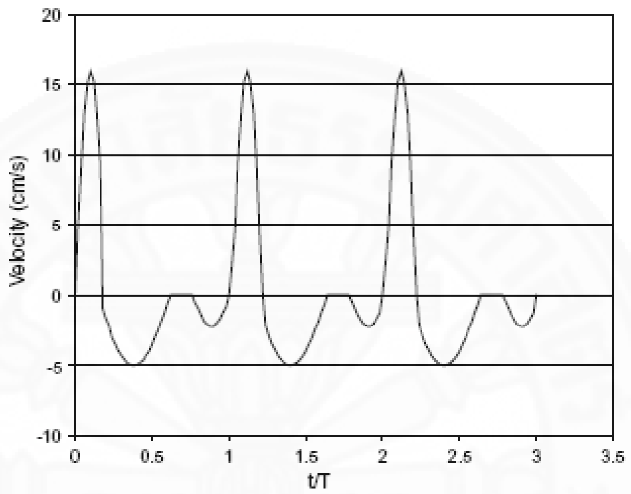
ความพร้อมของเทคโนโลยีในการรักษา ไม่ว่าจะเป็นอุปกรณ์หรือเทคนิคที่มีความเหมาะสมรวมทั้งยาที่มีประสิทธิภาพ ตลอดไปจนแพทย์ผู้เชี่ยวชาญ

อย่างไรก็ตามการใช้เครื่องตรวจดูภาพและตรวจการไหลเวียนเลือดก็ไม่สามารถช่วยให้แพทย์สามารถวินิจฉัยโรคได้อย่างแม่นยำเสมอไป เพราะในบางครั้งการที่แพทย์จะตัดสินใจรักษาด้วยการใช้บอลลูนหรือตาข่ายลวด ก็ต่อเมื่อผู้ป่วยมีอาการผิดปกติหรือมีการอุดตันในเส้นเลือดสมบูรณ์แล้ว โดยอันตรายที่ทำผู้ป่วยเสียชีวิตอีกอย่างหนึ่ง คือ การแตกของไขมันที่เกาะผนังหลอดเลือด (Plaque rupture) แม้ไม่มีการอุดตันที่สมบูรณ์ก็ตาม แล้วเกิดลิ่มเลือดหลุดผ่านเข้าไปในสมองชั้นในซึ่งอาจทำให้ผู้ป่วยเสียชีวิต สำหรับสาเหตุของการเกิด Plaque rupture นั้น มาจากความเค้นเฉือนบนผนัง (Wall shear stress) หลอดเลือดมีค่าสูงจนกระทั่งผนังหลอดเลือดเกิดฉีกขาด (Victor, 1997) โดยค่า Wall shear stress จะมีค่าแปรผันไปตามลักษณะการไหลของเลือด (Bernsdorf, 2009) ในกรณีการไหลผ่านหลอดเลือดปกติ (Gijsen, 1999) ค่า Wall shear stress มีค่าไม่สูงนัก แต่หากเป็นการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่มีการอุดตันด้วยไขมันจะทำให้ค่า Wall shear stress มีค่าสูงขึ้น เนื่องจากการไหลของเลือดมีสิ่งกีดขวางและมีพฤติกรรมการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent) มากขึ้น (Manosh, 2009)

ดังนั้น หากสามารถทำนายพฤติกรรมการไหลของเลือดก็จะสามารถหาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือดได้ จึงมีการนำเอาเทคโนโลยีการคำนวณพลศาสตร์ของไหลมาจำลองการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือด (Barbara, 2004) โดยกำหนดให้เลือดเป็นของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยน (Non-Newtonian fluid) เพราะสามารถทดแทนพฤติกรรมของเลือดได้เป็นอย่างดี (Chen, 2006) อย่างไรก็ตามเนื่องจาก model ของ Non-Newtonian fluid มีหลากหลายรูปแบบ จึงมีการทดสอบ Model ที่มีความเหมาะสม (Gijsen, 1999) โดยพบว่าการใช้ Carreau-Yasuda Model สามารถทดแทนพฤติกรรมของเลือดได้เป็นอย่างแม่นยำ และในการหาค่าความหนืดของเลือดในผู้ป่วย ซึ่งแต่ละคนก็จะมีค่าไม่เท่ากัน จึงต้องพัฒนาเครื่องวัดความหนืดแบบ U-tube viscometer (Kim, 2000; Kim, 2002; and Kim, 2009) ที่ใช้เทคนิคของ image processing มาวัดการเปลี่ยนแปลงระดับความสูงของเลือดใน U-tube

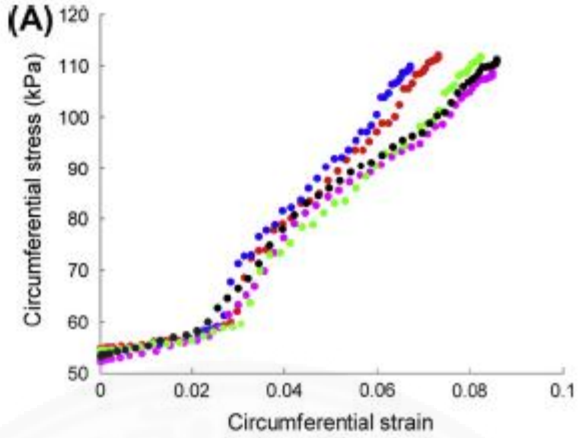
ในการวิเคราะห์การไหลนั้น รูปร่างหลอดเลือดของคนไข้ก็มีความสำคัญกับผลการทำนาย โดยการสร้างแบบจำลองรูปร่างสามารถนำข้อมูลที่ได้จากการตรวจวัดด้วย MRI (Magnetic resonance imaging) ซึ่งเป็นภาพหน้าตัดของหลอดเลือดที่มีการอุดตันด้วยไขมัน จากนั้นจึงนำภาพดังกล่าวมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (CAD: Computer Aided Design) ด้วยโปรแกรมกราฟฟิกส์ จนได้รูปร่างที่เหมือนจริง (Abraham, 2008) ใน 3 มิติ

เนื่องจากหัวใจมีการบีบตัวเป็นจังหวะทำให้ความเร็วการไหลและความดันภายในหลอดเลือดเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งเรียกว่า Pulse wave velocity (Marques, 2003) ดังรูปที่ 2 โดยการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวส่งผลต่อรูปแบบการไหลรวมทั้งค่าความเค้นบนผนังของหลอดเลือด (Marshall, 2004) จึงต้องวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสภาวะไม่คงตัว (Unsteady flow) (Deplano, 1999) เพื่อจำลองพฤติกรรมดังกล่าว



รูปที่ 1.2 Pulse wave velocity

คุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดของผู้ป่วยแต่ละคนจะมีค่าไม่เท่ากัน โดยมีงานวิจัยที่นำเอาผนังหลอดเลือดมาทดสอบ tensile test เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด (Maher, 2009) แต่ในร่างกายของมนุษย์นั้น ผนังหลอดเลือดถูกห่อหุ้มด้วยกล้ามเนื้อ จึงเสมือนมีแรงต้านจากภายนอกทำให้การหาคุณสมบัติทางวัสดุด้วยการทดสอบ tensile test ไม่สามารถทดแทนพฤติกรรมของผนังหลอดเลือดภายในร่างกายได้ จึงมีการนำภาพเคลื่อนไหวของ Echo Ultrasound มาคำนวณหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของผนังหลอดเลือดภายในร่างกายมนุษย์ (Khamdaeng, 2012) ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของผนังหลอดเลือดจากภาพ Ultrasound (Khamdaeng, 2012)

ผู้ป่วยโรคหลอดเลือดอุดตันที่สมอง เกิดจากการอักเสบของหลอดเลือด เนื่องจากมีไขมันเกาะที่ผนังหลอดเลือด และเมื่อขนาดของการอุดตันมากขึ้น ก็อาจจะทำให้แตกและมีลิ่มเลือดบางส่วนหลุดเข้าไปอุดตันที่เส้นเลือดของสมองส่วนใน ก่อให้เกิดความเสียหายกับสมองได้ ในปัจจุบันได้มีการศึกษา hemorheology อย่างกว้างขวาง เพราะเป็นปัจจัยสำคัญที่ส่งผลต่อหลอดเลือด โดยคุณสมบัติของ hemorheology จะเกิดจากความหนืดของเลือด, hematocrit, ค่าการรวมตัวและการยุบตัวของเม็ดเลือดแดงและปริมาณ fibrinogen ในเลือด โดยค่าเหล่านี้แม้ทราบกันเป็นอย่างดีว่าส่งผลต่อการไหลของเลือด แต่ความหนืดของเลือดที่ส่งผลโดยตรงกลับไม่ได้ตรวจวัดกันมากนักในระดับคลีนิก ทั้งที่เป็นปัจจัยหลักที่ส่งผลต่อความดันที่เพิ่มขึ้น 20% หากเลือดมีความหนืดเพิ่มขึ้น 20% หรือผนังหลอดเลือดต้องขยายตัวเพิ่มขึ้นในแนวรัศมี 4.66% (Yildirim, 1999) นอกจากนี้ความเค้นที่ผนังหลอดเลือดเพิ่มขึ้น หากเลือดมีความหนืดเพิ่มขึ้น (Brun, 2000) เหล่านี้เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการแตกของไขมันในหลอดเลือด

ในงานวิจัยนี้จะวิเคราะห์การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันในผู้ป่วย Stroke โดยหาค่าความหนืดของเลือดในผู้ป่วยด้วยเครื่องวัดความหนืดเลือดแบบ image processing U-tube viscometer ที่พัฒนาและสร้างต้นแบบขึ้นสำหรับใช้งาน และหาค่าคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดด้วยการวัดการขยายตัวของผนังหลอดเลือดจากภาพเคลื่อนไหวจาก Ultrasound สำหรับเป็นข้อมูลในการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะศึกษาปัจจัยทางกลที่มีผลต่อการเกิด Plaque rupture ซึ่งได้แก่ ความหนืดของเลือด ความดัน Wall shear stress และ Principle stress เพื่อเป็นข้อมูลให้กับแพทย์สำหรับวินิจฉัยและรักษาผู้ป่วย Stroke ต่อไป ทั้งในส่วนของการรักษาด้วยยา และการใส่ stent เพื่อขยายขนาดของหลอดเลือด

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 ศึกษาและวิเคราะห์การไหลของเลือดภายในหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันในผู้ป่วย Stroke

1.2.2 ศึกษาปัจจัยทางกลที่มีผลต่อความเสียหายของผนังหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน

1.2.3 หาแนวทางการวิเคราะห์การไหลของเลือดภายในหลอดเลือดที่มีความแม่นยำ

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1.3.1 เป็นปัญหาการไหลของของไหลใน 3 มิติ

1.3.2 เลือดมีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-Newtonian fluid

1.3.3 ผนังหลอดเลือดมีพฤติกรรมแบบ Hyper-elastic

1.3.4 วิเคราะห์ปัญหาแบบ Solid-Fluid Interaction แบบ two-way

1.3.5 วิเคราะห์การบีบตัวของหัวใจ 2 วัฏจักร

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 เข้าใจถึงพฤติกรรมการไหลของเลือดใน carotid bifurcation ที่มีไขมันอุดตัน

1.4.2 แนวทางการวิเคราะห์การไหลของเลือดภายในหลอดเลือดที่ให้ผลลัพธ์ถูกต้องและแม่นยำ

1.4.3 ปัจจัยทางกลที่มีผลต่อความเสียหายของผนังหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน

1.4.4 ข้อมูลสำหรับแพทย์ในการวิเคราะห์แนวทางการรักษาผู้ป่วย Stroke

1.4.5 องค์ความรู้ที่ได้นำไปพัฒนาในงานวิจัยระดับสูงขึ้นไป

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 โรคหลอดเลือดในสมองอุดตัน

โรคหลอดเลือดสมองตีบตัน หรือ Stroke ซึ่งเกิดจากเลือดไม่สามารถเคลื่อนที่ไปเลี้ยงสมองได้ทำให้สมองส่วนดังกล่าวขาดเลือด เนื่องจากมีการอุดตันของเส้นเลือดภายในสมอง ทั้งจากการอักเสบแล้วมีไขมันอุดตันหรือการเต้นของหัวใจที่ผิดปกติแล้วมีลิ่มเลือดหลุดไปขวางการไหลของเลือด ทำให้สมองขาดเลือดแล้วทำให้เซลล์สมองได้รับความเสียหายและทำงานไม่ได้ กลายเป็นโรคหลอดเลือดสมองตีบตัน โดยผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองตีบตัน จะมีอาการ เช่น เวียนศีรษะ มีอาการชาครึ่งซีก อ่อนแรงและหน้าเบี้ยว พูดลำบาก ปวดศีรษะ โดยอาการดังกล่าวอาจเกิดขึ้นพร้อมกันหรืออย่างใดอย่างหนึ่งก็ได้ ควรสงสัยว่ามีความเสี่ยงจะเป็นโรคหลอดเลือดสมองตีบตัน และควรรีบปรึกษาแพทย์ เพื่อให้การรักษาและวินิจฉัยโดยด่วน ถ้าผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองตีบตัน ได้รับการรักษาและสามารถกลับคืนมาเป็นปกติใน 24 ชั่วโมง เรียกว่า TIA (Transient Ischemic Attack) หรือ Mini stroke ซึ่งกลุ่มเสี่ยงที่เป็นโรคหลอดเลือดสมองจะมีช่วงอายุในกลุ่มวัยกลางคนขึ้นไป

สาเหตุสำคัญของ โรคหลอดเลือดสมองตีบตัน เกิดจากการมีไขมันไปเกาะผนังหลอดเลือดด้านในหลอดเลือดสมอง หรือมีลิ่มเลือดขนาดเล็กที่ลิ้นหัวใจและผนังหัวใจ หลุดลอยตามกระแสเลือดไปอุดตันหลอดเลือดในสมอง ซึ่งมักพบในผู้ป่วยโรคหัวใจเต้นผิดจังหวะ หัวใจโต ลิ้นหัวใจตีบหรือรั่ว ผนังหัวใจรั่ว หรือเกิดจากการฉีกของผนังหลอดเลือดด้านใน ทำให้เส้นเลือดอุดตัน รวมถึงการแข็งตัวของเลือดที่เร็วเกินไป หรือเกล็ดเลือดมากเกินไป ล้วนเป็นสาเหตุหลักที่ทำให้หลอดเลือดอุดตันได้ (ยรรยง, 2552)

รูปที่ 2.1 โรคหลอดเลือดสมองตีบตัน (www.mybraintest.org)

ปัจจัยเสี่ยงที่จะทำให้เกิดโรคหลอดเลือดสมองมีอยู่หลายปัจจัย โดยปัจจัยที่จะกล่าวถึงนี้จะมีโอกาสเกิดโรคหลอดเลือดสมองได้มากกว่าปกติ อย่างไรก็ตามผู้ที่ไม่มีปัจจัยเสี่ยง ก็มีโอกาสเกิดโรคหลอดเลือดสมองได้เช่นกัน สำหรับปัจจัยเสี่ยงที่จะทำให้เกิดโรคหลอดเลือดสมองมีดังนี้ (จิราภรณ์ , 2558)

- อายุ เมื่อมีอายุมากขึ้น หลอดเลือดก็จะเสื่อมตามไปด้วย โดยผิวชั้นในของหลอดเลือดจะหนาและแข็งขึ้นจากการที่มีไขมันและหินปูนมาเกาะ (IMT: Intima-media thickness)
- เพศ พบว่าเพศชายมีความเสี่ยงต่อโรคหลอดเลือดสมองสูงกว่าเพศหญิง
- ความดันโลหิตสูง ผู้ที่มีภาวะความดันโลหิตสูงจึงมีโอกาสเป็นโรคหลอดเลือดสมองได้มากกว่าคนปกติ
- เบาหวาน เป็นสาเหตุที่ทำให้หลอดเลือดแข็งทั่วร่างกาย
- ไขมันในเลือดสูง เป็นความเสี่ยงของโรคหลอดเลือดสมองเช่นเดียวกับโรคหลอดเลือดหัวใจ
- โรคหัวใจ เช่น โรคลิ้นหัวใจผิดปกติ หัวใจเต้นผิดจังหวะ
- การสูบบุหรี่

- การใช้สารเสพติดบางชนิด เช่น โคเคน, เฮโรอีน และ ยาม้า
- โรคซิฟิลิส เป็นสาเหตุของหลอดเลือดอักเสบและหลอดเลือดแข็ง
- การขาดการออกกำลังกาย และ โรคอ้วน

การจะทราบว่าผู้ป่วยที่มาพบแพทย์เป็นโรคหลอดเลือดสมองหรือไม่ เริ่มต้นจากการสอบถามอาการ ซึ่งจะมีอาการและปัจจัยบ่งชี้ว่าเป็นโรคหลอดเลือดสมองหรือไม่ โดยแพทย์จะให้ยาละลายลิ่มเลือดก่อนเพื่อลดความเสียหายของสมอง จากนั้นจึงทำการตรวจโดยเครื่องมือทางการแพทย์ ที่ให้ผลละเอียดและมีความแม่นยำสูง เพื่อประกอบการวินิจฉัยของแพทย์ โดยเริ่มต้นจากการตรวจการไหลเวียนเลือดของหลอดเลือดในสมอง (Trans cranial Doppler : TCD) และการตรวจหลอดเลือดคอ การตรวจสมองด้วยคอมพิวเตอร์ (CT Scan) การตรวจด้วยคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (MRI และ MRA) เป็นต้น ซึ่งผลที่ได้มีแม่นยำมากพอ ที่จะช่วยทำให้แพทย์วางแผนการรักษาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.1.1 การรักษา โรคหลอดเลือดสมองตีบตัน

โรคหลอดเลือดสมองเกิดจากการที่สมองขาดเลือดทำให้เซลล์สมองได้รับความเสียหาย ดังนั้นหากทำให้เซลล์สมองเกิดความเสียหายน้อยที่สุด จะทำให้ผู้ป่วยสามารถกลับมาใช้ชีวิตตามปกติได้เร็วยิ่งขึ้น ดังนั้นหากเกิดอาการที่กล่าวมาข้างต้น ผู้ป่วยจำเป็นต้องมาถึงมือแพทย์เพื่อทำการรักษา โดยทานยาละลายลิ่มเลือดภายใน 3 ชั่วโมง เพื่อให้เลือดสามารถเคลื่อนที่ไปเลียงเซลล์สมองที่ขาดเลือดได้ตามปกติ ซึ่งจะช่วยรักษาเซลล์สมองไว้ได้ สิ่งที่เป็นปัจจัยสำคัญช่วยให้เกิดความสำเร็จในการรักษา โรคหลอดเลือดสมองตีบตัน คือ การทำให้เซลล์ของสมองยังอยู่รอดให้ได้นานที่สุด ถ้าเราสามารถทำให้เลือดไหลเวียนได้ทันเวลาและในระดับที่เพียงพอ ก็สามารถทำให้เนื้อสมองบริเวณนั้นฟื้นตัวได้เร็ว ส่งผลให้ผู้ป่วยกลับมาเป็นปกติได้

แม้ว่าผู้ป่วยจะเกิดภาวะเส้นเลือดในสมองอุดตันแล้ว และทำการรักษาจนกระทั่งกลับมาใช้ชีวิตใกล้เคียงกับปกติแล้ว ก็ยังคงต้องติดตามอาการต่อไปเพื่อป้องกันการเกิดซ้ำ ซึ่งจะอันตรายและรุนแรงกว่าเดิม ดังนั้นแพทย์จึงใช้ TCD ติดตามภาวะการอุดตันว่าเพิ่มขึ้นหรือไม่ ซึ่งปกติจะเกิดขึ้นที่หลอดเลือด Carotid bifurcation และข้อมูลภาพจากการทำ TDC ก็ไม่สามารถช่วยให้แพทย์ทำนายการแตกตัวของไขมันในหลอดเลือดบริเวณดังกล่าวได้ ทำได้เพียงการให้ยาหรือใส่ตาข่ายถ่าง (Stent) เพื่อป้องกันการอุดตันเพิ่มและการแตกของหลอดเลือด โดยข้อเสียของการใช้ยารักษาคือเกิดภาวะเลือดไม่แข็งตัวได้ ในขณะที่การใส่ Stent มีอายุการใช้งาน 15 ปี โดยหากเลยระยะเวลาดังกล่าวแล้วก็ไม่เป็นที่แน่ชัดว่าจะเกิดเหตุการณ์อะไรขึ้นเพราะไม่สามารถผ่าตัดออกจากร่างกายได้

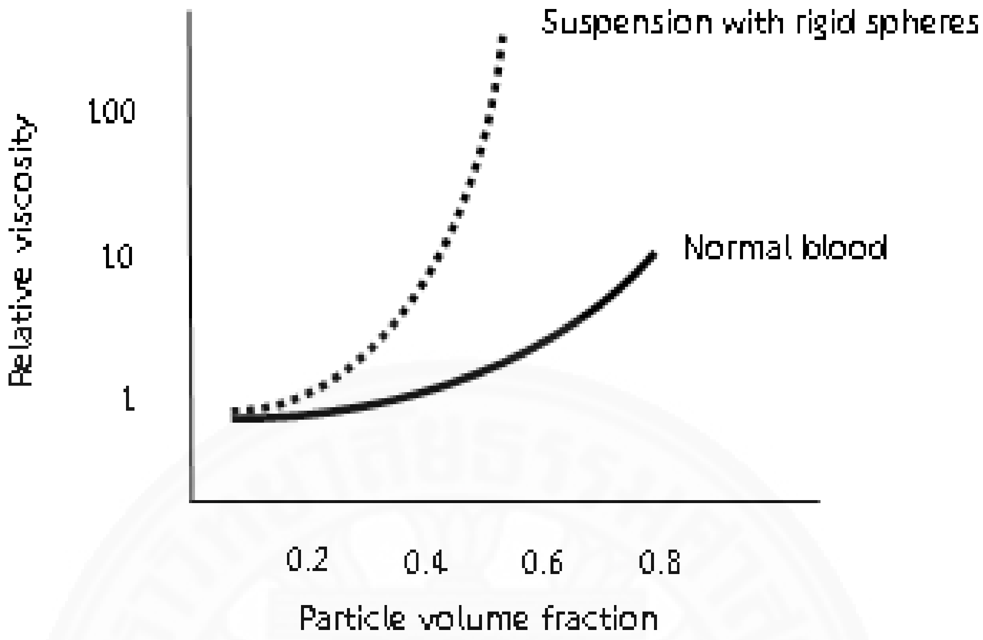
ดังนั้นการทำนายสภาวะของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันว่ามีความเสี่ยงต่อการแตกจึงมีความสำคัญเป็นอย่างมาก เพราะจะเป็นข้อมูลในการตัดสินใจเลือกวิธีรักษาที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด

ผู้ป่วยโรคหลอดเลือดอุดตันที่สมอง เกิดจากการอักเสบของหลอดเลือด เนื่องจากมีไขมันเกาะที่ผนังหลอดเลือด และเมื่อขนาดของการอุดตันมากขึ้น ก็อาจจะทำให้แตกและมีลิ่มเลือดบางส่วนหลุดเข้าไปอุดตันที่เส้นเลือดของสมองส่วนใน ก่อให้เกิดความเสียหายกับสมองได้ ในปัจจุบันได้มีการศึกษา hemorheology อย่างกว้างขวาง เพราะเป็นปัจจัยสำคัญที่ส่งผลต่อหลอดเลือด โดยคุณสมบัติของ hemorheology จะเกิดจากความหนืดของเลือด, hematocrit, ค่าการรวมตัวและการยุบตัวของเม็ดเลือดแดงและปริมาณ fibrinogen ในเลือด โดยค่าเหล่านี้แม้ทราบกันเป็นอย่างดีว่าส่งผลต่อการไหลของเลือด แต่ความหนืดของเลือดที่ส่งผลโดยตรงกลับไม่ได้ตรวจวัดกันมากนักในระดับคลีนิก ทั้งที่เป็นปัจจัยหลักที่ส่งผลต่อความดันที่เพิ่มขึ้น 20% หากเลือดมีความหนืดเพิ่มขึ้น 20% หรือผนังหลอดเลือดต้องขยายตัวเพิ่มขึ้นในแนวรัศมี 4.66% (Yildirim C, inar และคณะ 1999) นอกจากนี้ความเค้นที่ผนังหลอดเลือดเพิ่มขึ้น หากเลือดมีความหนืดเพิ่มขึ้น (Brun JF และคณะ 2000) เหล่านี้เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการแตกของไขมันในหลอดเลือด

2.1.2 ความหนืดของเลือด

เลือดมีความหนืดที่มีพฤติกรรมการไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยน (Merrill, 1969) ซึ่งค่าความหนืดขึ้นอยู่กับค่า shear rate โดยพฤติกรรมการไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนเกิดจากเม็ดเลือดที่อยู่ในน้ำเลือดนั้นเอง สำหรับปัจจัยที่ส่งผลต่อความหนืดของเลือดมีด้วยกัน 5 องค์ประกอบ ดังนี้

(1) น้ำเลือด ความหนืดของน้ำเลือดมีพฤติกรรมการไหลแบบนิวโตเนี่ยน คือ มีความหนืดคงที่ไม่ขึ้นกับค่า shear rate สามารถใช้อุปกรณ์วัดค่าความหนืดทั่วไป ซึ่งได้แก่ rotating viscometer ได้

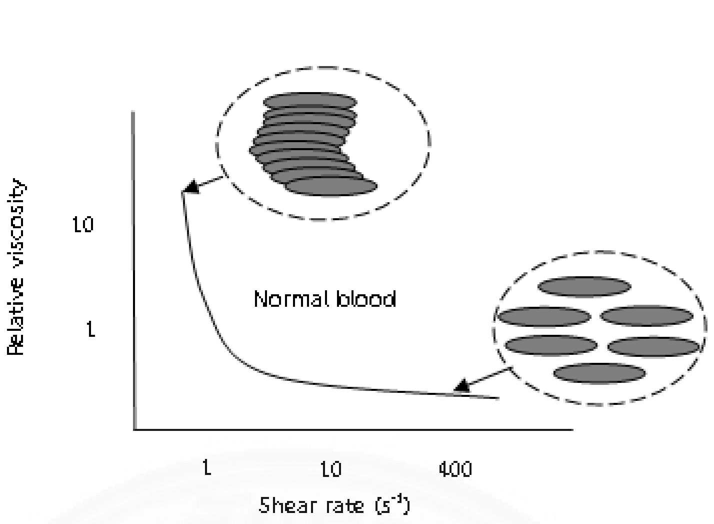


รูปที่ 2.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนืดและปริมาณของ particle

(2) Hematocrit เป็นสัดส่วนของเม็ดเลือดต่อเลือดทั้งหมด โดยพฤติกรรมการไหลของเลือดแบบนอนนิวโตเนี่ยนมาจากค่า hematocrit และมีผลกระทบต่อค่าความหนืดของเลือดมากที่สุด (Dintenfass, 1971; Dinnar, 1981; Chienet al., 1987; Guyton and Hall, 1996)

(3) ค่าความแข็งของเม็ดเลือด มีผลต่อค่าความหนืด เนื่องจากการยุบตัวของเม็ดเลือดจะส่งผลต่อค่าความหนืดดังรูปด้านล่าง

(4) RBC Aggregation หรือการเกาะตัวของเม็ดเลือดมีผลต่อค่าความหนืดในช่วงของ Shear-Thinning ของเลือด โดยหากเม็ดเลือดมีการเกาะตัวกันแน่นจะมีค่าความหนืดสูง แต่หากเม็ดเลือดเกาะตัวกันหลวมๆ จะมีค่าความหนืดต่ำ

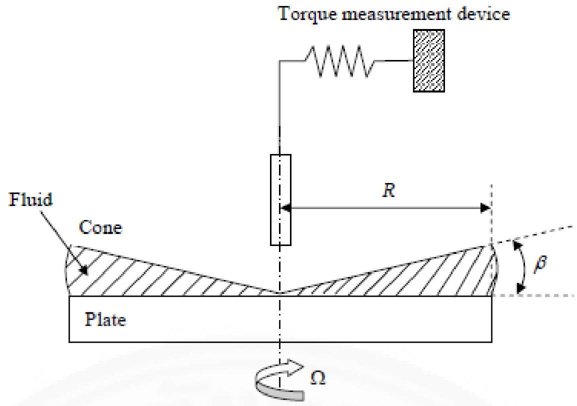


รูปที่ 2.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนืดและการเกาะตัวของเม็ดเลือด

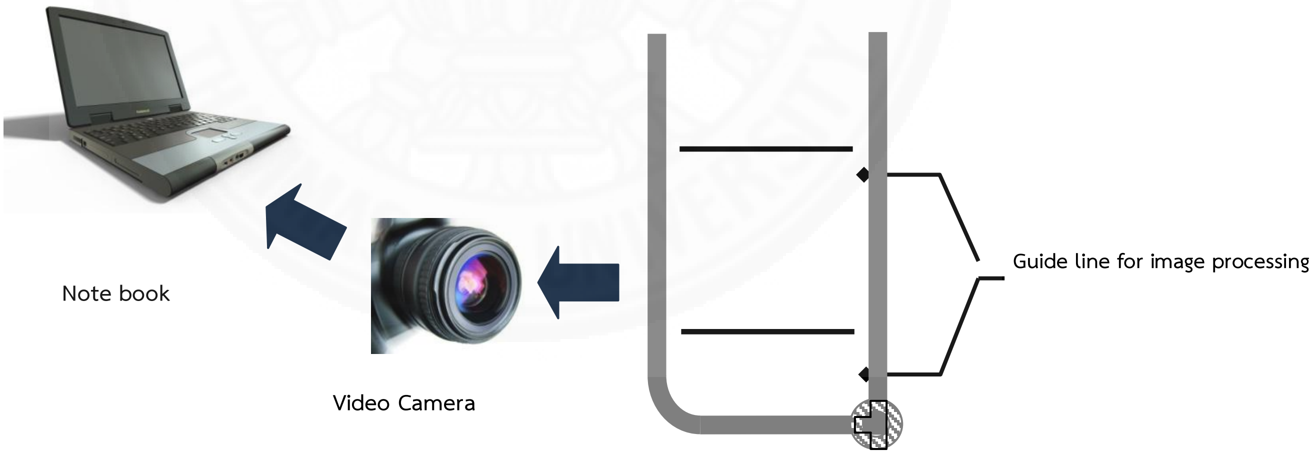
(5) อุณหภูมิ จะมีค่าผกผันกับความหนืด หากอุณหภูมิมีค่าลดลงความหนืดจะมีค่ามากขึ้น แต่หากอุณหภูมิมากขึ้นความหนืดจะมีค่าลดลง โดยค่าความหนืดเพิ่มขึ้น 2% เมื่ออุณหภูมิลดลง 1°C (Barbee, 1973)

การวัดความหนืดโดยทั่วไปใช้ cone and plate viscometer แต่เนื่องด้วยเลือดมีคุณสมบัติเป็น non-Newtonian fluid ซึ่งความหนืดขึ้นอยู่กับค่า shear rate จึงทำให้ในการหาความหนืดจำเป็นต้องทดสอบหลายครั้งเพื่อให้ครอบคลุมค่า shear rate ที่สนใจ แล้วทำการสร้างกราฟ เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนืดและค่า shear rate ซึ่งนอกจากจะใช้เวลาทดสอบหลายครั้งแล้ว ยังใช้ปริมาณเลือดตัวอย่างอีกเป็นจำนวนมาก ซึ่งส่งผลต่อทดสอบค่าความหนืดของเลือดหากนำอุปกรณ์นี้ไปใช้ในคลีนิกจริง

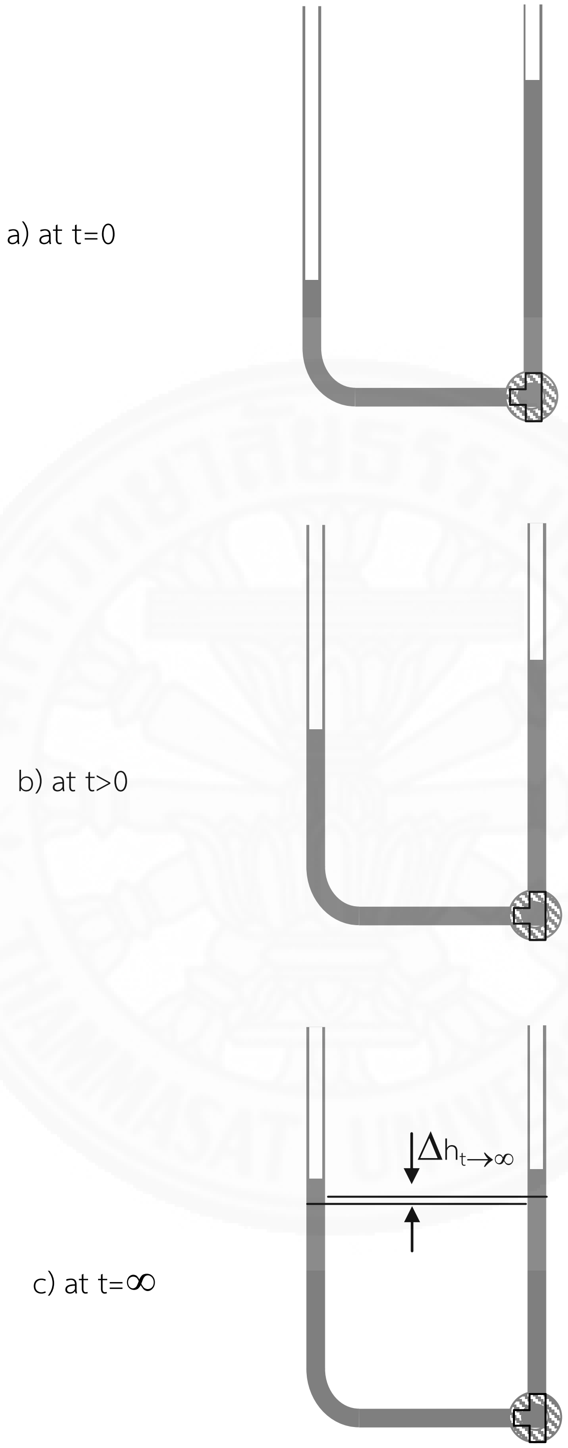
เครื่องทดสอบหาความหนืดที่เรียกว่า scanning capillary-tube rheometer (SCRT) ดังรูปที่ 2.5 เป็นเครื่องทดสอบที่สามารถหาค่าความหนืดได้ตลอดช่วงของ shear rate และใช้ปริมาณเลือดไม่เกิน 10 cc. โดยให้ผลลัพธ์ในทันที ด้วยการคำนวณจากคอมพิเตอร์ ในการทดสอบจะอาศัยความแตกต่างของความดันของ capillary-tube แบบตัว U จากนั้นจึงเปิดวาล์วให้เลือดเคลื่อนที่เข้าสู่จุดสมดุลดังรูปที่ 2.6 ระหว่างนั้นเอง จะมีการบันทึกการเคลื่อนไหว จะเก็บค่าการเคลื่อนที่ของเลือดด้วย image processing technique แล้วนำค่าที่ได้ (รูปที่ 2.7) ไปคำนวณหาค่าความหนืดแล้วได้ค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าความหนืดและค่า shear rate ดังรูปที่ 2.8



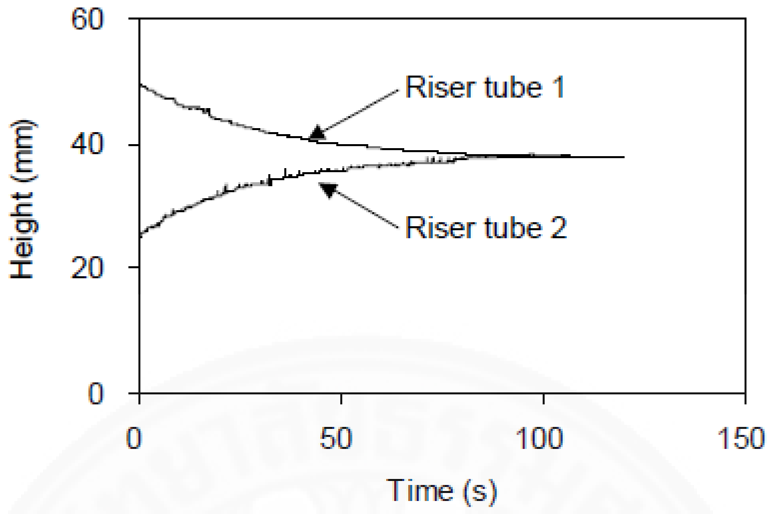
รูปที่ 2.4 หลักการทำงานของ cone-and-plate viscometer



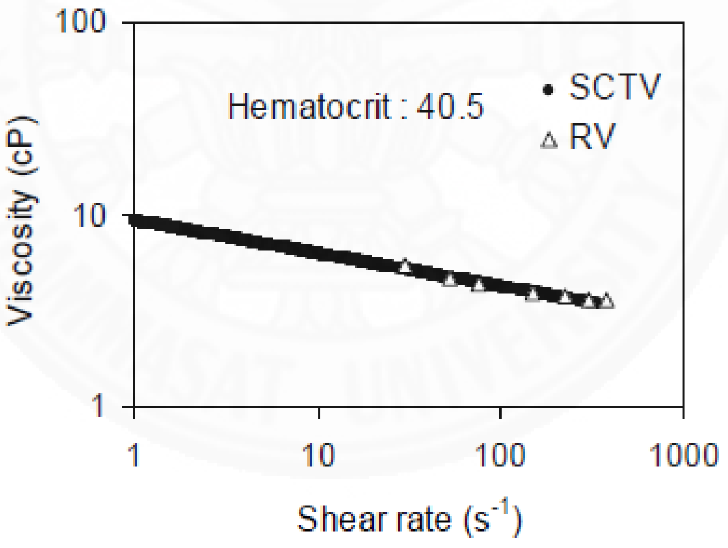
รูปที่ 2.5 scanning capillary-tube rheometer using image processing technique



รูปที่ 2.6 ระดับของไหลในท่อรูปตัว U ที่ช่วงเวลาต่างๆ



รูปที่ 2.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดและ shear rate ที่ได้จากการวัดด้วย SCTR



รูปที่ 2.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดและ shear rate ที่ได้จากการวัดด้วย SCTR

2.2 การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่ศึกษาทางด้านการวิเคราะห์การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันในช่วงเริ่มต้นเป็นการศึกษาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่ไม่มีการยุบตัว เพื่อหาค่า Wall shear stress มาทำนายการแตกของ Plaque ด้วยการสร้างรูปร่างของหลอดเลือดจากข้อมูลจาก MRI และ

พิจารณาเลือดมีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-newtonian (Yotsakorn, 2011) หลังจากนั้นจะมีการวิเคราะห์ โดยพิจารณาการยุบตัวของผนังหลอดเลือด เพื่อเพิ่มความถูกต้องและเสมือนจริงมากขึ้น หรือที่เรียกว่าการวิเคราะห์แบบ FSI (fluid-solid interaction) ซึ่งค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือดถูกนำมาพิจารณา โอกาสการแตกของ Plaque โดยในการวิเคราะห์จะพิจารณาผนังที่มีพฤติกรรมแบบ Linear elastic และ Hyper elastic (Yotsakorn, 2013) จากการสืบค้นพบว่ามีการนำเทคนิคการคำนวณหลายรูปแบบมาใช้แก้ปัญหาดังกล่าว เพื่อเพิ่มความสามารถในการทำนายโอกาสการแตกของ Plaque ที่มีความแม่นยำและสามารถนำไปใช้ในการรักษาผู้ป่วยได้ โดยยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

2.2.1 Unsteady, three-dimensional fluid mechanic analysis of blood flow in plaque-narrowed and plaque-freed arteries

J.P. Abraham , E.M. Sparrow and R.D. Lovik

2.2.1.1 ปัญหาการวิจัย

(1) อัตราการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันจะมีค่ามากกว่าหลอดเลือดที่ไขมันอุดตัน

(2) การจำลองการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดในสามมิติสามารถคำนวณหาค่าอัตราการไหลของเลือดได้

2.2.1.2 สมมุติฐานการวิจัย

การวิเคราะห์การไหลเพื่อจำลองพฤติกรรมการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน ทำให้ไม่ทราบถึงประสิทธิภาพการรักษาด้วยวิธีการลอกไขมันออกจากหลอดเลือดได้

2.2.1.3 ขอบเขตการวิจัย

การวิเคราะห์ปัญหาการไหลของเลือดที่ขึ้นกับเวลา โดยเป็นการไหลแบบราบเรียบ ไม่มีการอัดตัว และสมมุติให้เลือดมีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-Newtonian และผนังของหลอดเลือดมีความแข็งเกร็ง เป็นการวิเคราะห์เปรียบเทียบกันระหว่างหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน

2.2.1.4 เครื่องมือและทฤษฎี

โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาคือ CFX 11.0 โดยรูปร่างในสามมิติถูกสร้างจากภาพในสองมิติที่ได้จากการ Intravenous ultrasound แล้วใช้โปรแกรม Amira 4.1 และ MAYA

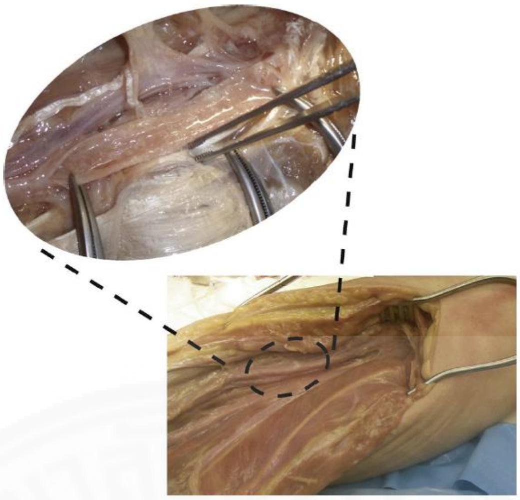
7.0 ในการสร้างรูปร่างในสามมิติ โดยสมการนาเวียร์สโตกค์และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมนำมาใช้ในการคำนวณของไหล

2.2.1.5 บทนำ

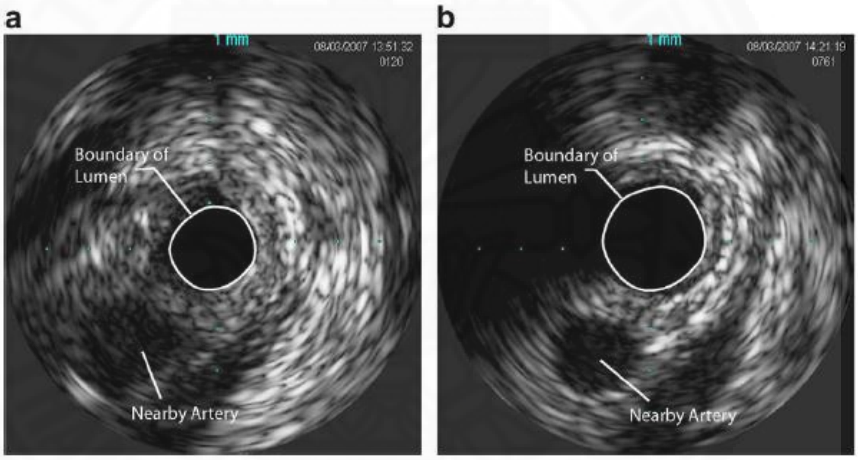
งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาผลลัพธ์ของการสลายไขมันที่อุดตัดในเส้นเลือดแดง (Plaque) ขนาดเล็ก ด้วยวิธีการจำลองการไหลของเลือดภายในหลอดเลือดแดงบริเวณขาช่วงล่าง (Tibia artery) โดยในการวิเคราะห์เริ่มต้นจากการสร้างแบบจำลองรูปร่าง (CAD) ด้วยโปรแกรม Amira 4.0 และ Maya 7.0 จากการนำภาพตัดขวางของหลอดเลือด ซึ่งได้จากวิธีการ Ultrasound มาสร้างเป็นวัตถุในสามมิติ ทั้งในส่วนของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน (Pre-Debulking) และหลอดเลือดหลังการสลายไขมันที่อุดตันแล้ว (Debulking) สำหรับการวิเคราะห์กำหนดให้เลือดมีลักษณะการไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow) และเป็นการไหลแบบไม่คงตัว (Unsteady flow) ตามการเต้นของหัวใจ โดยให้เลือดมีพฤติกรรมทั้ง Newtonian fluid และ Non-newtonian fluid (Ostwald–de Waele model) สำหรับผลการวิเคราะห์พบว่า หลังจากสลายไขมันที่อุดตันในเส้นเลือดแล้ว อัตราการไหล (Flow rate) ของเลือดเพิ่มขึ้นกว่า 2.5 เท่า แสดงว่าเลือดสามารถไหลไปเลี้ยงเซลล์ที่ขาด้านล่างเพิ่มขึ้นด้วย นอกจากนี้ความเค้นเฉือนเฉลี่ย (Shear stress average) ของหลอดเลือดที่สลายไขมันที่อุดตันแล้ว มีค่าสูงกว่าและมีการกระจายตัวของค่าความเค้นเฉือนที่สม่ำเสมอกว่า หลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน จึงทำให้หลอดเลือดซึ่งสลายไขมันออกแล้ว มีโอกาสที่ไขมันจะอุดตันที่หลอดเลือดลดลง

2.2.1.6 การวิเคราะห์ปัญหา

ในการวิเคราะห์มีการสร้างรูปร่างของหลอดเลือดจากผู้เสียชีวิตที่มีการอุดตันไขมันของหลอดเลือด posterior tibial artery โดยใช้ Intravenous ultrasound ซึ่งเป็น probe ที่สอดไปตามเส้นเลือด โดยทำการเก็บหน้าตัดของหลอดเลือดทุกระยะ 0.1 mm. โดยเก็บภาพหลอดเลือดที่มีการอุดตันของไขมันก่อนแล้วจึงนำไขมันที่อุดตันออกจากนั้นจึงเก็บภาพอีกครั้งดังรูปที่ 2.10 การสร้างรูปร่างในสามมิติทำโดยนำภาพที่ได้เข้าสู่โปรแกรม Amira 4.1 และ MAYA 7.0 เพื่อสร้าง CAD ของหลอดเลือดทั้งสองรูปแบบ



รูปที่ 2.9 แสดงเส้นเลือด posterior tibial artery



รูปที่ 2.10 ภาพตัดขวางของหลอดเลือดจาก Intravenous ultrasound

รูปที่ 2.11 แสดง CAD ของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันและหลอดเลือด
ที่มีการนำไขมันที่อุดตันออกแล้ว

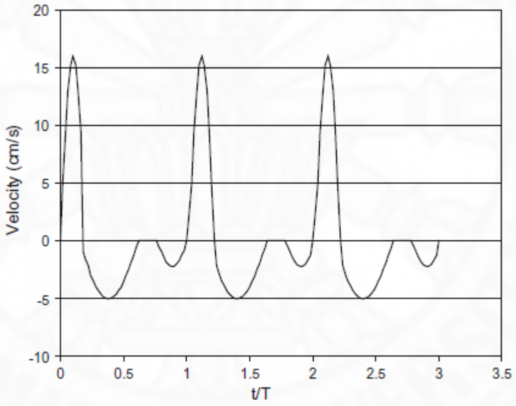
พฤติกรรมของเลือดที่ใช้ในการวิเคราะห์ถูกสมมุติให้เป็นของไหลแบบ Newtonian และ Non-Newtonian ซึ่งค่าความหนืดในกรณีที่เป็น Newtonian มีค่าเท่ากับ 0.00345 kg/m.s ในขณะที่ของไหลแบบ Non-Newtonian เลือกใช้ Ostwald-de Waele ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนกับค่า strain rate ดังสมการด้านล่าง

$$\tau = K\gamma^n \tag{1}$$

โดย K = 0.0147 (kg/ms$^{1.22}$)

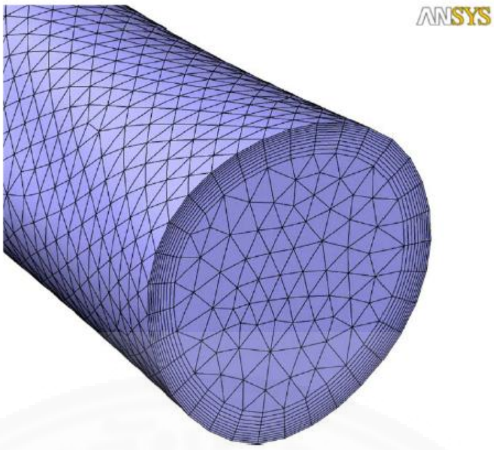
n = 0.78

รูปแบบการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงตามการบีบตัวของหัวใจซึ่งเป็นไปตามงานวิจัยของ Fronek et. al. ซึ่งเป็นข้อมูลเฉลี่ยจากตัวอย่างจำนวน 78 ตัวอย่าง ในอายุระหว่าง 19-32 ปี ดังแสดงในรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 รูปแบบการไหลของเลือดที่ไหลผ่าน posterior tibial artery

โปรแกรม CFX 11 ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่ขึ้นกับเวลา ซึ่งการกำหนดรูปแบบการไหลที่ทางเข้ามีลักษณะ Fully developed flow ในขณะที่ทางออกกำหนดเป็น Opening ซึ่งสามารถปรับเปลี่ยนเป็น inflow หรือ outflow ได้ โดยในการสร้าง Mesh มีการกำหนด Inflation บริเวณใกล้ผนังหลอดเลือด เพื่อคำนวณผลของ boundary layer ดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แสดง mesh ของหลอดเลือดที่มีการสร้าง Inflation ที่บริเวณใกล้ผนังหลอดเลือด

2.2.1.7 ผลการวิเคราะห์

ผลการวิเคราะห์ในส่วนที่หนึ่ง เป็นผลการวิเคราะห์อัตราการไหลที่เกิดขึ้น ซึ่งพบว่าอัตราการไหลของเลือดภายในเส้นเลือดที่มีการนำไขมันออกไปแล้วมีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า เมื่อเปรียบเทียบกับหลอดเลือดที่มีการอุดตันของไขมันดังตารางที่ 2.1

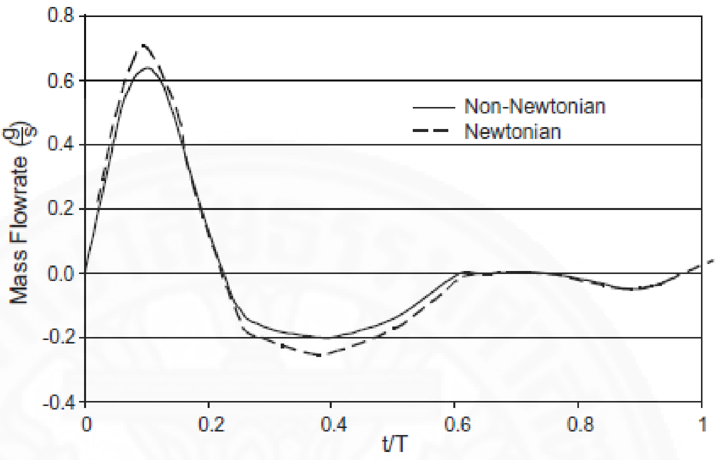
ตารางที่ 2.1 อัตราการไหลของเลือดที่ไหลผ่านหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันกับหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน

	Pre-debulked	Debulked	Ratio: Post/Pre
Systole flow (grams/cycle)	0.0353	0.0859	2.43
Diastole flow (grams/cycle)	0.0186	0.0521	2.80
Net flow (grams/cycle)	0.0166	0.0338	2.04

จากรูปที่ 2.14 แสดงอัตราการไหลและความดันลดของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน ณ เวลาต่างๆกัน ซึ่งพบว่าอัตราการไหลของหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันมีการตอบสนองต่อแรงดันตกคร่อมช้ากว่าหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน เนื่องจากการอัตราการไหลของหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันมีปริมาณที่สูงกว่า ดังนั้น เมื่อมีการเปลี่ยนทิศทางการไหลจึงทำให้เกิดการตอบสนองช้ากว่านั้นเอง

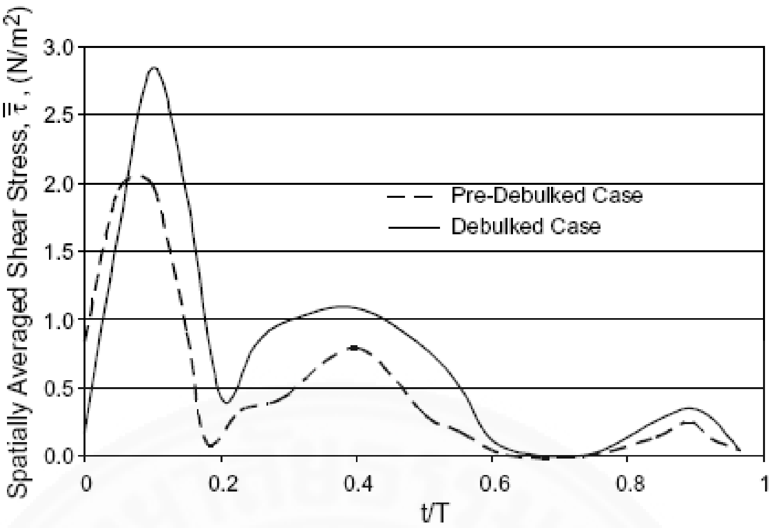
ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกันระหว่างเลือดที่มีพฤติกรรมแบบ Newtonian กับ Non-Newtonian ในหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน พบว่าอัตราการไหลมีค่าใกล้เคียงกันยกเว้นใน

ช่วงเวลาที่มีการเปลี่ยนความเร็วการไหลในช่วงสูงสุดและต่ำสุด ซึ่งทำให้เลือดที่มีพฤติกรรมแบบ Non-Newtonian ซึ่งมีค่าความหนืดเปลี่ยนแปลงตามค่าความเค้นเฉือน มีอัตราการไหลลดลงในช่วงเวลาดังกล่าว ดังรูปที่ 2.15



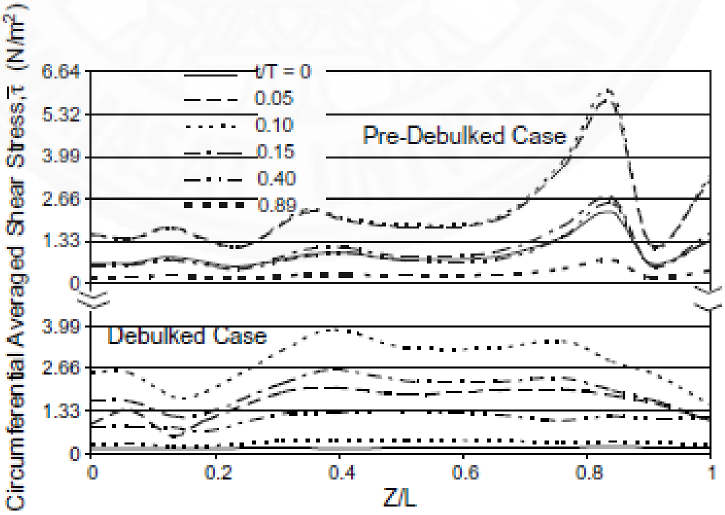
รูปที่ 2.15 แสดงอัตราการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน เปรียบเทียบกันระหว่างเลือดที่มีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-Newtonian

จากรูปที่ 2.16 แสดงค่าความเค้นเฉือนรวม (ตามยาวและแนวเส้นรอบวง) เฉลี่ยของหลอดเลือดในช่วงเวลาต่างๆ กันของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน พบว่าค่าความเค้นของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันมีค่าน้อยกว่าในหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน เนื่องจากเป็นการรวมกันของค่าความเค้นเฉือนตามยาวและตามแนวเส้นรอบวง ซึ่งในกรณีที่เป็นการของเลือดภายในหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันแม่ว่าความเค้นเฉือนตามแนวเส้นรอบวงจะมีค่าไม่สูงมาก ทั้งนี้เนื่องจากไม่มีการเปลี่ยนแปลงของหน้าตัดหลอดเลือด แต่เนื่องด้วยอัตราการไหลที่เพิ่มมากขึ้นจึงทำให้ความเค้นเฉือนตามแนวยาวมีค่ามากขึ้นตลอดทั้งหลอดเลือด จึงทำให้ค่าความเค้นเฉือนเฉลี่ยของหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันมีค่ามากกว่าหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน



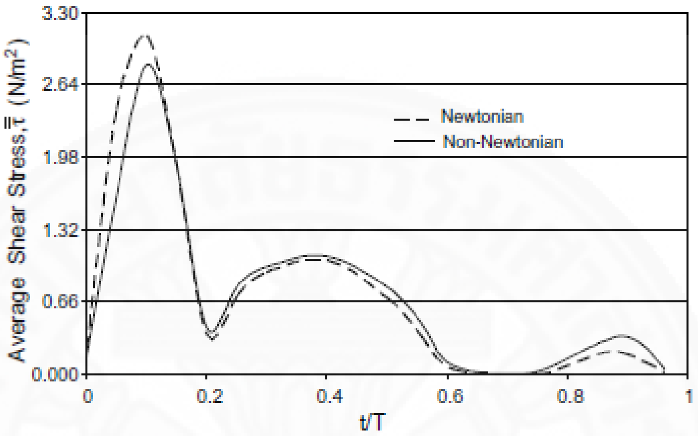
รูปที่ 2.16 แสดงค่าความเค้นเฉือนรวม (ตามยาวและแนวเส้นรอบวง) เฉลี่ยของหลอดเลือดในช่วงเวลาต่างๆ กันของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน

โดยเมื่อเปรียบเทียบค่าความเค้นเฉือนเฉลี่ยตามแนวเส้นรอบวงในแต่ละช่วงเวลา ณ ตำแหน่งต่างๆ ของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตันพบว่า ในกรณีที่มีไขมันอุดตันพบว่าค่าความเค้นเฉือนตามแนวเส้นรอบวงในทุกช่วงเวลามีค่ามากกว่าหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน ทั้งนี้เนื่องจากหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันมีการเปลี่ยนแปลงหน้าตัดทำให้ค่าความเค้นเฉือนตามแนวเส้นรอบวงในแต่ละช่วงเวลามีค่ามากขึ้นไปด้วย ดังแสดงในรูปที่ 2.17

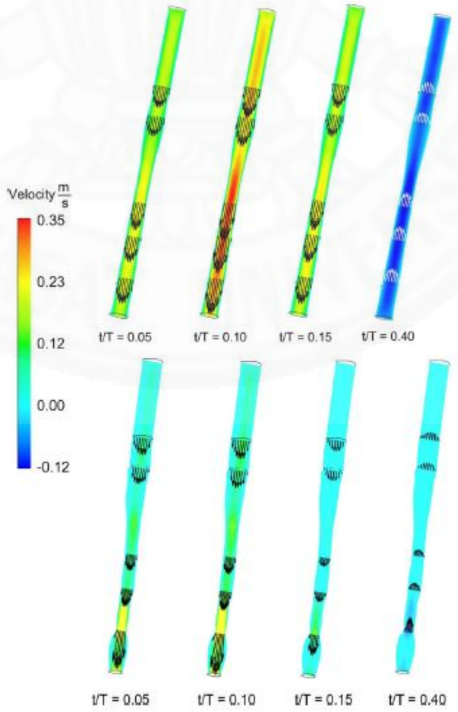


รูปที่ 2.17 แสดงค่าความเค้นเฉือนเฉลี่ยตามแนวเส้นรอบวงในแต่ละช่วงเวลา ณ ตำแหน่งต่างๆ ของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน

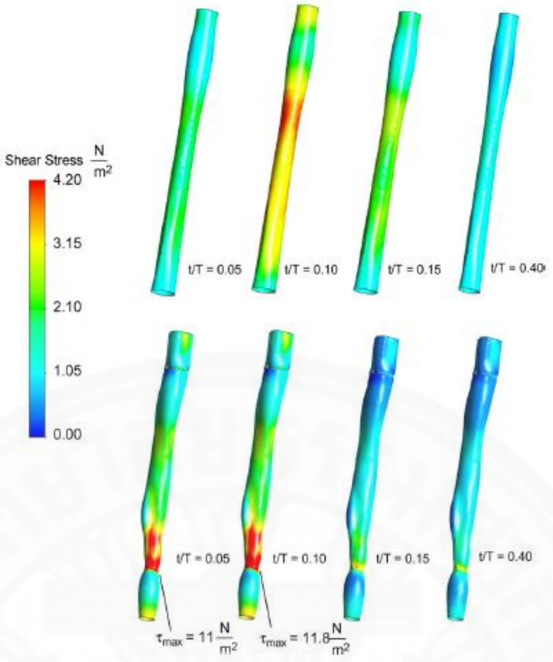
ในการเปรียบเทียบค่าความเค้นเฉือนรวมเฉลี่ยของเลือดที่มีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-Newtonian ผ่านหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน พบว่าของไหลแบบ Newtonian มีค่าความเค้นเฉือนรวมเฉลี่ยสูงกว่าของไหลที่มีพฤติกรรมแบบ Non-Newtonian ในช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็ว เนื่องจากค่าความเค้นเฉือนของเลือดมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งทำให้ความหนืดมีค่าลดลง จึงทำให้ความเค้นเฉือนรวมเฉลี่ยในช่วงเวลาดังกล่าวมีค่าลดลง ดังแสดงในรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นเฉือนรวมเฉลี่ยของเลือดที่มีพฤติกรรมแบบ Newtonian และ Non-Newtonian ผ่านหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน



รูปที่ 2.19 แสดงความเร็วการไหลของเลือดในรูปแบบของเวกเตอร์และคอนทัวร์ ของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน ณ ช่วงเวลาต่างๆ



รูปที่ 2.20 แสดงค่าความเค้นเฉือนบนผนังหลอดเลือด ของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน ณ ช่วงเวลาต่างๆ

รูปที่ 2.19 แสดงความเร็วการไหลของเลือดในรูปแบบของเวกเตอร์และคอนทัวร์ของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน ณ ช่วงเวลาต่างๆ ซึ่งพบว่าความเร็วการไหลมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตาม ความเร็วการไหลที่ทางเข้าของหลอดเลือดแต่หากเปรียบเทียบระหว่างหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน พบว่าหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันมีค่าความเร็วการไหลมากกว่า ทั้งนี้เนื่องจากไม่มีไขมันขวางทางไหลของเลือดนั้นเอง โดยรูปที่ 2.20 แสดงแสดงค่าความเค้นเฉือนบนผนังหลอดเลือดของหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน ณ ช่วงเวลาต่าง ๆ พบว่าความเค้นเฉือนบนผนังหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันมีค่ามากกว่าหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตัน

2.2.1.8 สรุปงานวิจัย

(1) งานวิจัยนี้คือนำการวิเคราะห์การไหลมาจำลองการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่มีและไม่มีไขมันอุดตัน

(2) การสร้างแบบจำลองรูปร่างของหลอดเลือดจากผู้เสียชิวิตที่แช่แข็งและมีภาวะไขมันอุดตันที่หลอดเลือดแดงบริเวณขาด้านล่าง แล้วจึงสลายไขมันที่อุดตันออกเพื่อสร้างแบบจำลองรูปร่างของหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันแล้ว

(3) ผลการวิเคราะห์พบว่าหากมีการนำไขมันที่อุดตันอยู่ออกแล้วอัตราการไหลของเลือดจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากเดิมที่มีไขมันอุดตันอยู่ 2.5 เท่า โดยหากเป็นผู้ป่วยที่มีชีวิตอยู่แล้วมีไขมันอุดตันที่เส้นเลือด posterior tibial artery ซึ่งมักมีอาการปลายเท้าอ่อนแรง เนื่องจากเลือดไปเลี้ยงไม่พอ ได้รับการรักษาโดยนำไขมันที่อุดตันออกก็สามารถบรรเทาอาการดังกล่าวได้

2.2.1.9 วิจารณ์งานวิจัย

งานวิจัยนี้คือการจำลองการไหลเปรียบเทียบกันระหว่างหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันกับหลอดเลือดที่มีการสลายไขมันที่อุดตันแล้ว รวมทั้งการสร้างแบบจำลองรูปร่างของหลอดเลือดจากผู้เสียชิวิตที่แช่แข็งและมีภาวะไขมันอุดตันที่หลอดเลือดแดงบริเวณขาด้านล่าง แล้วจึงสลายไขมันที่อุดตันออกเพื่อสร้างแบบจำลองรูปร่างของหลอดเลือดที่ไม่มีไขมันอุดตันแล้ว ทำให้สามารถสรุปประเด็นเปรียบเทียบกันระหว่างหลอดเลือดทั้งสองชัดเจนสอดคล้องกับข้อเท็จจริง

แต่หากมีผลการทดลองเปรียบเทียบ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องจะเพิ่มความน่าเชื่อถือมากขึ้น นอกจากนี้การสร้างแบบจำลองจากผู้ป่วยที่มีชีวิตก็จะสามารถช่วยให้ได้ข้อมูลสอดคล้องกับความจริงมากขึ้น และพฤติกรรมของไหลแบบ Non-Newtonian มีผลการทดลองของ F.J.H. Gijsen and etc. ในการจำลองด้วย Carreau-Yasuda model ซึ่งให้ผลที่สอดคล้องกับพฤติกรรมของเลือดเป็นอย่างดี นอกจากนี้การไหลของเลือดที่มี plaque ขวางทางอยู่ ด้วยการจำลองลักษณะการไหลแบบ Laminar อาจไม่สอดคล้องกับพฤติกรรมจริง ที่มีลักษณะการไหลแบบ Turbulence

2.2.2 How critical is fibrous cap thickness to carotid plaque stability? A flow-plaque interaction model

Zhi-Yong Li, Simon P.S. Howarth, Tjun Tang and Jonathan H. Gillard

2.2.2.1 ปัญหาการวิจัย

(1) ความหนาของ Fibrous cap มีผลต่อการแตกของ Plaque

(2) เปอร์เซ็นต์การอุดตันของไขมันในหลอดเลือดมีผลต่อการแตกของ Plaque

2.2.2.2 สมมุติฐานการวิจัย

ความหนาของ Fibrous cap และเปอร์เซ็นต์การอุดตันของไขมันในหลอดเลือดไม่มีผลต่อความเสี่ยงในการแตกของ Plaque

2.2.2.3 ขอบเขตการวิจัย

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกันในสองมิติ โดยเป็นการไหลแบบราบเรียบ ไม่มีการอัดตัว และสมมุติให้เลือดมีพฤติกรรมแบบ Newtonian และองค์ประกอบของ Plaque กำหนดให้มีพฤติกรรมแบบ Hyper elastic แบบ 2-term Ogden และผนังของหลอดเลือดมีความแข็งเกร็ง นอกจากนี้รูปร่างของ Plaque ไม่ได้นำข้อมูลมาจากผู้ป่วยจริง

2.2.2.4 เครื่องมือและทฤษฏี

โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาคือ FEMLAB 3.1 และ COMSOL สำหรับโปรแกรมที่ใช้ในทางสถิติคือ SPSS v12.0 โดยในการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งใช้สมการนาเวียร์สโตกค์ในรูปแบบ ALE (Arbitrary Lagrangian-Eluerian)

2.2.2.5 บทนำ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาปัจจัยเสี่ยงที่มีผลต่อการแตกของ Plaque ซึ่งได้แก่เปอร์เซ็นต์การอุดตันและความหนาของ fibrous cap โดยการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างการไหลและความเค้นที่เกิดขึ้นบนหลอดเลือดที่มีการอุดตัน เพื่อหาความสัมพันธ์ของเปอร์เซ็นต์การอุดตันและความหนาของ fibrous cap ที่มีผลต่อการแตกของ plaque

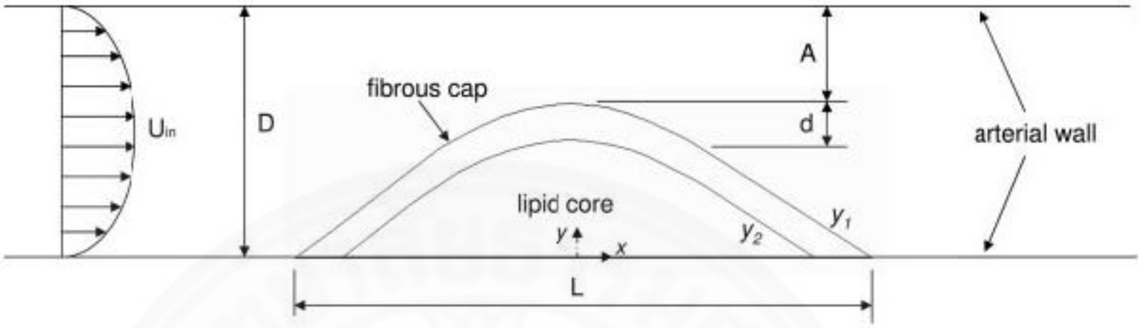
โดย Loree HM. and etc. และ Li ZY and etc. พบว่าความเค้นที่เกิดขึ้นจากแรงดันภายในหลอดเลือดและความหนาของ fibrous cap มีผลต่อการแตกของ plaque ซึ่ง plaque โดยส่วนใหญ่ที่มีความเสี่ยงต่อการแตก จะประกอบไปด้วย fibrous cap ที่บางห่อหุ้มไขมันเอาไว้ และ Trivedi RA and etc. ได้อธิบายว่า fibrous cap ที่มีความหนาน้อย ห่อหุ้มไขมันขนาดใหญ่จะทำให้ความเค้นที่เกิดขึ้นบน plaque มีค่าสูงไปด้วย

ในการวิเคราะห์ปัญหากำหนดให้เลือดมีการไหลแบบ Pulsation ซึ่งเป็นการไหลที่เปลี่ยนแปลงตามการสูบฉีดของหัวใจผ่านหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน เพื่อหาค่าความเค้นจากการปรับเปลี่ยนเปอร์เซ็นต์การอุดตันและความหนาของ Fibrous cap ที่มีผลต่อการแตกของ Plaque โดยมีขอบเขตการศึกษาเฉพาะรูปร่างของ Plaque เชิงทฤษฏี เพื่ออธิบายกลไกการแตกของ Plaque จากการเปลี่ยนแปลงเปอร์เซ็นต์การอุดตันและความหนาของ Fibrous cap

2.2.2.6 การวิเคราะห์ปัญหา

รูปร่างของหลอดเลือดแสดงดังรูปที่ 2.21 โดยรูปร่างของ Plaque โดยรูปร่างของ Plaque สามารถคำนวณได้จากสมการ (2)

$$y_1 = \frac{D-A}{2} \cdot (1 + cos\ x)\ and\ y_2 = \frac{D-A}{2} \cdot (1 + \cos x) - d \qquad (2)$$



รูปที่ 2.21 แสดงรูปร่างและขนาดของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันใน 2 มิติ

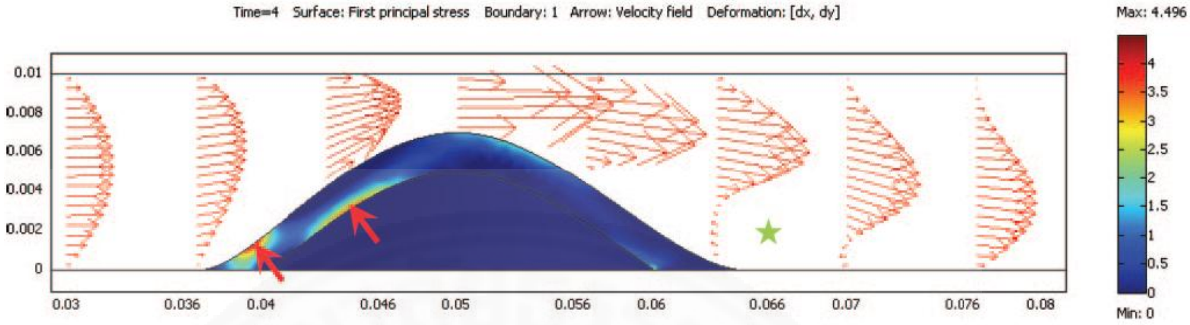
ในการวิเคราะห์ปัญหาเป็นการไหลแบบราบเรียบ ไม่มีการอัดตัว และสมมุติให้ของไหลมีพฤติกรรมแบบ Newtonian ที่มีค่าความหนืดเท่ากับ $3.4x10^{-3}$ Ns/m^2 จากงานวิจัยของ Marshall I. โดยการไหลเข้าของของไหลมีลักษณะเป็นแบบ Fully develop flow ที่มีความเร็วเปลี่ยนไปตามเวลา และกำหนดให้ทางออกมีค่าความดันสัมพัทธ์เท่ากับ 0 สำหรับส่วนประกอบของ Plaque ซึ่งกำหนดให้มีพฤติกรรมแบบ Hyper elastic แบบ 2-term Ogden โดยคุณสมบัติของ Plaque นำเอาความสัมพันธ์ระหว่าง Stress-strain จากงานวิจัยของ Ogden RW. and etc. และ Bank AJ. and etc.

โปรแกรม FEMLAB 3.1 และ COMSOL นำมาใช้ในการคำนวณปัญหา โดยปรับเปลี่ยนเปอร์เซ็นต์การอุดตันตั้งแต่ 10%-95% และกำหนดความหนาของ Fibrous cap ตั้งแต่ 0.1-2 mm. จากงานวิจัยของ Cheng GC. And etc. และ Huang H. and etc. พบว่าค่าความเค้นของ Fibrous cap ไม่ควรเกิน 300 MPa ซึ่งค่าความเค้นดังกล่าวถูกนำมาเป็นค่าสำหรับพิจารณาว่า Plaque เกิดการแตกหรือไม่ กลุ่มตัวอย่างถูกแบ่งเป็น 3 กลุ่มตามเปอร์เซ็นต์การอุดตัน คือ 10-30% 30-70% และ 70-95% โดยในแต่ละกลุ่มจะมีการวิเคราะห์จำนวน 30 กรณี

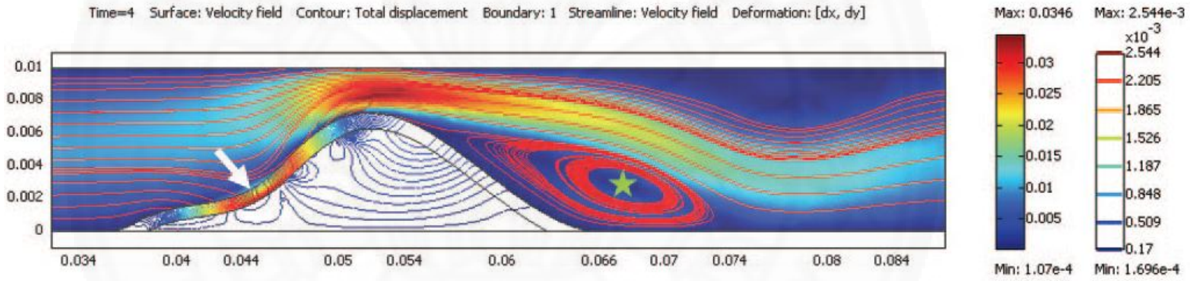
2.2.2.7 ผลการวิเคราะห์

รูปที่ 2.22ก แสดงการไหลของเลือดเป็นแบบเวกเตอร์ภายในหลอดเลือดและการกระจายตัวของความเค้นบน fibrous cap และไขมัน โดยหลอดเลือดมีการอุดตัน 70% และ Fibrous cap มีความหนา 1 mm. ในขณะที่รูป 2.22ข แสดงเส้นสตรีมไลด์และการกระจายตัวของ

ความเครียดบน fibrous cap และไขมัน โดยหลอดเลือดมีการอุดตัน 80% และ Fibrous cap มีความหนา 0.5 mm.



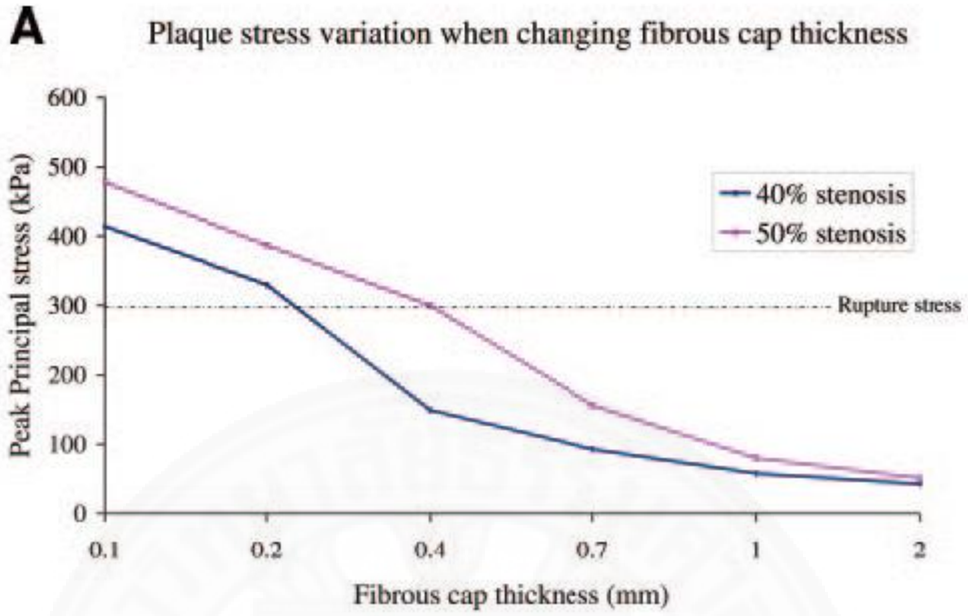
รูป 2.22ก แสดงการไหลเป็นเวกเตอร์และค่าการกระจายของความเค้นของเส้นเลือด ที่มีการอุดตัน 70% และ Fibrous cap มีความหนา 1 mm.



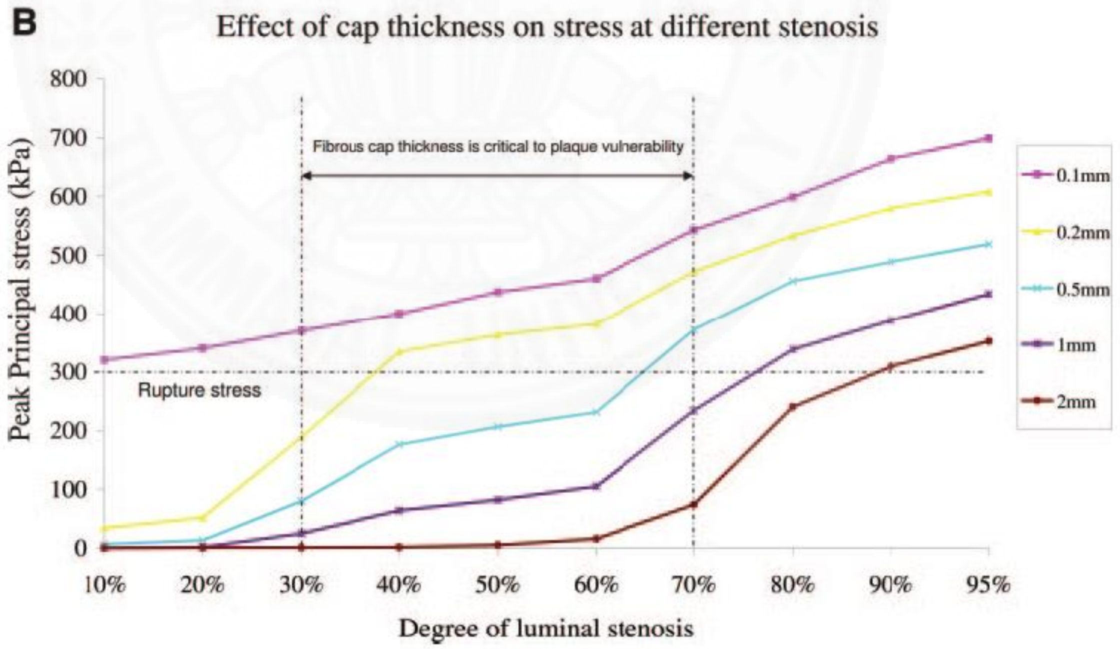
รูป 2.22ข แสดงการไหลเป็นสตรีมไลด์และค่าการกระจายของความเค้นของเส้นเลือด ที่มีการอุดตัน 80% และ Fibrous cap มีความหนา 0.5 mm.

จากการปรับเปลี่ยนความหนาของ Fibrous cap ตั้งแต่ 0.1-2 mm. ที่เปอร์เซ็นต์การอุดตันเท่ากับ 40% และ 50% พบว่าเมื่อความหนาของ Fibrous cap ลดลงเหลือเพียง 0.2 ในกรณีมีการอุดตัน 50% และความหนา 0.4 ในกรณีมีการอุดตัน 40% พบว่าความเค้นที่เกิดขึ้นมีค่าสูงกว่า 300 MPa ดังรูปที่ 2.23ก นั้นแสดงว่าความหนาของ Fibrous cap มีผลต่อการแตกของ Plaque แม้มีการอุดตันที่น้อยก็ตาม

ในขณะที่การปรับเปลี่ยนเปอร์เซ็นต์การอุดตันของหลอดเลือดที่ ความหนาต่างๆ ของ Fibrous cap ดังรูปที่ 2.23ข พบว่า หากมีการเพิ่มเปอร์เซ็นต์การอุดตันจะยิ่งทำให้ Plaque มีโอกาสสูงที่จะแตกเนื่องจากค่าความเค้นที่เกิดขึ้นมีค่าเพิ่มขึ้นจนกระทั่งมากกว่า 300 MPa นอกจากนี้ยังพบว่าในช่วงเปอร์เซ็นต์การอุดตันในช่วง 30%-70% ค่าความหนาของ Fibrous cap มีผลต่อการแตกของ Plaque มากเพราะมีการเพิ่มขึ้นของความเค้นอย่างมีนัยสำคัญ



รูปที่ 2.23ก แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาของ Fibrous cap กับเปอร์เซ็นต์การอุดตันของหลอดเลือด 40% และ 50% ที่มีผลต่อค่าความเค้น



รูปที่ 2.23ข แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์การอุดตันของหลอดเลือดกับความหนาของ Fibrous cap ที่มีผลต่อค่าความเค้น

2.2.2.8 สรุปงานวิจัย

(1) งานวิจัยนี้ได้นำการการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกันมาวิเคราะห์ปัญหาการไหลของเลือดผ่าหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน แต่พิจารณาผนังหลอดเลือดไม่มีความยืดหยุ่น

(2) มีการสร้างแบบจำลองของปัญหาในสองมิติ และปรับเปลี่ยนเปอร์เซ็นต์การอุดตันและความหนาของ Fibrous cap โดยกำหนดให้ค่าความเค้นที่ Fibrous cap จะฉีกขาดมีค่าเท่ากับ 300 kPa

(3) ผลการวิเคราะห์ทำให้ทราบถึงความหนาของ Fibrous cap และเปอร์เซ็นต์การอุดตันที่มีอาจทำให้ Plaque เปราะบางและแตกได้ ซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นข้อมูลในการวินิฉัยและรักษาผู้ป่วยได้

2.2.2.9 วิจารณ์งานวิจัย

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างเปอร์เซ็นต์การอุดตันของเส้นเลือดและความหนาของ Fibrous cap ที่มีผลต่อการแตกของ Plaque โดยนำข้อมูลจากงานวิจัยอื่นที่มีอยู่แล้วมาใช้ในการวิเคราะห์ ซึ่งพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจระหว่างเปอร์เซ็นต์การอุดตันของเส้นเลือดและความหนาของ Fibrous capในช่วงหนึ่งที่มีการเพิ่มของความเค้นอย่างมีนัยสำคัญทำให้งานวิจัยมีความโดดเด่น นอกจากนี้ยังใช้การวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหลและของแข็ง ซึ่งมีความสอดคล้องกับปัญหาจริง

แต่ในงานวิจัยได้วิเคราะห์ปัญหาเป็น 2 มิติ และใช้รูปร่างที่ไม่สอดคล้องกับปัญหาจริง ซึ่งในปัจจุบันสามารถนำภาพจากเครื่อง MRI มาสร้างรูปร่าง 3 มิติ แล้วนำไปวิเคราะห์ปัญหาให้สอดคล้องกับพฤติกรรมจริงมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้ยังพิจารณาผนังหลอดเลือดเป็นผนังแข็งเกร็ง โดยในความจริงผนังหลอดเลือดสามารถหดขยายตามแรงดันของเลือด ซึ่งส่งผลต่อค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบน Fibrous cap มีค่าแตกต่างจากจากที่คำนวณได้ในงานวิจัยนี้ และส่วนสุดท้ายในการตั้งสมมุติฐานในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบ Laminar และเลือดมีคุณพฤติกรรมแบบ Newtonian นั้นไม่สอดคล้องกับความเป็นจริงเพราะมีการทดสอบแล้วว่าเลือดมีพฤติกรรมแบบ Non-Newtonian จากงานวิจัยของ F.J.H. Gijsen and etc. และแม้การไหลภายในหลอดเลือดจะมีค่า Reynolds number ต่ำ แต่การขวางของ Plaque ก็เป็นสิ่งกระตุ้นให้เกิดการไหลแบบ Turbulence ได้

2.2.3 Sites of Rupture in Human Atherosclerotic Carotid Plaques Are Associated With modeling High Structural Stresses: An In Vivo MRI-Based 3D Fluid-Structure Interaction Study

Dalin Tang, Zhongzhao Teng, Gador Canton, Chun Yang, Marina Ferguson, Xueying Huang, Jie Zheng, Pamela K. Woodard and Chun Yuan

2.2.3.1 ปัญหาการวิจัย

(1) ความเค้นสูงเกิดขึ้นบริเวณจุดที่มีความบอบบางของ Plaque (เนื้อเยื่อที่มีความเสียหายจากการแตกของ Plaque)

(2) การใช้ข้อมูลจาก MRI สามารถสร้างรูปร่างของเนื้อเยื่อที่เกิดความเสียหายได้

(3) การใช้ FSI วิเคราะห์ปัญหาสามารถหาค่าความเค้นที่บริเวณจุดบอบบางของ Plaque ได้

2.2.3.2 สมมุติฐานการวิจัย

หากค่าความเค้นสูงเกิดขึ้นบนหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน ในบริเวณจุดที่บอบบางของ Plaque ไม่มีผลทำให้ plaque แตกได้

2.2.3.3 ขอบเขตการวิจัย

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกันที่ขึ้นกับเวลาในสามมิติ โดยเป็นการไหลแบบราบเรียบ ไม่มีการอัดตัว และสมุมติให้เลือดมีพฤติกรรมแบบ Newtonian องค์ประกอบของ Plaque กำหนดให้มีพฤติกรรมแบบ Hyperelastic ด้วยรูปแบบของ Mooney-Rivin สำหรับรูปร่างของ Plaque นำข้อมูลมาด้วยวิธีการ MRI จากผู้ป่วยจริงจำนวน 12 คนแล้วใช้กระบวนการที่พัฒนาขึ้นในการสร้างรูปร่างสามมิติที่มีความละเอียดสูง

2.2.3.4 เครื่องมือและทฤษฏี

โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาคือ ADINA โดยในการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งใช้สมการนาเวียร์สโตกค์ในรูปแบบ ALE (Arbitrary Lagrangian-Eluerian) และใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณการไหลของของไหลและความเค้นในของแข็ง

2.2.3.5 บทนำ

งานวิจัยมีการตั้งสมมุติฐานว่าความเค้นสูงที่เกิดขึ้นบนหลอดเลือดที่มีการอุดตันเป็นสาเหตุสำคัญของการแตกของ Plaque และนำวิธีการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกัน มาทดสอบสมมุติฐาน โดยวิเคราะห์หลอดเลือดของผู้ป่วยที่เก็บ

ข้อมูลด้วย MRI แล้วนำมาสร้างรูปร่างเป็นสามมิติ ก่อนนำมาวิเคราะห์เพื่อประเมินพฤติกรรมที่เกิดและไม่เกิดการแตก

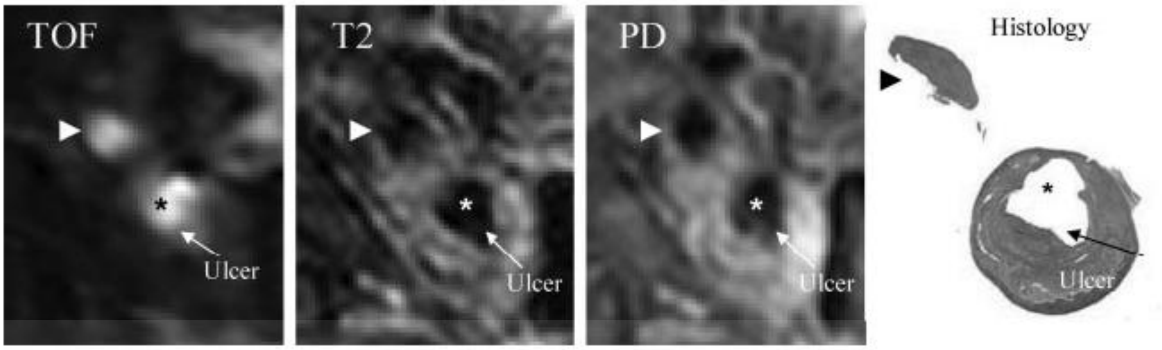
โดยข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ถูกนำมาจากผู้ป่วยจำนวน 12 คน ที่กำลังเข้าสู่การรักษาโดยการลอกไขมันที่อุดตันในเส้นเลือดออก โดยจากประวัติพบว่า 5 ใน 12 มีการแตกของ Plaque แล้ว

ปัจจุบันการรักษาและตรวจสอบผู้ป่วยที่มีไขมันอุดตันในหลอดเลือด จะใช้วิธีการ MRI, Ultrasound, Intravascular ultrasound และ CT แต่วิธีที่เป็นที่นิยมและมีประสิทธิภาพสูง ได้แก่ MRI เพราะไม่ต้องมีการสอดใส่อุปกรณ์เข้าสู่ร่างกาย และภาพที่ได้จะเห็นรายละเอียดของ Plaque อย่างชัดเจนและมีงานวิจัยหลายชิ้นที่นำภาพที่ได้จาก MRI ไปใช้ในการวิเคราะห์การแตกของ Plaque เช่น Carr S. and etc., Yuan C. and etc., Wiesmann F. and etc., และ Saam T เป็นต้น

งานวิจัยในอดีตไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาตามสมมุติฐานของงานวิจัยนี้ได้ เนื่องจากไม่สามารถเก็บรายละเอียดเนื้อเยื่อที่มีการฉีกขาดและการนำข้อมูลจาก MRI มาสร้างรูปร่างสามมิติมีความซับซ้อนในกระบวนการทำงาน โดยงานวิจัยนี้จะคำนวณหาค่า Wall maximum principle stress (PWS) และ Flow maximum shear stress (FMSS) เพื่อนำมาศึกษาผลของความเค้นกับความเค้นเฉือนจากการไหลร่วมกันกับตำแหน่งการแตกของ Plaque

2.2.3.6 การวิเคราะห์ปัญหา

ข้อมูลของ MRI (ดังรูปที่ 2.24) ของผู้ป่วยจำนวน 12 คน ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา โดยมีอายุในช่วง 54 ถึง 82 ปี มีค่าเฉลี่ยของอายุเท่ากับ 68 ปี เป็นผู้ชาย 11 คน ผู้หญิง 1 คน และการสร้างรูปร่างในสามมิติใช้ภาพจาก MRI ที่เก็บได้นั่นเอง



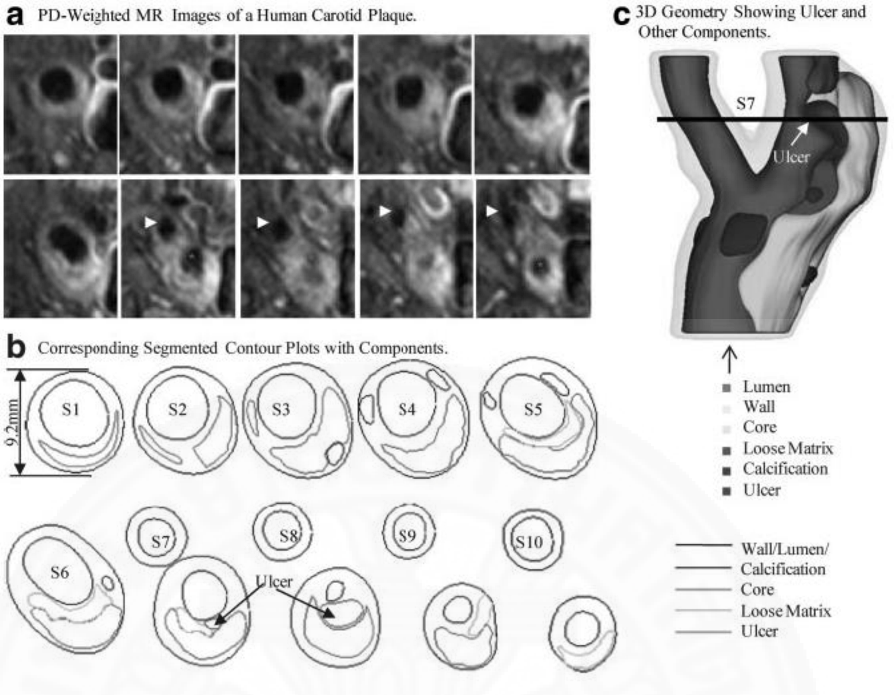
รูปที่ 2.24 แสดงหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันจาก TOF, T2, PD และ เนื้อเยื่อ ซึ่งแสดงถึงบริเวณความเสียหายของเนื้อเยื้อบริเวณนั้นรวมทั้งการเกาะตัวของลิ่มเลือดด้วย

ผนังหลอดเลือดและองค์ประกอบของ Plaque กำหนดให้มีคุณสมบัติแบบ Hyperelastic (Mooney-Rivlin model), Incompressible และ Homogeneous โดยเลือดสมมุติให้มีพฤติกรรมแบบ Newtonian มีลักษณะการไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว ซึ่งในการวิเคราะห์ปฏิสัมพันธ์ระหว่างการไหลและของแข็งไปพร้อมกันใช้โปรแกรม ADINA ในการแก้ไขปัญหา โดยโปรแกรมนี้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณทั้งในของแข็งและของไหล

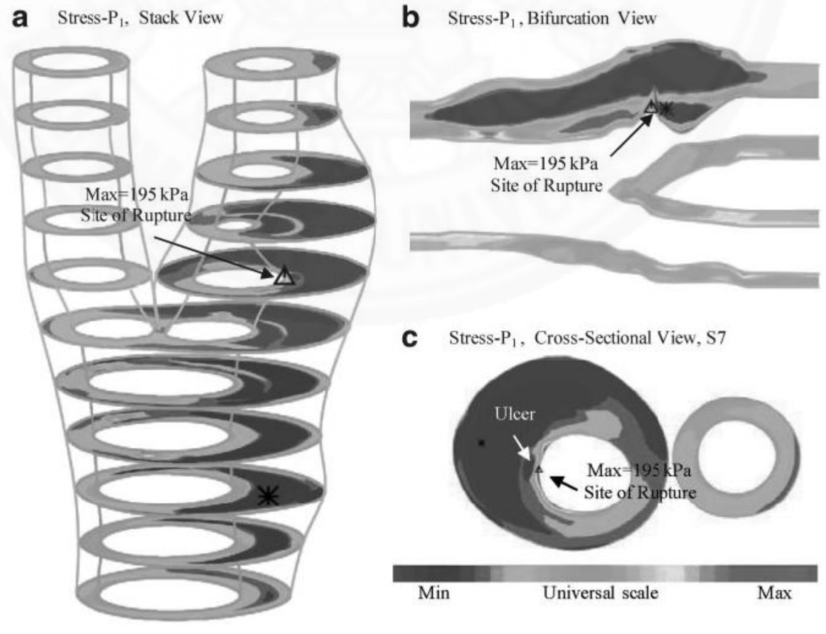
2.2.3.7 ผลการวิเคราะห์

รูปที่ 2.25 แสดงรูปร่างของหลอดเลือดที่มี Plaque ในสามมิติจากการสร้างด้วยภาพที่ได้จาก MRI

จากการวิเคราะห์พบว่า 5 ตัวอย่างที่ Plaque แตก พบว่าค่า PWS ของเนื้อเยื่อที่เสียหายมีค่าความเค้นที่ 123.0 kPa ซึ่งมีค่ามากกว่าค่าเฉลี่ยของ PWS ของเนื้อเยื่อที่ไม่เกิดความเสียหายที่มีค่า 66.3 kPa คิดเป็น 86% โดยความแตกต่างดังกล่าวถือว่ามีนัยสำคัญทางสถิติ



รูปที่ 2.25 แสดง PD-weighted ของภาพ MR และภาพตัดของหลอดเลือดในสามมิติ จากการสร้างภาพ



รูปที่ 2.26 แสดงการกระจายตัวของความเค้นในสามมิติ ซึ่งแสดงค่าความเค้นสูงสุดที่เนื้อเยื่อที่เกิดความเสียหาย

จากตารางที่ 2.3 พบว่า 5 ตัวอย่างที่ Plaque แตก มีค่าเฉลี่ยของ FMSS ของเนื้อเยื่อที่เกิดความเสียหายทั้งหมดมีค่า 38.9 dyn/cm^2 หรือคิดเป็น 170% เมื่อเทียบกับค่าเฉลี่ยของ FMSS ของเนื้อเยื่อที่ไม่ได้รับความเสียหายที่มีค่าเท่ากับ 14.4 dyn/cm^2 แต่ในตัวอย่างที่เหลือกลับไม่พบความแตกต่างที่มีนัยสำคัญทางสถิติ โดยหากเปรียบเทียบกันระหว่างกลุ่มตัวอย่าง 5 ตัวอย่างที่มีการแตกของ Plaque กับอีก 7 กลุ่มตัวอย่างซึ่งไม่มีการแตกของ Plaque พบว่าไม่มีความแตกต่างที่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ตารางที่ 2.2 แสดงความเค้นเฉลี่ยที่ผนังของ Plaque ของ Lipid Core, Calcification, Wall

	Ulcer		Wall		Lipid		Calcification		All Nodes		All Nonulcer		
Case	Mean	n	Mean	n	Mean	n	Mean	n	Mean	n	Mean	n	P Value
P1	157.8	18	73.3	110	99.8	65			90.1	193	83.1	175	<0.0001
P2	87.3	116	71.7	410	60.0	15	30.4	23	70.5	626	66.7	510	<0.0001
P3	141.6	7	62.3	431	59.0	167	60.0	16	62.3	621	61.4	614	0.0237
P4	104.5	28	70.6	428	76.2	182	50.6	33	74.3	772	73.1	744	0.0008
P5	164.1	95	72.0	537	59.2	87			82.7	719	70.3	624	<0.0001
All 5 Rup	123.0	264	69.5	1916	70.3	516	46.2	72	74.0	2931	66.3	2667	
P6			33.8	276	35.4	147			35.0	442	35.0	442	
P7			74.6	393	79.0	114	45.2	15	74.2	531	74.2	531	
P8			57.0	426	74.6	73			59.6	499	59.6	499	
P9			71.0	440	80.6	83			72.6	523	72.6	523	
P10			63.7	424	70.0	130			65.2	554	65.2	554	
P11			77.2	743	49.6	226			70.8	969	70.8	969	
P12			60.0	484	64.5	95			60.7	579	60.7	579	
7 No Rup			65.2	3186	60.8	868	45.2	15	64.1	4097	64.1	4097	
All 12 P	123.0	264	66.8	5102	64.3	1384	46.0	87	68.0	7028	66.1	6764	<0.0001

n indicates number of nodes.
The *P* values are for the ulcer vs nonulcer comparisons. Unit for PWS: kPa.

ตารางที่ 2.3 แสดงความเค้นเฉือนสูงสุดของ Ulcer, Lipid Core, Calcification, Wall

	Ulcer		Wall		Lipid		Calcification		All Nodes		All Nonulcer		
Case	Mean	n	Mean	n	Mean	n	Mean	n	Mean	n	Mean	n	*P* Value
P1	39.3	5	30.6	109	42.4	46			34.2	160	34.1	155	0.6848
P2	54.7	89	8.7	260	2.5	10	1.0	16	17.3	416	7.1	327	<0.0001
P3	23.6	6	13.9	431	22.4	170	11.8	15	16.3	622	16.2	616	<0.0001
P4	49.0	27	12.8	425	6.5	181	7.2	30	11.3	764	9.9	737	<0.0001
P5	10.8	57	14.6	362	41.2	53			17.1	472	18.0	415	<0.0001
All 5 Rup	38.9	184	14.0	1587	19.9	460	6.7	61	16.2	2434	14.4	2250	
P6			7.3	229	8.2	110			7.5	350	7.5	350	
P7			11.9	307	25.6	105	7.8	8	15.1	426	15.1	426	
P8			11.1	426	13.3	73			11.4	499	11.4	499	
P9			11.4	448	9.0	83			11.0	531	11.0	531	
P10			7.4	435	9.6	130			7.9	565	7.9	565	
P11			59.4	1039	65.6	226			60.5	1265	60.5	1265	
P12			15.0	288	19.0	60			15.7	348	15.7	348	
7 No Rup			26.6	3172	28.6	787	7.8	8	26.9	3984	26.9	3984	
All 12 P	38.9	184	22.4	4759	25.4	1247	6.8	69	22.8	6418	22.4	6234	<0.0001

n indicates number of nodes.
P values are for ulcer vs nonulcer comparisons. Unit for FMSS: dyn/cm^2.

2.2.3.8 สรุปงานวิจัย

(1) งานวิจัยนี้สร้างรูปร่างสามมิติด้วยภาพจาก MRI เพื่อให้ได้รูปร่างที่ใกล้เคียงกับของจริงมากที่สุดก่อนนำไปวิเคราะห์ปัญหา

(2) การคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกันมาวิเคราะห์การไหลของเลือดภายในหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน เพื่อวิเคราะห์ค่าความเค้นเพื่อทราบถึงตำแหน่งที่จะเป็นจุดที่ทำให้ Plaque เกิดการแตกขึ้นได้

(3) ผลลัพธ์ที่ได้ถูกนำไปเปรียบเทียบกันระหว่างกลุ่มตัวอย่างที่มีการแตกของ Plaque จำนวน 5 ตัวอย่าง กับกลุ่มตัวอย่างที่เหลือที่ไม่มีการแตกของ Plaque ซึ่งพบว่าในกลุ่มตัวอย่างที่มีการแตกของ Plaque มีค่าความเค้นเฉลี่ยที่เกิดบนเนื้อเยื่อที่เกิดความเสียหายมีความแตกต่างกับค่าความเค้นเฉลี่ยนบน Plaque มีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

2.2.3.9 วิจารณ์งานวิจัย

งานวิจัยนี้ได้นำภาพที่ได้จาก MRI มาสร้างรูปร่างในสามมิติ ซึ่งสามารถระบุองค์ประกอบของ Plaque อย่างชัดเจนแล้วนำมาคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกัน โดยข้อมูลที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ประกอบไปด้วย 12 กลุ่มตัวอย่าง มี 5 กลุ่มตัวอย่างที่มีการแตกของ Plaque ส่วนที่เหลือไม่มีการแตกของ Plaque โดยทำการวิเคราะห์

เปรียบเทียบกันเองระหว่างเนื้อเยื่อที่เกิดความเสียหายกับเนื้อเยื่ออื่นๆ ซึ่งพบความแตกต่างอย่างชัดเจน แต่หากเปรียบเทียบกันระหว่าง 5 กลุ่มตัวอย่างกับอีก 7 กลุ่มตัวอย่าง พบว่าไม่มีความแตกต่างที่มีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งให้ค่าที่มีความน่าเชื่อถือ เนื่องจากมีการสร้างรูปร่างจากการเก็บข้อมูลจริง

องค์ประกอบอื่นที่ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้อาจมีความคลาดเคลื่อน คือความเร็วของการไหลของเลือดในแต่ละช่วงเวลา ทั้งนี้เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างมีอายุแตกต่างกัน ซึ่งความเร็วการไหลของเลือดก็มีความแตกต่างกันไปด้วย ซึ่งทางผู้วิจัยไม่ได้ให้ความสำคัญในส่วนนี้ ส่วนเรื่องลักษณะการไหลที่มีรูปแบบราบเรียบทางผู้เขียนก็แจ้งให้ทราบจากข้อจำกัดของงานวิจัยแล้ว โดยจากที่กล่าวมาสามารถนำไปวิเคราะห์เพิ่มเติมในส่วนของงานวิจัยในอนาคตได้

2.2.4 Carotid arterial plaque stress analysis using fluid–structure interactive simulation based on in-vivo magnetic resonance images off our patients

Hao Gao, Quan Long, Martin Graves, Jonathan H. Gillard, Zhi-YongLi

2.2.4.1 ปัญหาการวิจัย

(1) กระบวนการวิเคราะห์หาค่าความเค้นที่เริ่มต้นจากการสร้างรูปร่างสามมิติจากภาพของ MRI แล้ววิเคราะห์ด้วย FSI สามารถนำไปใช้จริงกับผู้ป่วยได้

(2) ความเค้นที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาสามาถนำมาใช้เป็นข้อมูลในการจัดระดับความเสี่ยงต่อการแตกของ Plaque

2.2.4.2 สมมุติฐานการวิจัย

กระบวนการวิเคราะห์หาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบน Plaque ด้วยการสร้างรูปร่างในสามมิติแล้วคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกันไม่สามารถหาความเสี่ยงจากการแตกของ Plaque ได้

2.2.4.3 ขอบเขตการวิจัย

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกันที่ขึ้นกับเวลาในสามมิติ โดยเป็นการไหลแบบราบเรียบ ไม่มีการอัดตัว และสมุมติให้เลือดมีพฤติกรรมแบบ Newtonian องค์ประกอบของ Plaque กำหนดให้มีพฤติกรรมแบบ Hyperelastic ด้วยรูปแบบของ Mooney-Rivin สำหรับรูปร่างของ Plaque นำข้อมูลมาด้วยวิธีการ MRI จากผู้ป่วยจริงจำนวน 4 ตัวอย่าง แล้วจึงสร้างรูปร่างสามมิติ

2.2.4.4 เครื่องมือและทฤษฎี

โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาคือ ANSYS 11.0 โดยในการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็ง ใช้สมการนาเวียร์สโตกค์และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในการวิเคราะห์การไหลแล้วส่งข้อมูลความดันที่กระทำกับพื้นผิวของหลอดเลือด เพื่อคำนวณหาค่าความเค้นบนหลอดเลือดด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับรูปร่างในสามมิติใช้โปรแกรม MATLAB ในการแยกระดับความเข้มแสงของภาพและใช้โปรแกรม SolidWork ในการสร้างรูปร่างในสามมิติ

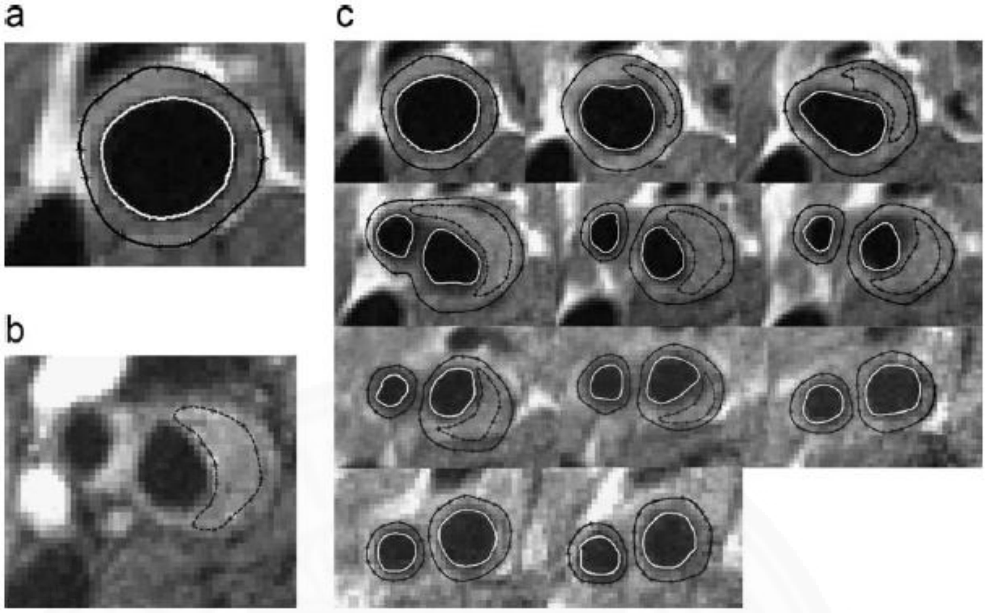
2.2.4.5 บทนำ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาผลความเค้นที่มีผลต่อการแตกของ Plaque โดยนำข้อมูล MRI ของกลุ่มตัวจำนวน 4 กลุ่มตัวอย่าง มาสร้างรูปร่างของหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตันในสามมิติ แล้วนำรูปร่างในสามมิติไปวิเคราะห์หาค่าการกระจายตัวของความเค้น โดยใช้การคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งพร้อมกัน ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นเฉือนที่ผนังมีความสัมพันธ์กับเปอร์เซ็นต์การอุดตันของหลอดเลือด โดยหาก Fibrous cap มีความหนาลดลงก็จะมีความเค้นเฉือนที่ผนังสูงขึ้นโดยผลลัพธ์ทั้งหมดถูกนำมาวิเคราะห์ถึงความเสี่ยงที่จะเกิดการแตกของ Plaque

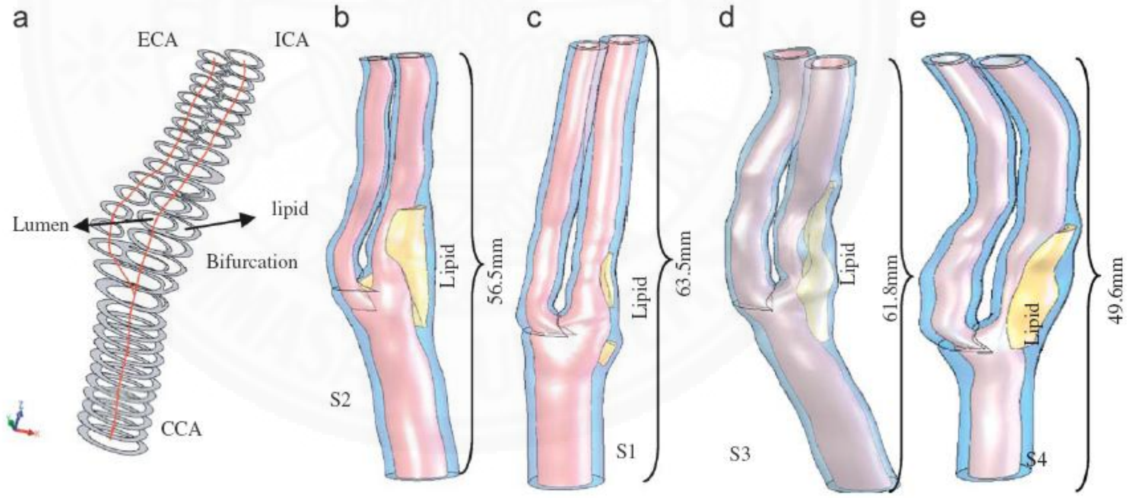
2.2.4.6 การวิเคราะห์ปัญหา

ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเป็นของผู้ป่วยจำนวน 4 ตัวอย่าง ซึ่งได้จาก MRI ที่มีความเข้มของแม่เหล็กขนาด 1.5T เก็บภาพของ common carotid artery (CCA), external carotid artery (ECA) และ internal carotid artery (ICA) โดยผู้วิจัยเขียนโปรแกรมด้วย Matlab ที่ใช้ในการแยกองค์ประกอบต่างๆ ของ Plaque จากความแตกต่างของความเข้มแสง ดังรูปที่ 2.27 แล้วนำไปสร้างรูปร่างสามมิติจากภาพในสองมิติ ด้วยโปรแกรม Solidworks 2006 ดังรูปที่ 2.28

ผนังหลอดเลือดกำหนดให้มีคุณสมบัติแบบ Hyperelastic แบบ Monney-Rivilin ตามงานวิจัยของ Gao and Long 2008 โดยไขมันกำหนดให้มีคุณสมบัติเท่ากันทุกทิศทุกทางและใช้ค่าคงที่ตามงานวิจัยของ Finet et al., 2004 สำหรับการวิเคราะห์การไหลกำหนดให้ของไหลมีรูปแบบราบเรียบที่ขึ้นกับเวลา และมีพฤติกรรมแบบ Newtonian โดยความหนืดของเลือดมีค่าเท่ากับ 0.004 Pa.s ซึ่งโปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ ANSYS 11.0 และในการกำหนดเงื่อนไขที่ทางเข้าด้วยการนำผลที่ได้จาก MRI ในส่วนของ phase-contrast cine images แปลงเป็นความดันที่ขึ้นอยู่กับเวลาดังรูปที่ 2.29



รูปที่ 2.27 แสดงองค์ประกอบของ Plaque a) ผนังหลอดเลือด b) ไขมัน c) ภาพรวมของ Plaque

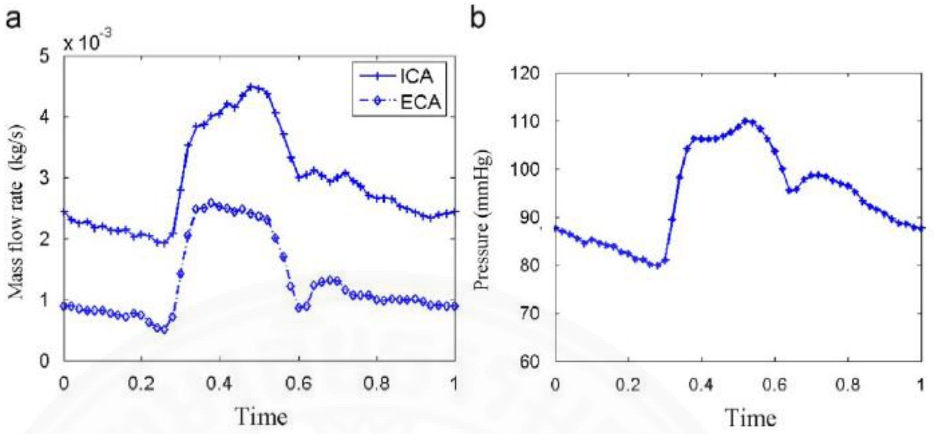


รูปที่ 2.28 แสดงรูปร่างสามมิติของหลอดในกลุ่มตัวอย่าง a) ภาพในสองมิติ b)-e) รูปร่างในสามมิติของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 4 ตัวอย่าง

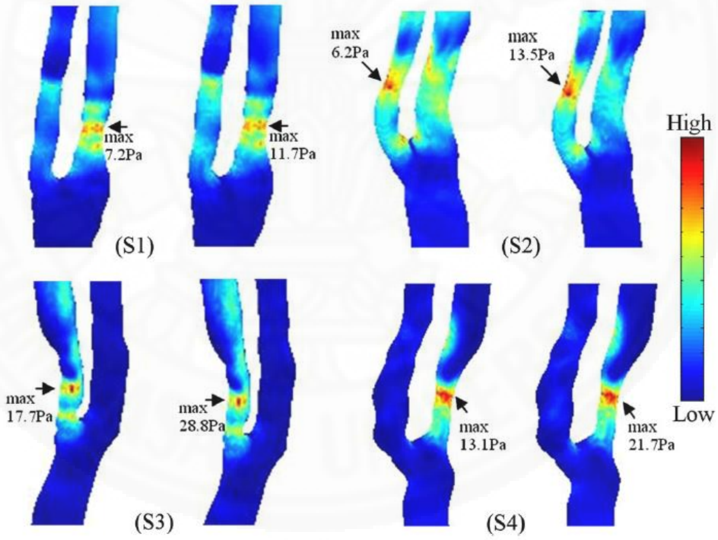
2.2.4.7 ผลการวิเคราะห์

รูปที่ 2.30 แสดงการกระจายตัวของความเค้นเฉือนที่ผนังเฉลี่ยและความเค้นเฉือนที่ผนังสูงสุด ซึ่งพบว่าความเค้นเฉือนที่ผนังของตัวอย่างที่ 1 และ 2 มีค่าน้อยกว่าในกลุ่มตัวอย่าง

ที่ 3 และ 4 ซึ่งมีการอุดตันปานกลาง นอกจากนี้ในบริเวณที่มีการอุดตันความเค้นเฉือนที่ผนังมีค่าสูง โดยบริเวณต้นการไหลมีค่าความเค้นเฉือนที่ผนังน้อยกว่าปลายทางไหล



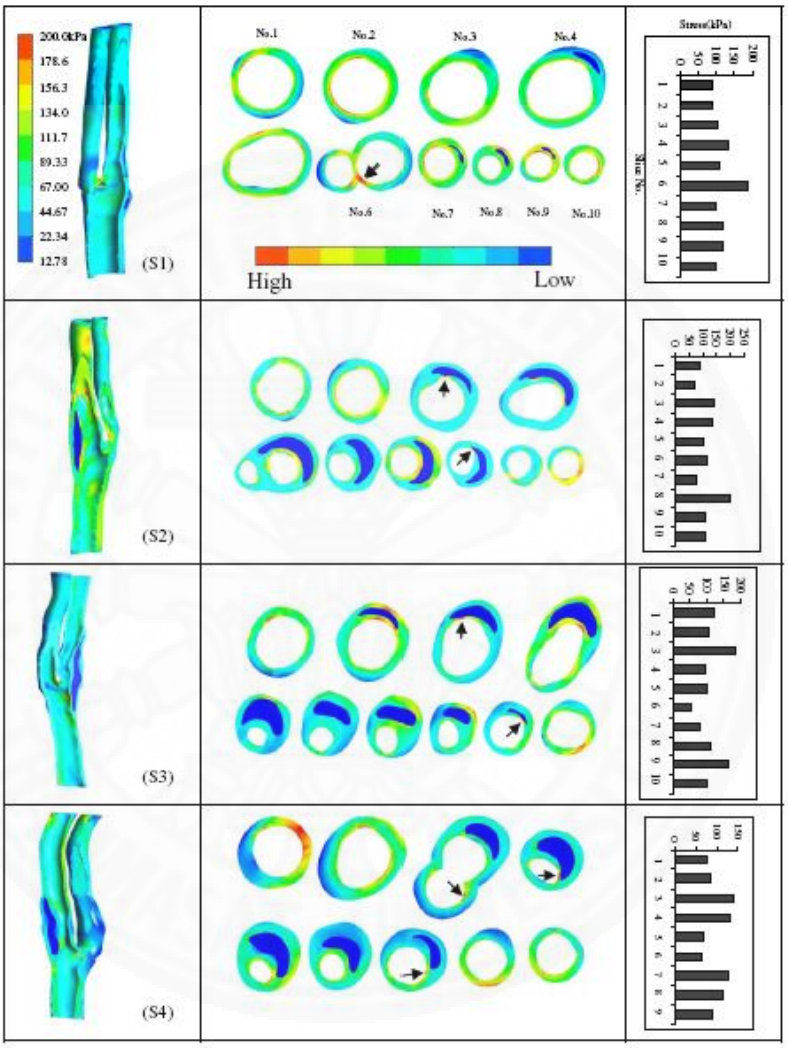
รูปที่ 2.29 เงื่อนไขในการวิเคราะห์ปัญหา a) อัตราการไหลของ ICA และ ECA b) รูปแบบความดันของ CCA



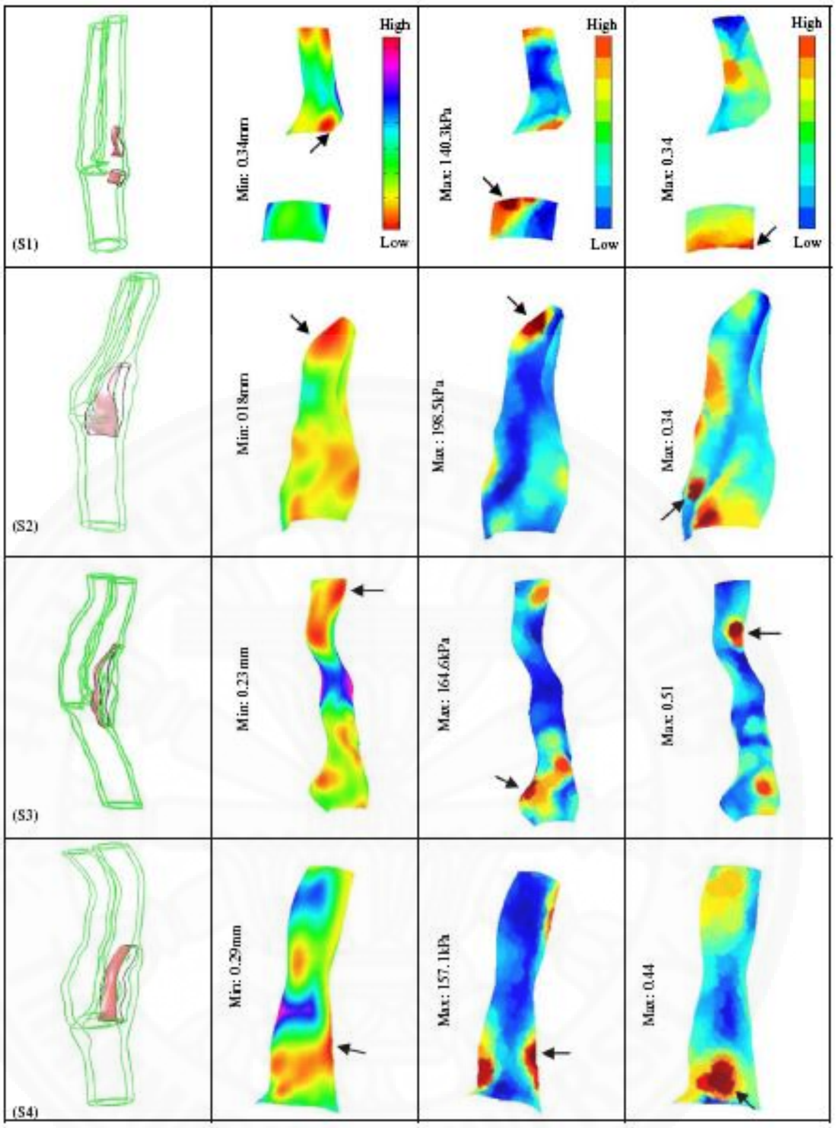
รูปที่ 2.30 แสดงการกระจายตัวของความเค้นเฉือนที่ผนังเฉลี่ยและขณะมีอัตราการไหลสูงสุดของกลุ่มตัวอย่างทั้ง 4 ตัวอย่าง

รูปที่ 2.31 แสดงการกระจายตัวของความเค้นสูงสุด โดยในคอลัมน์แรกแสดงการกระจายตัวของความเค้นบนหลอดเลือดภาคตัดตามยาว คอลัมที่สองแสดงการกระจายตัวของความเค้นในภาคตัดขวางหลอดเลือด และคอลัมน์ที่สามแสดงค่าความเค้นเฉือนที่ผนังสูงสุดของหลอดเลือดที่ตำแหน่งต่างๆเป็นกราฟแท่ง ซึ่งพบว่าค่าความเค้นสูงสุดเกิดขึ้นที่ผนังด้านในและมีค่าน้อยลงที่ผนังด้านนอก โดยค่าความเค้นมีค่าน้อยสุดที่บริเวณไขมัน หากพิจารณาผลการวิเคราะห์ของตัวอย่างที่ 1

พบว่ามีการกระจายตัวของความเค้นตลอดเส้นรอบวงอย่างสม่ำเสมอ เนื่องจากมีการอุดตันเพียงเล็กน้อย นอกจากนี้หากพิจารณาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นใน Fibrous cap ซึ่งมีความหนาน้อยกว่า 0.39 มิลลิเมตร โดยความเค้นสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ Fibrous cap ยิ่งมีความหนาน้อยค่าความเค้นจะมีค่าสูงขึ้น ดังรูปที่ 2.32



รูปที่ 2.31 แสดงการกระจายตัวของความเค้นสูงสุด โดยในคอลัมน์แรกแสดงการกระจายตัวของความเค้นบนหลอดเลือดภาคตัดตามยาว คอลัมน์ที่สองแสดงการกระจายตัวของความเค้นในภาคตัดขวางหลอดเลือด และคอลัมน์ที่สามแสดงค่าความเค้นเฉือนที่ผนังสูงสุดของหลอดเลือดที่ตำแหน่งต่างๆเป็นกราฟแท่ง



รูปที่ 2.32 แสดงการกระจายตัวของค่าเค้นบน Fibrous cap โดยคอลัมน์แรกแสดงผิวของ Fibrous cap ของแต่ละกลุ่มตัวอย่าง คอลัมน์ที่สองแสดงความหนาของ Fibrous cap คอลัมน์ที่สามแสดงการกระจายตัวของความเค้นเฉือนสูงสุดบน Fibrous cap และ คอลัมน์ที่สี่แสดงการกระจายตัวของความเค้น relative cyclic VWTS

ตารางที่ 2.4 ผลของค่าความเค้นและ Morphological factor ของกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งพบว่าความเค้นเฉือนที่ผนังมีความสัมพันธ์กับเปอร์เซ็นต์การอุดตันโดยยิ่งมีเปอร์เซ็นต์การอุดตันมากขึ้นค่าความเค้นเฉือนที่ผนังก็จะมีค่ามากขึ้นไปด้วย แต่ค่าความเค้นสูงสุดแต่ละวงรอบไม่ขึ้นกับเปอร์เซ็นต์การอุดตันและมีความสัมพันธ์กับความหนาของ Fibrous cap ในขณะที่ ค่า rcVWTS มีค่า

ใกล้เคียงกันทุกตัวอย่าง โดยเมื่อพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์สามารถเรียงลำดับความเสี่ยงของการเกิด Plaque แตกจากมากไปน้อยดังนี้ กลุ่มตัวอย่างที่ 2, 3, 4 และ 1 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.4 ผลของค่าความเค้นและ Morphological factor ของกลุ่มตัวอย่าง

		Subjects			
		S1	S2	S3	S4
Stress factor					
WSS_tmax (Pa)	Max	11.4	6.9	28.8	21.7
	Mean	4.03	3.6	8.2	8.6
WSS_tmean (Pa)	Max	6.9	4.1	17.7	13.1
	Mean	2.4	2.2	5.0	5.3
VWTS_tmax (kPa)	Max	140.3	198.5	164.6	157.1
	Mean	80.5	80.7	82.9	69.1
rcVWTS	Max	0.34	0.34	0.51	0.44
	Mean	0.21	0.26	0.29	0.28
Morphological factors					
min_FT (mm)	Min	0.34	0.18	0.23	0.29
max_SD	Max	10%	22%	72%	73%

WSS_tmax: temporal maximum wall shear stress; WSS_tmean: temporal mean wall shear stress, VWTS_tmax: temporal maximum wall tensile stress, rcVWTS: relative cyclic wall tensile stress, min_FT: minimum fibrous cap thickness, max_SD: and maximum degree of stenosis.

2.2.4.8 สรุปงานวิจัย

(1) งานวิจัยนี้นำการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งมาวิเคราะห์หลอดเลือดของผู้ป่วยที่มีการอุดตันของไขมันที่หลอดเลือดจำนวน 4 กลุ่มตัวอย่าง

(2) สร้างรูปร่างสามมิติโดยนำภาพสองมิติจาก MRI มาสร้างเป็นรูปร่างสามมิติด้วย แล้ววิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมเมอร์เชียล

(3) ผลลัพธ์ที่ได้ถูกนำมาวิเคราะห์เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับปัจจัยต่างๆ เช่น เปอร์เซ็นต์การอุดตัน ความหนาของ Fibrous cap เพื่อจัดลำดับความเสี่ยงของ Plaque ที่มีความเสี่ยงที่จะแตก

2.2.4.9 วิจารณ์งานวิจัย

งานวิจัยนี้ได้การคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างการวิเคราะห์การไหลและของแข็งไปพร้อมกันมาวิเคราะห์การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดที่มีการอุดตันจากกลุ่มตัวอย่างจำนวน 4 กลุ่ม เพื่อหาค่าความเค้นที่เกิดขึ้น แล้วนำไปหาความสัมพันธ์กับข้อมูลทางกายภาพของ Plaque ซึ่งถูกนำมาประเมินความเสี่ยงที่ Plaque จะแตก โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ของผลลัพธ์จากทั้ง 4 ตัวอย่างได้ นอกนี้กระบวนการวิเคราะห์ทั้งหมดอาจถูกนำไปใช้ในการรักษาผู้ป่วยในอนาคตได้

แต่ในงานวิจัยนำตัวอย่างมาวิเคราะห์ปัญหาน้อยเกินไป รวมทั้งความละเอียดของภาพที่นำมาสร้างรูปร่างสามมิติที่ทางผู้วิจัยเองก็กล่าวว่าความละเอียดน้อยเกินไปจนไม่สามารถสร้างรูปร่างของ Fibrous cap ที่มีความหนาน้อยมาก นอกจากนี้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบ Laminar และเลือดมีพฤติกรรมแบบ Newtonian ซึ่งไม่สอดคล้องกับพฤติกรรมจริง

บทที่ 3
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะแสดงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการไหล โดยจะแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลซึ่งประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) และสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum) สำหรับส่วนที่สองจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับของแข็ง ซึ่งได้แก่ สมการสมดุลของแข็ง (Equilibrium equation)

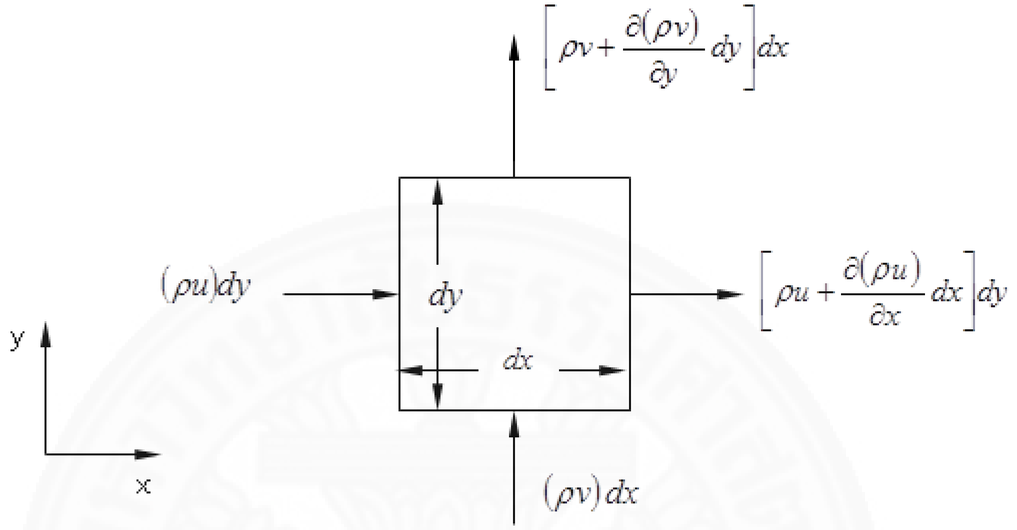
3.1 ของไหล

3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

พิจารณาการไหลผ่านปริมาตรควบคุมขนาดเล็กในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) ที่มีขนาด Δx และ Δy ดังแสดงในรูปที่ 3.1 โดยกำหนดให้ u และ v แทนความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ จะได้ว่าผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน x คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy \quad - \quad (\rho u)dy \quad = \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,dy \tag{3.1}$$

และผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน y คือ



รูปที่ 3.1 มวลของของไหลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมสองมิติในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

$$\left[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx \;-\; (\rho v)dx \;=\; \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\,dx \tag{3.2}$$

ดังนั้น

$$\text{ผลลัพธ์ของมวลของไหลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุม} = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy \tag{3.3}$$

สำหรับมวลของของไหลภายในปริมาตรควบคุมนั้นเท่ากับ $\rho(dx\,dy)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\text{อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในปริมาตรควบคุม} = \frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\,dy) \tag{3.4}$$

จากนิยามของกฎการอนุรักษ์มวลที่กล่าวว่า “ผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ไหลออกจากปริมาตรควบคุมที่พิจารณาจะเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในปริมาตรควบคุมนั้น” เราสามารถเขียนรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t}(dx\,dy) \quad (3.5)$$

หรือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] = 0 \quad (3.6)$$

สมการที่ (3.6) สามารถเขียนให้อยู่ในอีกรูปหนึ่ง คือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \quad (3.7)$$

หรือ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 0 \quad (3.8)$$

ดังนั้น สมการ (3.6) สามารถเขียนในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0 \quad (3.9)$$

โดยที่

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \quad \text{และ} \quad \vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

จากสมมติฐานที่กล่าวไว้ข้างต้นว่าของไหลเป็นชนิดอัดตัวไม่ได้ ซึ่งทำให้ความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา และตำแหน่งต่างๆ ขณะเคลื่อนที่ ดังนั้น

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

ดังนั้นสมการ (3.8) สามารถลดรูปเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

หรือเขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{3.12}$$

3.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

จากกฎข้อที่สองของนิวตันหรือกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมซึ่งกล่าวว่า "แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้น" เราสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{3.13}$$

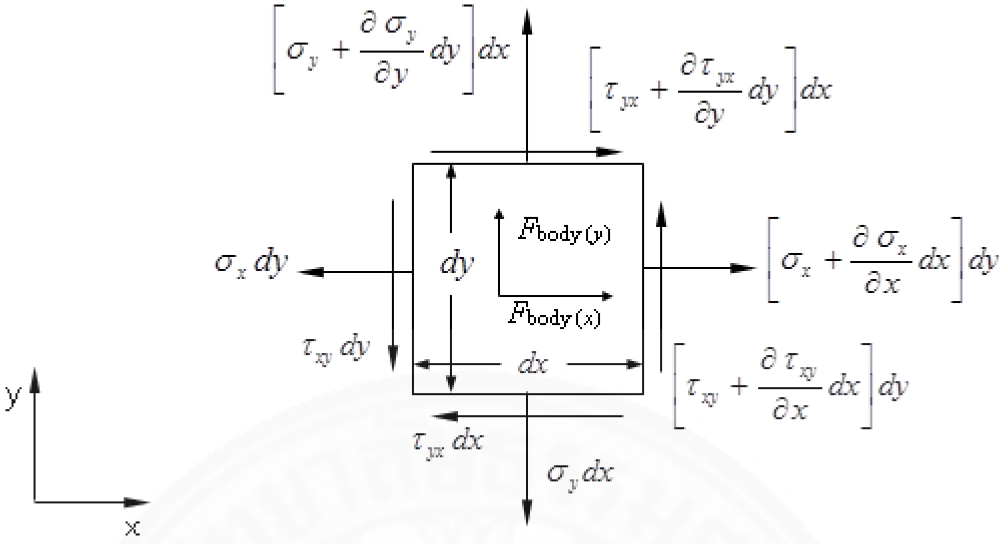
จากความสัมพันธ์แบบเวคเตอร์ ในสมการที่ (3.13) สามารถแบ่งความสัมพันธ์ออกได้เป็น 2 แนวแกนในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน คือแกน x และ y ซึ่งในที่นี้จะทำการพิจารณาเพียงส่วนประกอบในแนวแกน x เพียงแกนเดียวก่อน โดยจะได้ความสัมพันธ์ของแรงตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันเป็น

$$\sum F_x = ma_x \tag{3.14}$$

เมื่อ F_x และ a_x เป็นค่าของแรงและความเร่งในแนวแกน x ตามลำดับ

พิจารณาเทอมด้านขวาของสมการ (3.14) มวลของของไหลภายในปริมาตรควบคุม

$$m = \rho\, dx\, dy \tag{3.15}$$



รูปที่ 3.2 แรงที่กระทำบนปริมาตรควบคุมสองมิติ

พิจารณาเทอมด้านซ้ายของสมการ (3.14) แรงที่กระทำบนปริมาตรควบคุม (รูปที่ 3.2) ประกอบไปด้วยสองส่วนด้วยกัน คือ

1) Body forces คือ แรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคของของไหล โดยไม่มีการสัมผัสทางกายภาพ (Physical contact) ซึ่งได้แก่ แรงจากความโน้มถ่วงของโลก และแรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะผลจากแรงโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว
2) Surface forces คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อผิวด้านนอกของปริมาตรควบคุมของของไหลที่ถูกพิจารณา ซึ่งประกอบไปด้วย แรงเนื่องจากความดันในแนวตั้งฉาก (Normal force) และแรงเนื่องจากความเค้นเฉือนในแนวสัมผัส (Shear force)

ดังนั้นแรงลัพธ์ในแนวแกน x คือ

$$\sum F_x = \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) - \sigma_x\right] dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) - \tau_{yx}\right] dx + \rho g_x dx dy \quad (3.16)$$

หรือ

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx + \rho g_x dx dy \quad (3.17)$$

สำหรับความเร่งในแนวแกน x มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{3.18}$$

นำสมการ (3.15), (3.17) และ (3.18) แทนค่าลงในสมการ (3.14) จะได้สมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ดังนี้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{3.19a}$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถเขียนสมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y ได้เป็น

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{3.19b}$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) สามารถเขียนความเค้นต่างๆ ให้อยู่ในเทอมของความเร็วและความดันได้โดยใช้สมมติฐานของสโตกส์ (Stokes' hypothesis) ดังนี้

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.20a}$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.20b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \tag{3.20c}$$

โดย μ แทนค่าความหนืด (Viscosity) ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนรูปของของไหล เมื่อแทนสมการ (3.20) ลงในสมการ (3.19) จะทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์โมเมนตัม ที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\right)u=\rho g_{x}-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \quad (3.21a)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\left(\vec{\mathrm{V}}\cdot\nabla\right)v=\rho g_{y}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}\right] \quad (3.21b)$$

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สภาวะอยู่ตัว และหากละทิ้งแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหล สมการนาเวียร์-สโตกส์จะลดรูปลงมาเป็น

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \quad (3.22a)$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \quad (3.22b)$$

สมการความต่อเนื่องและสมการอนุรักษ์โมเมนตัมสามารถเขียนอยู่ในรูปสามมิติและมีพฤติกรรมการไหลแบบปั่นป่วนได้ดังต่อไปนี้

3.1.3 สมการความต่อเนื่องในสามมิติ (Continuity equation)

ได้จากสมการอนุรักษ์มวล ดังสมการ (3.23)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \quad (3.23)$$

หรือ เขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังสมการ (3.24)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0 \quad (3.24)$$

สมการที่ (3.24) คือสมการความต่อเนื่องใน 3 มิติที่ขึ้นกับเวลา โดยที่ของไหลเป็นของไหลอัดตัวได้ เทอมแรกของสมการคืออัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นที่ขึ้นกับเวลา ส่วนเทอมที่สองจะแสดงถึงอัตราการไหลออกจากเอลิเมนต์ส่วนข้ามผ่านขอบเขต ถ้าเป็นกรณีที่ของไหลอัดตัวไม่ได้ ความหนาแน่นจะมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้น สมการ 3.24 สามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{3.26}$$

เมื่อ $\vec{V}$ คือความเร็ว (m/s), ρ คือความหนาแน่น (kg/m^3) และ t คือเวลา (s)

3.1.4 สมการนาเวียร์-สโตกส์ในสามมิติ (Navier-Stokes equation)

ได้จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัม จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และอัตราการเปลี่ยนรูปของของไหล (Stoke, 1845)

โมเมนตัม แกน x

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x \tag{3.27}$$

โมเมนตัม แกน y

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y \tag{3.28}$$

โมเมนตัมแกน z

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + F_z \tag{3.29}$$

Shear stress constitutive equation

$$\tau_{xx} = -\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{u}\right) \tag{3.30}$$

$$\tau_{yy} = -\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{u}\right) \tag{3.31}$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{u}\right) \tag{3.32}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.33}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3.34}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.35}$$

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.36}$$

สำหรับ Newtonian incompressible fluid

โมเมนตัม แกน x

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F_x \tag{3.37}$$

โมเมนตัม แกน y

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + F_y \tag{3.38}$$

โมเมนตัมแกน z

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+F_z \tag{3.39}$$

เมื่อ p คือ ความดัน (Pa), μ คือ ความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity, Pa.s) และ F คือแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง (body force, N/m^3)

สมการอนุพันธ์ย่อยต่างอยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) (ปราโมทย์, 2545) กล่าวคือ การจับตาดูพื้นที่สี่เหลี่ยมขนาด dx และ dy ซึ่งตรึงแน่นอยู่กับที่ไม่ไหลไปกับการไหล แล้วเฝ้าดูปริมาณฟลักซ์ที่ผ่านเข้าออกพื้นที่สี่เหลี่ยมนี้ หากพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยละเอียดจะพบว่าทางด้านซ้ายของทุกสมการสามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่มีพจน์ที่เกี่ยวข้องกับไดเวอร์เจนซ์ของปริมาณฟลักซ์ กล่าวคือ $\vec{\nabla}\cdot$ปริมาณฟลักซ์ ดังนี้

(1) $\rho\vec{V}$ แทนปริมาณฟลักซ์ของมวล

(2) $\rho u\vec{V}$ แทนปริมาณฟลักซ์ของโมเมนตัมในทิศแกน x

(3) $\rho v\vec{V}$ แทนปริมาณฟลักซ์ของโมเมนตัมในทิศแกน y

(4) $\rho w\vec{V}$ แทนปริมาณฟลักซ์ของโมเมนตัมในทิศแกน z

3.1.5 แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน

สำหรับงานทางด้านวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับการไหลต่าง ๆ เช่น การไหลในท่อ การไหลผ่านแผ่นเรียบและอื่น ๆ จะมีพฤติกรรมการไหลแบบปั่นป่วนคือความเร็วของของไหลประกอบไปด้วยส่วนที่เป็นค่าเฉลี่ยและส่วนที่เป็นค่าแปรปรวน

การไหลแบบปั่นป่วน

ค่าเรย์โนลด์ของการไหลจะให้ความสัมพันธ์ของแรงเฉื่อยหรือแรงภายในต่อแรงเนื่องจากความหนืด ในการทดสอบระบบการไหลสังเกตว่าค่าเรย์โนลด์ที่ต่ำกว่าค่าเรย์โนลด์วิกฤต ทำให้การไหลจะสม่ำเสมอ โดยชั้นของของไหลที่ติดกันเลื่อนไหลผ่านอย่างเป็นระเบียบ ถ้าทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเป็นการไหลแบบคงที่ เรียกการไหลแบบนี้ว่าการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ในกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มากกว่าค่าเรย์โนลด์วิกฤต พฤติกรรมการไหลจะ

เป็นแบบสุ่มวุ่นวาย การเคลื่อนที่ภายในจะไม่คงที่แม้ว่าเงื่อนไขขอบเขตที่ใส่เข้าไปจะคงที่ ความเร็วและค่าการไหลอื่น ๆ จะแปรผันตามการไหลที่มีทิศทางสุ่มและวุ่นวาย เรียกการไหลแบบนี้ว่า การไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow)

สมการเรย์โนลด์ของการไหลแบบปั่นป่วน

การวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วนด้วยสมการนาเวียร์-สโตกส์โดยตรงนั้น ไม่สามารถทำได้ ทฤษฎีการวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วนในปัจจุบันจึงใช้สมการเรย์โนลด์ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้จากการเฉลี่ยของสมการนาเวียร์-สโตกส์ โดยเริ่มจากการพิจารณาว่าความเร็วของการไหลรวมทั้งแรงดัน ซึ่งอยู่ในรูปของค่าเฉลี่ยรวมกับค่าแปรปรวน

$$
\begin{aligned}
u &= \overline{u} + u' \\
v &= \overline{v} + v' \\
w &= \overline{w} + w'
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

และ

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} u' dt = 0 \\
\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} u dt = 0 \\
\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} v' dt = 0 \\
\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} v dt = 0 \\
\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} w' dt = 0 \\
\frac{1}{\delta t}\int_0^{\delta t} w dt = 0
\end{gathered}
\tag{3.41}
$$

เมื่อ $u, \ v, \ w$ คือ ความเร็วในทิศทาง x, y, z ตามลำดับ

$\overline{u}, \ \overline{v}, \ \overline{w}$ คือ ความเร็วเฉลี่ยในทิศทาง x, y, z ตามลำดับ

$\overline{u}, \ \overline{v}, \ \overline{w}$ คือ ความเร็วแปรปรวนในทิศทาง x, y, z ตามลำดับ

$p, \ \overline{p}, \ p'$ คือ แรงดัน แรงดันเฉลี่ย และแรงดันเฉลี่ยแปรปรวน ตามลำดับ

และ δt คือ ช่วงเวลาในการเฉลี่ย

แทนสมการ (3.40) ลงในสมการเชิงอนุรักษ์มวล โดยพิจารณาเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0 \tag{3.42}$$

และ แทนสมการ (3.40) และ (3.41) ลงในสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม (3.38) - (3.40) โดยพิจารณาเป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ โดยไม่คิดผลของค่าความหนืดและผลของแรงเนื่องจากน้ำหนักตัวเอง ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)-\rho\overline{u'}\overline{u'}\right]\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)-\rho\overline{u'}\overline{v'}\right]\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)-\rho\overline{u'}\overline{w'}\right]\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)-\rho\overline{v'}\overline{u'}\right]\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)-\rho\overline{v'}\overline{v'}\right]\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)-\rho\overline{v'}\overline{w'}\right]\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}&+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)-\rho\overline{w'}\overline{u'}\right]\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)-\rho\overline{w'}\overline{v'}\right]\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)-\rho\overline{w'}\overline{w'}\right]\end{aligned} \tag{3.45}$$

เรียกสมการ (3.43) - (3.45) ว่าสมการเรย์โนลด์ สังเกตว่า สมการเรย์โนลด์นั้นมีหน้าตาคล้ายคลึงกับสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมของนาเวียร์-สโตกส์ โดยที่มีเทอมเพิ่มขึ้นมา 9 เทอม ซึ่งเรียกว่า Reynolds stresses tensor หรือ Turbulence stresses tensor คือ

$$\begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าสมการเรย์โนลด์นั้น มีตัวไม่รู้ค่าเป็นค่าเฉลี่ยของความดันและความเร็วของแกนต่าง ๆ โดยสมการจะอยู่ในรูปแบบของการไหลที่ไม่ปั่นป่วน ซึ่งสามารถทำการวิเคราะห์ต่อได้ สำหรับเทอมของ Reynolds stresses นั้นเป็นตัวไม่ทราบค่าเพิ่มขึ้นมา

Eddy viscosity model (EVM)

สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน ทฤษฎีนี้เป็นที่นิยมและใช้กันแพร่หลายในการวิเคราะห์ปัญหา พิจารณาว่า Reynolds stresses นั้นมีความสัมพันธ์กับเกรเดียนท์ความเร็ว ดังนี้

$$-\rho\begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{v'u'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} = \mu_t \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \overline{w}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} & \frac{\partial \overline{w}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

เมื่อ μ_t คือ ค่าความหนืดจากการไหลแบบปั่นป่วน

เมื่อแทนความสัมพันธ์ของสมการ (3.46) ลงใน สมการ (3.43) - (3.44) จะทำให้สมการเรย์โนลด์อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)\right] \qquad (3.47)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\right)\right] \qquad (3.48)$$

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)\right] \qquad (3.49)$$

แบบจำลองจาก EVM นี้ มีหลากหลายตัวและถูกนำไปพัฒนาสร้างเป็นซอฟแวร์สำเร็จรูปเพื่อการใช้งาน เช่น แบบจำลอง k-ε แบบจำลอง k-ω ในงานวิจัยนี้จะใช้แบบจำลองการไหลแบบ k-ε เนื่องจากเป็นแบบจำลองที่ใช้ทรัพยากรในการคำนวณไม่สูงมาก และได้รับการยอมรับในระดับหนึ่ง

แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วนชนิด k-ε นี้ สนใจการเกิดขึ้นของพลังงานจลศาสตร์ของการปั่นป่วน และค่าความหนืดของการไหลแบบปั่นป่วน (μ_t) สามารถเขียนในรูปของ k และ ε ได้ดังนี้

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (3.50)$$

เมื่อ k คือ สมการพลังงานจลน์แบบปั่นป่วน สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t}+\rho\frac{\partial \bar{u}k}{\partial x}+\rho\frac{\partial \bar{v}k}{\partial y}+\rho\frac{\partial \bar{w}k}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial z}\right)+\mu_t\phi-\rho\varepsilon \tag{3.51}$$

และ ε คือสมการอัตราการกระจายพลังงานจลน์แบบปั่นป่วน สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t}+\rho\frac{\partial \bar{u}k}{\partial x}+\rho\frac{\partial \bar{v}k}{\partial y}+\rho\frac{\partial \bar{w}k}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)+C_{1\varepsilon\mu_t}\frac{\varepsilon}{k}\phi-C_{2\varepsilon\mu_t}\rho\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{3.52}$$

เมื่อ $C_\mu = 0.09$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$ $C_2 = 1.92$ $\sigma_\varepsilon = 1.3$ เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการทดลองตามลำดับ สมการของ k-ε นี้ เป็นสมการที่ใช้ประกอบกับสมการเรย์โนลด์ในการคำนวณหาค่าความเร็วเฉลี่ย $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ตามลำดับ

3.1.6 เงื่อนไขขอบ

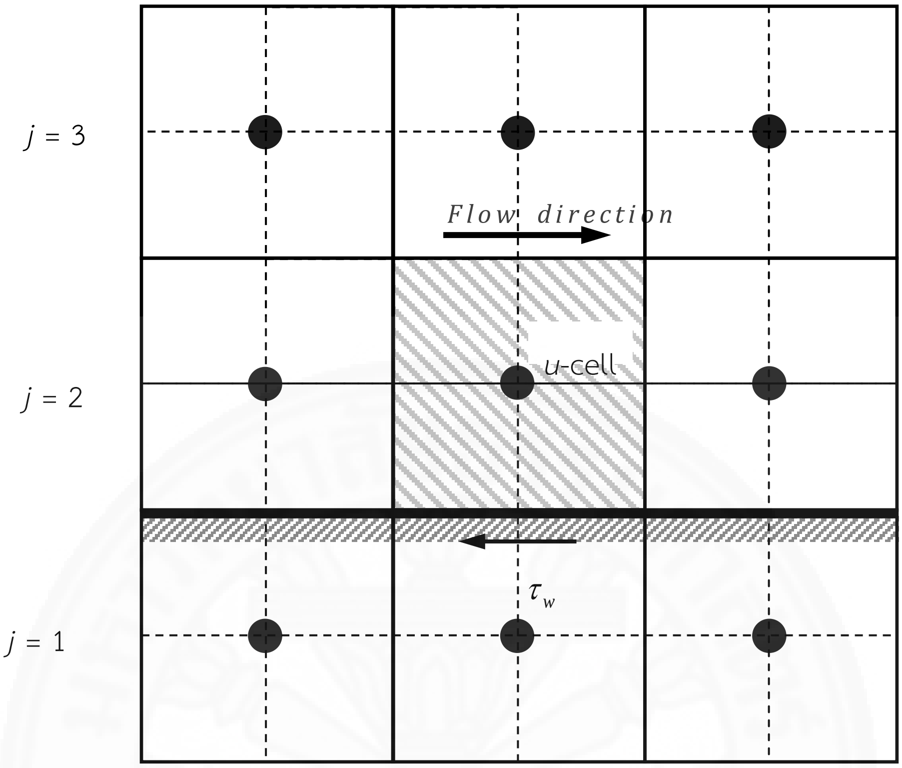
การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาการคำนวณต่าง ๆ นั้น จำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบ (Boundary conditions) และเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) เนื่องจากสภาพทางกายภาพของปัญหาที่จำลองมาจะขึ้นกับการกำหนดเงื่อนไขเหล่านั้น ในหัวข้อนี้จะนำเสนอเงื่อนไขขอบทั่วไปที่ใช้ในวิธีไฟไนต์วอลุมโดยแบ่งเงื่อนไขเป็นสองประเภทใหญ่ๆ คือ

(1) เงื่อนไขขอบที่ผนัง (Wall boundary condition)

(2) เงื่อนไขขอบแบบสมมาตร (Symmetric boundary condition)

3.1.6.1 เงื่อนไขขอบที่ผนัง (Wall boundary condition)

ผนังเป็นเงื่อนไขขอบที่พบในปัญหาการไหลทั่วไป โดยอาจแบ่งเงื่อนไขขอบชนิดนี้เป็นเงื่อนไขย่อยหลายประเภท ซึ่งในที่นี้จะใช้ผนังที่ขนานกับแนวแกน x (รูปที่ 3.11) ในการพิจารณา



รูปที่ 3.3 ปริมาตรควบคุมที่ผนัง

เงื่อนไขที่ไม่มีการลื่นไถล (No-slip condition; u = 0, v = 0) เป็นเงื่อนไขการประมาณของความเร็วที่ผิวของแข็ง โดยความเร็วที่ขอบ (j = 1) มีค่าเท่ากับศูนย์ และปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดผนังมีค่า $a_S = 0$ เนื่องจากไม่มีการคำนวณ Pressure correction ที่ตำแหน่งนี้

เงื่อนไขขอบที่ผนังสำหรับการไหลแบบราบเรียบ เราจะพบว่าบริเวณผนังมีความเค้นเฉือนในแนว u มีค่าเป็น

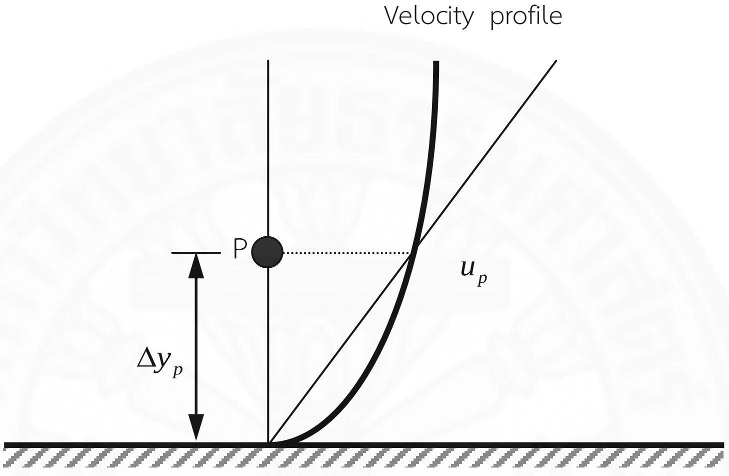
$$\tau_w = \mu \frac{u_p}{\Delta y_p} \tag{3.53}$$

จาก Velocity profile ในรูปที่ 3.4 ถ้าให้ค่า u_p คือค่าความเร็วที่ Node ซึ่งเป็นการประมาณค่าที่พิจารณาบริเวณใกล้ผิว และให้ค่าความเร็วมีการเปลี่ยนแปลงเป็นความสัมพันธ์เส้นตรงเมื่อเทียบกับระยะทาง จะได้แรงเฉือนมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} F_S &= -\tau_w A_{\text{cell}} \\ &= -\mu \frac{u_p}{\Delta y_p} A_{\text{cell}} \end{aligned} \tag{3.54}$$

โดยที่ A_{cell} คือพื้นที่ผนังของปริมาตรควบคุม ดังนั้นสามารถใส่เทอมของแรงเฉือนนี้เข้าไปใน Source term ของ *u* และสามารถเขียน Source term นี้ได้เป็น

$$S_P = -\frac{\mu}{\Delta y_p} A_{\text{cell}} \tag{3.55}$$



รูปที่ 3.4 การกระจายตัวของความเร็วที่ผนัง

เงื่อนไขขอบที่ผนังสำหรับการไหลแบบปั่นป่วน กำหนดให้ความเร็ว *u* และ *v* มีค่าเท่ากับศูนย์ แต่เนื่องจากบริเวณใกล้ผนังนั้นจะมีผลจาก Thin shear layer อยู่ ดังนั้น จึงต้องใช้Wall function ควบคู่ไปกับแบบจำลองความปั่นป่วน Standard k-ε (Frank, 1991) ในการประมาณค่าความเร็วบริเวณผนังโดยใช้ Wall function นั้นมีข้อสมมติฐานดังนี้

(1) ค่า Shear stress ของของไหลที่บริเวณใกล้ผนังมีค่าเท่ากับ Shear stress ที่ผนัง

(2) ค่าการนำและค่าการพาที่บริเวณใกล้ผนังถือว่าน้อยมากทำให้ Production term ของ k มีค่าเท่ากับ Dissipation term (หรือเรียก อย่างหนึ่งว่ามีสภาพของ Local equilibrium)

ตัวแปรไร้มิติ y^+ ที่ใช้แทนการวัดระยะใน Thin shear layer แสดงได้ดังนี้

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y_p}{\mu}$$

โดยที่ y_p คือ ระยะที่วัดจากผนังและ u_τ ถูกกำหนดจาก

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \tag{3.56}$$

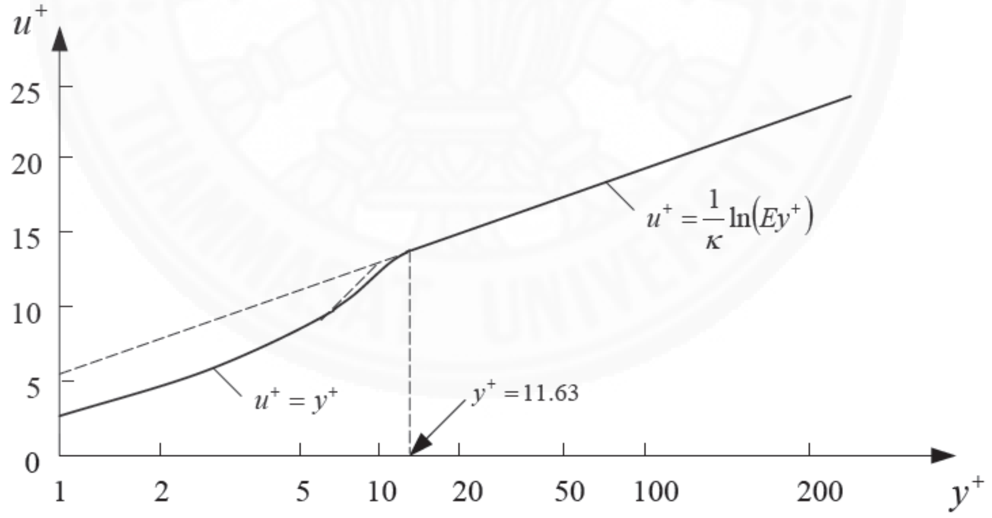
เมื่อ τ_w คือ ค่า Wall shear stress โดยในบริเวณชั้นขอบบางถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ

1) เมื่อ $0 < y^+ < 11.63$ บริเวณชั้นขอบบางถูกพิจารณาเป็น Laminar sublayer ซึ่ง Molecular diffusion มีอิทธิพลสูง ($\mu \gg \mu_t$)

2) เมื่อ $11.63 < y^+ < 300$ บริเวณชั้นขอบบางถูกพิจารณาเป็น Turbulent sub-layer ซึ่ง Turbulent diffusion มีอิทธิพลสูง ($\mu_t \gg \mu$) และจะใช้ Wall function ในการคำนวณ (รูปที่ 3.5)

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปลี่ยนจากการไหลแบบราบเรียบไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วนในบริเวณใกล้ผนังของ Buffer layer คือระหว่างช่วง Laminar sub-layer และช่วง Log-law layer ของ Turbulent region จะใช้ค่า y^+ = 11.63 ซึ่งเป็นค่าที่จุดต่อของทั้งสองช่วงนี้เป็นเกณฑ์ ซึ่งใน Log-law layer สามารถหาค่า u^+ ได้จาก

$$u^+ = \frac{1}{k}\ln\left(Ey^+\right) \tag{3.57}$$



รูปที่ 3.5 Turbulent boundary layer

เมื่อ k คือ Von Karman constant มีค่าเท่ากับ 0.4

E คือ ค่าความขรุขระของผิว สำหรับผนังผิวเรียบ (Smooth wall) มีค่าเท่ากับ 9.8

สำหรับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมที่บริเวณใกล้ผนังนั้นสามารถหาค่าแรงที่ผนัง (F_{wall}) ได้จาก

$$F_{wall} = \frac{\rho C_{\mu}^{\frac{1}{4}} k_p^{\frac{1}{2}} u_p}{u^+} A_{cell} \tag{3.58}$$

เมื่อ A_{cell} คือ พื้นที่ของ Cell

โดยที่บริเวณใกล้ผนังด้านล่างนั้นจะกำหนดให้ $a_s = 0$ ในสมการดิสครีไทซ์และจะให้แรงที่ผนัง (F_{wall}) เป็น Source term ในสมการของความเร็ว u โดยที่

$$S_u = 0 \qquad (3.59ก)$$

$$S_p = -\frac{\rho C_{\mu}^{\frac{1}{4}} k_p^{\frac{1}{2}} u_p}{u^+} A_{cell} \qquad (3.59ข)$$

สำหรับสมการ Turbulent kinetic energy ที่บริเวณใกล้ผนังด้านล่างนั้นจะกำหนดให้ $a_s = 0$ ในสมการดีสครีไทซ์และสามารถหาค่า Source term ได้จาก

$$S = \frac{\tau_w u_p}{\Delta y_p} \Delta V - \frac{\rho C_{\mu}^{\frac{3}{4}} k_p^{\frac{3}{2}} u^+}{\Delta y_p} \Delta V \tag{3.60}$$

โดยที่

$$S_u = \frac{\tau_w u_p}{\Delta y_p} \Delta V \qquad (3.61ก)$$

$$S_p = -\frac{\rho C_{\mu}^{\frac{3}{4}} k_p^{\frac{3}{2}} u^+}{\Delta y_p} \Delta V \qquad (3.61ข)$$

และค่า ε ที่บริเวณใกล้ผนังสำหรับสมการ Dissipation rate หาได้จาก

$$S = \frac{C_{\mu}^{\frac{3}{4}} k_p^{\frac{3}{2}}}{K \Delta y_p} \tag{3.62}$$

เพื่อเป็นการกำหนดค่า ε ในบริเวณนี้ให้มีค่าเท่ากับค่า ε_p ในสมการ (3.62) จึง

ต้องทำการกำหนดค่า Source term ดังนี้

$$S_u = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k_p^{\frac{3}{2}}}{K \Delta y_p} \times 10^{30} \quad (3.63ก)$$

$$S_p = -10^{30} \quad (3.63ข)$$

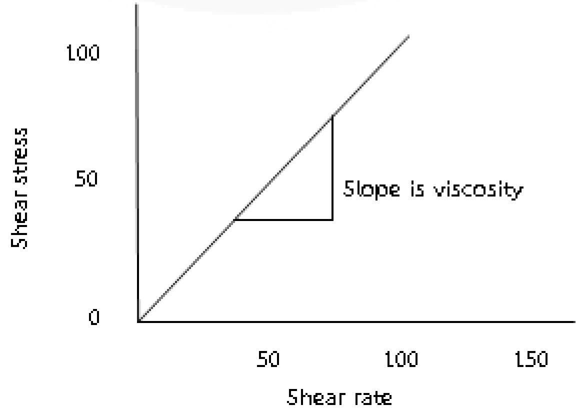
3.1.7 ของไหลแบบนิวโตเนี่ยน

ของไหลแบบนิวโตเนี่ยน (Newtonian) เป็นของไหลที่มีค่าความเค้นเฉียน (shear stress) แปรผันโดยตรงกับอัตราการเฉียน (shear rate) ดังรูปที่ 3.6 หรือเส้นกราฟมีค่าคงความชันคงที่ ซึ่งค่าความชันดังกล่าวได้แก่ค่าความหนืดของของไหลนั้นเอง ซึ่งของไหลที่มีพฤติกรรมแบบนิวโตเนี่ยนได้แก่ น้ำ อากาศ แอทานอน รวมถึงแก๊สทุกชนิด และของไหลในสถานะของเหลวที่มีมวลโมเลกุลต่ำ โดยสมการที่ใช้ทดแทนพฤติกรรมของไหลแบบนิวโตเนี่ยน (Bird et al., 1987) ได้แก่

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \quad (3.64)$$

โดย μ คือ ความหนืด

$\dot{\gamma}$ คือ อัตราการเฉือน



รูปที่ 3.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนกับอัตราการเฉือนของของไหลแบบนิวโตเนี่ยน

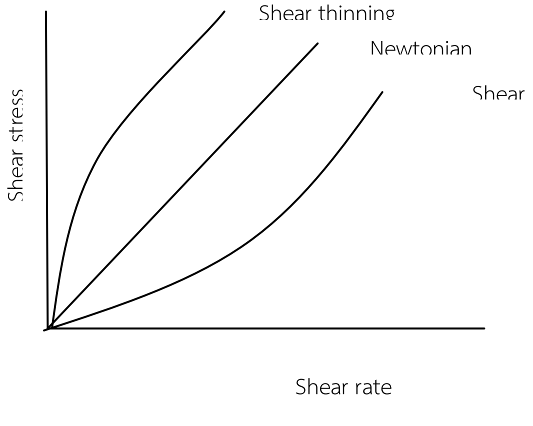
แม้ว่าแก๊ส อากาศ น้ำ จะเป็นของไหลแบบนิวโตเนี่ยนที่พบโดยทั่วไป แต่ของไหลอื่นๆ เช่น เลือด โพลิเมอร์ สี และอาหารกลับมีพฤติกรรมการไหลที่แตกต่างออกไป เนื่องจากเป็นของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยน (Non-Newtonian)

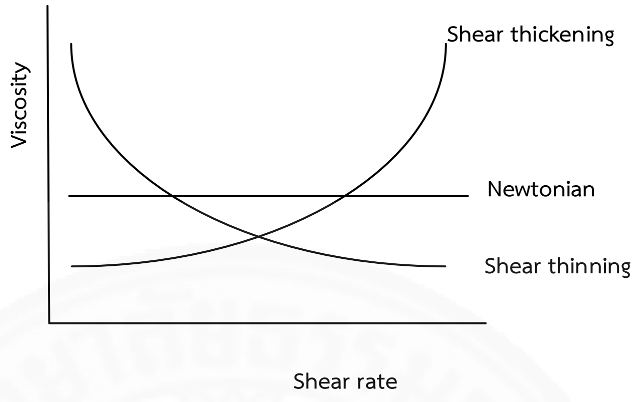
3.1.8 ของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยน

ของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนเป็นของไหลที่มีค่าความหนืดไม่คงที่ โดยค่าความหนืดจะเปลี่ยนแปลงไปตามระยะเวลาหรืออัตราการเฉือน ซึ่งแตกต่างไปจากของไหลแบบนิวโตเนี่ยนที่มีค่าความหนืดคงที่ การศึกษาคุณสมบัติของของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนจึงมีความยุ่งยากและซับซ้อนมากกว่าของไหลแบบนิวโตเนี่ยน

3.1.8.1 ของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนโดยทั่วไป

โดยทั่วไปของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนจะมีค่าความชันของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉียนและอัตราการเฉือน ไม่คงที่ เมื่อความหนืดมีค่าลดลง ในขณะที่อัตราการเฉือนเพิ่มขึ้น จะเรียกของไหลที่มีพฤติกรรมแบบนี้ว่า Shear-thinning ในกรณีตรงกันข้าม หากค่าความหนืดเพิ่มขึ้นและอัตราการเฉือนเพิ่มขึ้นด้วยนั้น จะเรียกของไหลที่มีพฤติกรรมแบบนี้ว่า Shear-thickening (รูปที่ 3.7) แต่อย่างไรก็ตาม ของไหลบางชนิดไม่สามารถทดแทนพฤติกรรมการไหลด้วย 2 รูปแบบที่กล่าวข้างต้นดังนั้นจึงได้มีการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดและอัตราการเฉือนหลากหลายรูปแบบดังต่อไปนี้





รูปที่ 3.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและความหนืดกับอัตราการเฉือนของของไหลแบบนิวโตเนี่ยนและนอนนิวโตเนี่ยน

(1) Power-law model

Power-law model เป็นหนึ่งในรูปแบบการไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนแบบแรกๆ ที่เกิดขึ้นและถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลาย โดยเขียนได้ดังนี้ (Middleman, 1968; Bird et al., 1987)

$$\tau = m\dot{\gamma}^{n} \tag{3.65}$$

โดยที่ m คือ ค่าคงที่ของ Power law model ที่แสดงถึงค่าความหนืดของของไหล

n คือ ค่าคงที่ของ Power law model ที่แสดงถึงระดับขั้นพฤติกรรมนอนนิวโตเนี่ยนของของไหล

ในขณะที่ความหนืดของของไหลแบบ Power law model สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \tag{3.66}$$

โดยที่ η คือ ค่าความหนืดปรากฏของของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยน

เป็นที่ทราบกันดีว่า Power law model ไม่สามารถทดแทนพฤติกรรมของไหลที่มี Yield stress ได้ นอกจากนี้ถ้าหากค่า $n<1$ ก็จะทดแทนพฤติกรรมของไหลแบบ Shear thinning ที่ความหนืดมีค่าลดลงเมื่ออัตราการเฉือนเพิ่มขึ้น โดยหาก $n>1$ ก็จะทดแทนพฤติกรรมของไหลแบบ Shear thickening ที่เมื่ออัตราการเฉือนเพิ่มขึ้นแล้วค่าความหนืดเพิ่มขึ้นด้วย ในขณะที่หากค่า $n=1$ ของไหลดังกล่าวจะเป็นของไหลแบบนิวโตเนี่ยนที่มีค่าความหนืดคงที่ ดังรูปที่ 3.7

อย่างไรก็ตาม Power law model ยังคงมีข้อจำกัดในการทดแทนพฤติกรรมของของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนในช่วง อัตราเฉือนมีค่าต่ำและอัตราเฉือนที่มีค่าสูง เนื่องจากหาก $n<1$ จะทำให้ค่าความหนืดปรากฏของของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนมีค่าเข้าสู่ ∞ในกรณีที่อัตราเฉือนมีค่าน้อย ซึ่งผลจากการทดลองของของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยน โดยส่วนใหญ่จะพบว่าอัตราเฉือนที่มีค่าต่ำและอัตราเฉือนที่มีค่าสูง จะมีค่าความหนืดคงที่

(2) Cross model

จากปัญหาที่กล่าวก่อนหน้านี้คือช่วงอัตราเฉือนที่มีค่าต่ำและอัตราเฉือนที่มีค่าสูง Power law ไม่สามารถทดแทนค่าความหนืดในช่วงดังกล่าวได้ ในขณะที่ของไหลที่มีพฤติกรรมแบบนอนนิวโตเนี่ยนส่วนใหญ่กลับมีค่าความหนืดคงที่ในช่วงดังกล่าว จึงมีการพัฒนาโมเดลที่สามารถทดแทนพฤติกรรมของของไหลแบบ Shear-thinning ที่มีค่าค่าความหนืดคงที่ในช่วงอัตราเฉือนต่ำและและอัตราเฉือนสูงได้ ซึ่งนำเสนอโดย Cross (1965) สามารถเขียนเป็นสมการด้านล่าง

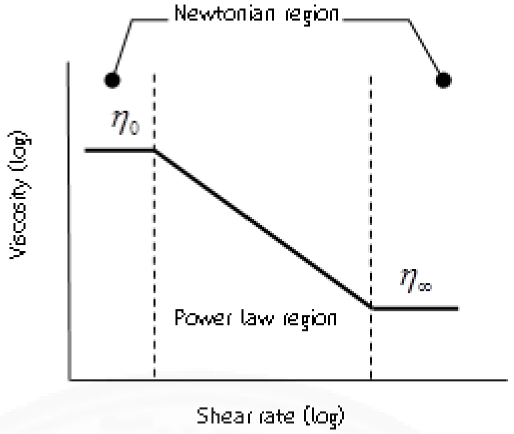
$$\tau = \dot{\gamma}\left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1+m\dot{\gamma}^n}\right) \tag{3.67}$$

โดยที่ η_0 คือ ค่าความหนืดของของไหลที่อัตราเฉือนเท่ากับศูนย์

η_∞ คือ ค่าความหนืดของของไหลที่อัตราเฉือนเข้าสู่ระยะอนันต์

m และ n คือ ค่าคงที่

ในช่วงกลางของอัตราการเฉือน Cross model จะมีพฤติกรรมแบบ Power law model และจะมีค่าความหนืดคงที่หรือพฤติกรรมแบบของไหลนิวโตเนี่ยน ในช่วงอัตราเฉือนต่ำและอัตราเฉือนสูง ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดกับอัตราการเฉือนของ Cross model

3.1.8.2 ของไหลแบบวิสโคพลาสติก (Viscoplastic fluid)

วิสโคพลาสติกเป็นของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนรูปแบบหนึ่ง โดยหากมีความเค้นเฉียนมากระทำในปริมาณที่น้อยกว่าความเค้นที่จุดคราก (yield stress) ของของไหล แล้วของไหลจะไม่มีการเคลื่อนที่ ยกตัวอย่างเช่น ยาสีฟัน หากเราออกแรงบีบไม่มากพอก็จะทำให้ยาสีฟันไม่ไหลออกมา เนื่องจากไม่สามารถออกแรงจนมีค่ามากกว่าความเค้นที่จุดครากของยาสีฟัน ที่เป็นเช่นนี้เพราะวิสโคพลาสติกจะมีพฤติกรรมคล้ายกับของแข็งในช่วงที่ความเค้นที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยกว่าค่าความเค้นที่จุดครากของของไหลนั้นเอง โดยเมื่อเพิ่มความเค้นเฉือนจนกระทั้งมากกว่าความเค้นที่จุดครากของของไหลแล้ว ของไหลดังกล่าวก็จะมีพฤติกรรมเช่นของไหลทั่วไป ซึ่งตัวอย่างของไหลที่มีพฤติกรรมแบบวิสโคพลาสติกได้แก่ เลือด น้ำมันหล่อลื่นบางชนิด ยาสีฟัน โคลน จาระบีและมายองเนส เป็นต้น

(1) Bingham plastic model

รูปแบบอย่างง่ายของวิโคพลาสติกที่ใช้กันโดยทั่วไปคือ Bingham plastic model นำเสนอโดย Bird et al., (1987) ดังสมการด้านล่าง

$$\tau = m_B\dot{\gamma} + \tau_y \qquad \text{เมื่อ } \tau \geq \tau_y \tag{3.68}$$

$$\dot{\gamma} = 0 \qquad \text{เมื่อ } \tau \leq \tau_y \tag{3.69}$$

โดยที่ τ_y คือ ความเค้นที่จุดครากของของไหล

m_B คือ ค่าคงที่ของ Bingham plastic model

Bingham plastic model สามารถทดแทนพฤติกรรมของของไหลที่มีความเค้นที่จุดครากในการเริ่มเคลื่อนที่ดังรูปที่ 3.9 แต่ไม่สามารถทดแทนพฤติกรรม Shear tinning ของของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนได้

(2) Casson Model

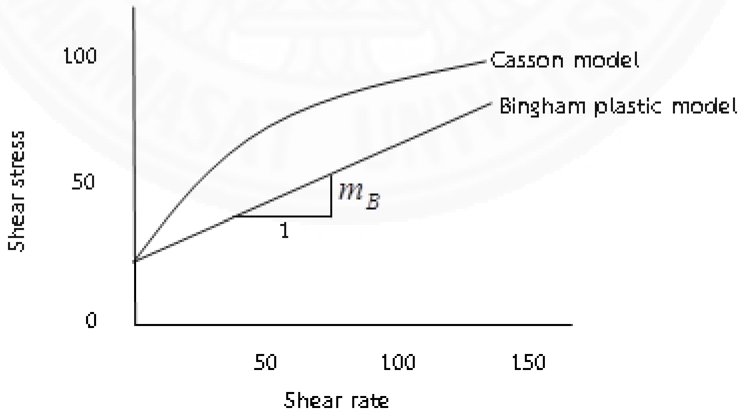
Casson model ถูกพัฒาขึ้นเพื่อใช้แทนพฤติกรรมการไหลของสีน้ำมัน โดย Casson (1959) ซึ่งมีพื้นฐานจากความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมที่เป็นของแข็งและของไหล แล้วมีการพัฒนาสมการต่อมาโดย Bird et al., (1987) โดยสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ดังสมการด้านล่าง

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + \sqrt{k}\sqrt{\dot{\gamma}} \quad \text{เมื่อ } \tau \geq \tau_y \qquad (3.70)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{เมื่อ } \tau \leq \tau_y \qquad (3.71)$$

โดยที่ k คือ ค่าคงที่ของ Casson model

Casson model สามารถทดแทนพฤติกรรมการไหลในช่วงเริ่มต้นที่มีความเค้นที่จุดครากและมีการไหลไปแล้วในรูปแบบ Shear thinning (ดังรูปที่ 3.9) ซึ่งสามารถนำไปใช้กับเลือดหรืออาหารที่มีลักษณะแบบวิสโคพลาสติก



รูปที่ 3.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับอัตราการเฉือนของ Bingham plastic model กับ Casson model

(3) Carreau model

Carreau model เป็นความสัมพันธ์ที่มี 4 ตัวแปรซึ่งสามารถทดแทนพฤติกรรมแบบนิวโตเนี่ยนทั้งในช่วงอัตราเฉือนต่ำและอัตราเฉือนสูง โดยสามารถเขียนเป็นสมการ Carreau (1968) ได้ดังนี้

$$\frac{\eta(\dot{\gamma})-\eta_\infty}{\eta_0-\eta_\infty}=\frac{1}{\left[1+(\lambda\dot{\gamma})^2\right]^{(1-n)/2}} \tag{3.72}$$

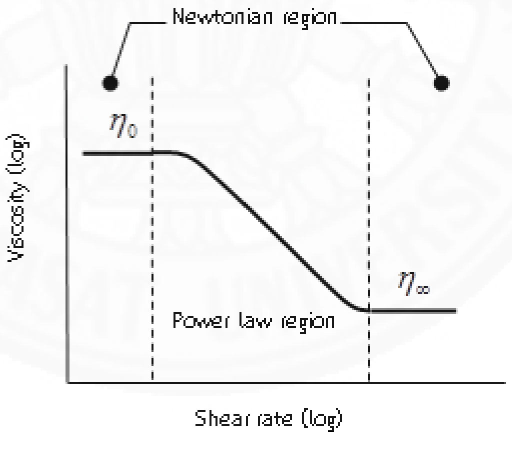
โดยที่ η_0 คือ ค่าความหนืดของของไหลที่อัตราเฉือนเท่ากับศูนย์

η_∞ คือ ค่าความหนืดของของไหลที่อัตราเฉือนเข้าสู่ระยะอนันต์

λ คือ ค่าคงที่ของเวลา

n คือ Power law index

โดยเมื่อค่า $n<1$ ของไหลจะมีพฤติกรรมแบบ Shear thinning ซึ่งสามารถนำไปใช้กับ เลือด หรืออาหารที่มีลักษณะแบบวิสโคพลาสติก



รูปที่ 3.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับอัตราการเฉือนของ Carreau model

(4) Carreau Yasuda model

จากรูปแบบของไหลแบบนอนนิวโตเนี่ยนที่กล่าวมาก่อนหน้านี้พบว่าไม่สามารถทดแทนพฤติกรรมของเลือดได้ดีนัก แม้ Cassan model ที่มีการใช้งานก่อนหน้านี้ Yaleswarapu (1996) ก็พบว่าสมการต้องการความเค้นที่จุดครากของของไหล รวมทั้งมีความถูกต้องในช่วงอัตราการ

เฉือนในช่วงสั้นๆเท่านั้น จากนั้นจึงมีการทดลองหาค่าความหนืดของเลือดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆ แล้วสร้างสมการความสัมพันธ์ โดยพบว่า Carreau Yasuda model สามารถสร้างเส้นกราฟสอดคล้องกับผลการทดลองมากที่สุด Andrew and Dhruv (2002) ดังรูปที่ 3.11 โดยสมการ Carreau Yasuda model สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_\infty - \eta_0)\left[1 + (\lambda \times \dot{\gamma})^a\right]^{(n-1)/a} \tag{3.73}$$

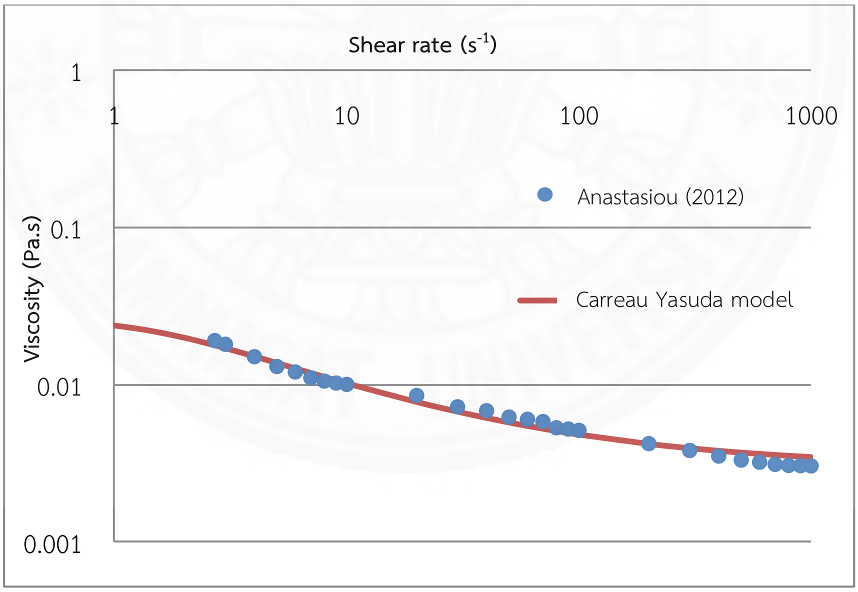
โดยที่ η_0 คือ ค่าความหนืดของของไหลที่อัตราเฉือนเท่ากับศูนย์

η_∞ คือ ค่าความหนืดของของไหลที่อัตราเฉือนเข้าสู่ระยะอนันต์

λ คือ ค่าคงที่ของเวลา

a คือ Yasuda exponent

n คือ Power law index



รูปที่ 3.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดกับอัตราการเฉือนของ Carreau Yasuda model (Yotsakorn (2013))

3.2 ของแข็ง

ในส่วนของแข็งจะอธิบายเกี่ยวกับคุณสมบัติทางกลของวัสดุ วิธีการหาค่าความเค้น และความเครียด คุณสมบัติของวัสดุประเภทไฮเปอร์อิลาสติกที่มีความเหมาะสมสำหรับใช้ทดแทนพฤติกรรมของหลอดเลือด รวมทั้งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาของแข็งด้วย

3.2.1 คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ อาทิเช่น ความแข็งแรง (Strength) ความเหนียว (Ductility) ความแข็ง (Hardness) และอื่นๆ ซึ่งเป็นสิ่งที่จะบ่งบอกว่าวัสดุนั้น ๆ มีความสามารถที่จะรับแรง หรือพลังงานเชิงกลภายนอกได้ดีมากน้อยเพียงใด โดยในงานวิศวกรรมคุณสมบัติเชิงกลมีความสำคัญมาก การออกแบบอุปกรณ์ที่ต้องรับภาระแรงกระทำให้สามารถทำงานได้อย่างปลอดภัยนั้น ก็ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่ใช้ทำอุปกรณ์นั้น ๆ เป็นสำคัญ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้ขั้นต้นของคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ

(1) ความเค้น

ความเค้นคือ แรงต้านทานภายในที่มีต่อแรงภายนอกที่มากระทำของเนื้อวัสดุ ในหนึ่งหน่วยพื้นที่ แต่เนื่องจากการวัดค่าความเค้นภายใน จึงมักกล่าวถึงความเค้นในรูปของแรงภายนอกที่มากระทำในหนึ่งหน่วยพื้นที่ จากสมมุติฐานว่าแรงกระทำภายนอกมีความสมดุลกับแรงต้านทานภายใน การหาค่าความเค้นสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้คือ

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{3.74}$$

โดยที่ σ คือ ความเค้น (Stress) มีหน่วยเป็นปาสกาล (Pa, 1 Pa = 1N/m^2) หรือ kgf/mm^2 หรือ psi (lbf/in^2)

F คือ แรงภายนอกที่มากระทำ มีหน่วยเป็น N หรือ kgf หรือ lbf

A คือ พื้นที่ภาคตัดขวางที่แรงกระทำ: m^2 หรือ mm^2 หรือ in^2

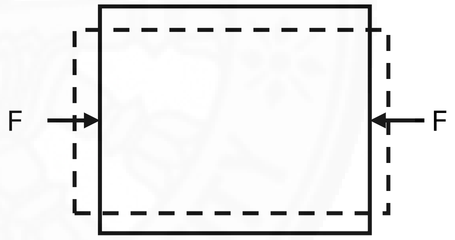
โดยทั่วไปความเค้นสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ชนิด ตามลักษณะของแรงกระทำ

1. ความเค้นแรงดึง (Tensile stress) คือความเค้นที่เกิดจากแรงดึงมากระทำตั้งฉากกับพื้นที่ภาคตัดขวาง เพื่อดึงวัสดุออกจากกัน ดังรูปที่ 3.12ก

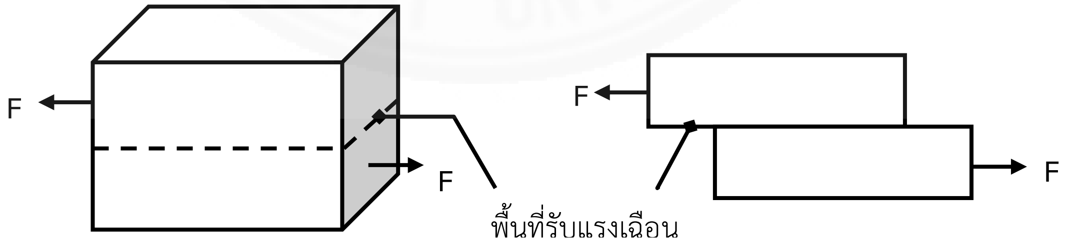
2. ความเค้นแรงอัด (Compressive stress) คือ ลักษณะของแรงกดมากระทำตั้งฉากกับพื้นที่ภาคตัดขวาง เพื่อพยายามอัดให้วัสดุมีขนาดสั้นลง ดังรูปที่ 3.12ข

3. ความเค้นแรงเฉือน (Shear stress) ใช้สัญลักษณ์ τ เกิดขึ้นเมื่อมีแรงมากระทำให้ทิศทางขนานกับพื้นที่ภาคตัดขวาง ดังรูปที่ 3.12ค มีค่าเท่ากับแรงเฉือน (Shear force) หารด้วยพื้นที่ภาคตัดขวาง A โดยมีทิศทางขนานกับแรงเฉือน

(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 3.12 ลักษณะของแรงกระทำชนิดต่าง ๆ

(ก) แรงดึง (Tension)

(ข) แรงกด (Compression)

(ค) แรงเฉือน (Shear)

ในทางปฏิบัติความเค้นที่เกิดขึ้นอาจจะมีทั้ง 3 แบบพร้อมกันได้

(2) ความเครียดและการเสียรูป

ความเครียด (Strain) คือ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุ (Deformation) ขณะที่มีแรงภายนอกมากระทำ (เกิดความเค้น) การเสียรูปของวัสดุเป็นผลมาจากการเคลื่อนที่ภายในเนื้อวัสดุ ซึ่งสามารถแบ่งเป็น 2 รูปแบบ คือ

1. การเสียรูปแบบอิลาสติกหรือความเครียดแบบคืนรูป (Elastic deformation or Elastic Strain) คือการเสียรูปเมื่อปลดแรงกระทำ อะตอมซึ่งเคลื่อนไหวเนื่องจากผลของความเค้นจะเคลื่อนกลับเข้าตำแหน่งเดิม ทำให้วัสดุคงรูปร่างเดิม ยกตัวอย่างเช่น สปริง พวกยางยืด ถ้าออกแรงดึงแล้วปล่อย จะกลับไปมีขนาดเท่าเดิม

2. การเสียรูปแบบพลาสติกหรือความเครียดแบบคงรูป (Plastic deformation or plastic strain) คือการเสียรูปเมื่อปลดแรงกระทำแล้ว วัสดุก็ยังคงรูปร่างตามที่เปลี่ยนไป โดยอะตอมซึ่งเคลื่อนที่ไปแล้วจะไม่กลับไปตำแหน่งเดิม

วัสดุทุกชนิดจะมีพฤติกรรมการเสียรูปทั้งสองรูปแบบนี้ขึ้นอยู่กับแรงที่มากระทำ ถ้าไม่เกินพิกัดการคืนรูป (Elastic limit) วัสดุนั้นก็จะมีพฤติกรรมคืนรูปแบบอิลาสติก (Elastic behavior) แต่ถ้าความเค้นเกินกว่าพิกัดการคืนรูปแล้ววัสดุก็ จะเปลี่ยนรูปแบบถาวรหรือแบบพลาสติก (Plastic deformation)

นอกจากความเครียดทั้ง 2 ที่กล่าวมาแล้ว ยังมีความเครียดอีกประเภทหนึ่ง ซึ่งพบในวัสดุประเภทโพลีเมอร์ เช่น พลาสติก เรียกว่าความเครียดกึ่งอิลาสติกจะมีลักษณะที่เมื่อปราศจากแรงกระทำต่อวัสดุ จะมีการคืนรูปแต่มีรูปร่างไม่เหมือนเดิม

การวัดและคำนวณหาค่าความเครียดมีอยู่ 2 ลักษณะคือ

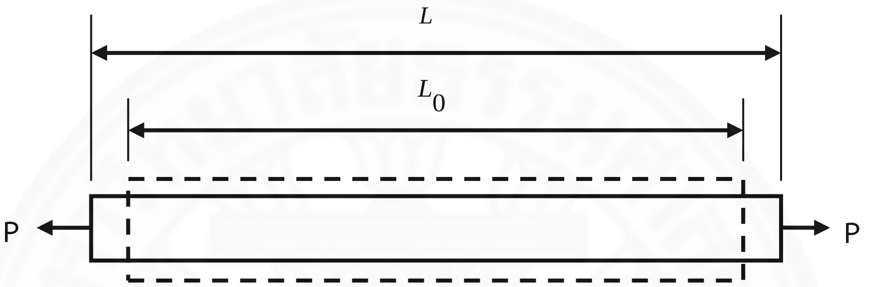
1. แบบเส้นตรง ซึ่งเรียกว่า ความเครียดเชิงเส้น (Linear strain) จะใช้ได้เมื่อแรงที่มากระทำมีลักษณะเป็นแรงดึงหรือแรงกด ดังภาพที่ 3.13 ค่าของความเครียดมีค่าเท่ากับความยาวที่เปลี่ยนไปต่อความยาวเดิม ดังสมการ

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} \tag{3.75}$$

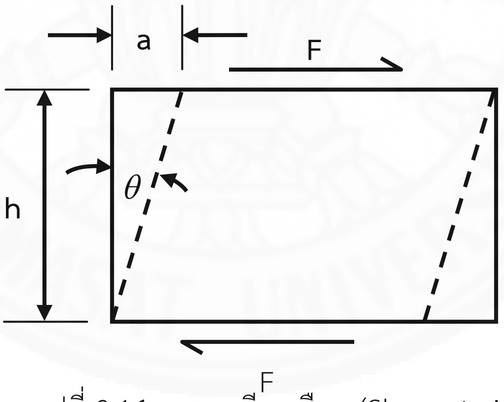
โดยที่ e คือ ความเครียดเชิงเส้น

ΔL คือ ความยาวที่เปลี่ยนไป $(L - L_0)$

L_0 คือ ความยาวเดิมของวัสดุที่สนใจ หรือ Gage length



รูปที่ 3.13 ความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain)



รูปที่ 3.14 ความเครียดเฉือน (Shear strain)

2. แบบเฉือน เรียกว่า ความเครียดเฉือน (Shear strain) ใช้กับกรณีที่มีแรงกระทำในลักษณะเฉือน ดังรูปที่ 3.14 โดยค่าของความเครียดจะเท่ากับระยะเคลื่อนที่ต่อระยะห่างระหว่างระนาบ ดังสมการ

$$\gamma = \frac{a}{h} \tag{3.76}$$

โดยที่ γ คือ $\tan\,\theta \approx \theta$

a คือ ระยะเคลื่อนที่ (Displacement)

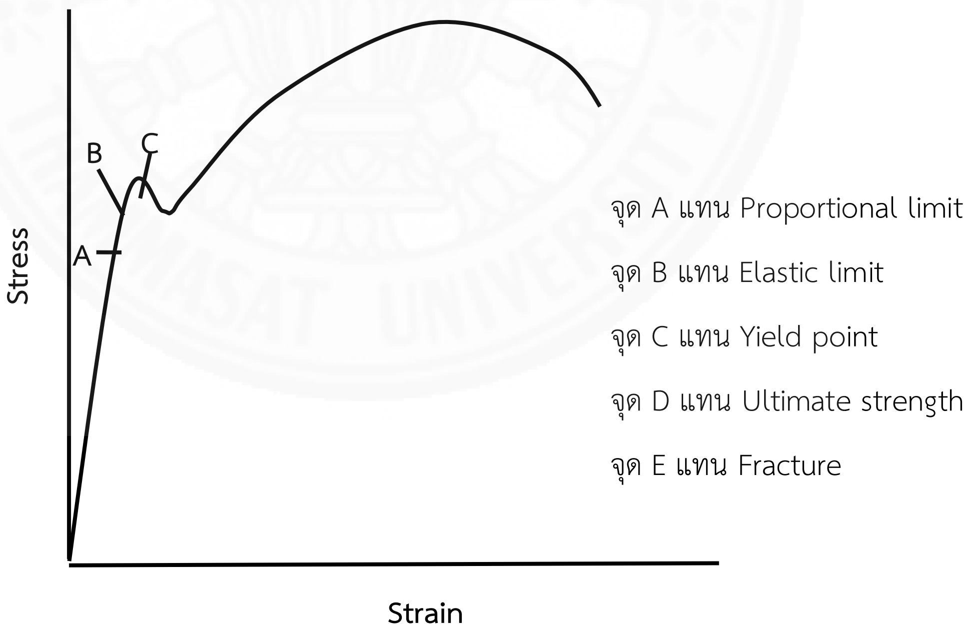
h คือ ระยะห่างระหว่างระนาบ

θ คือ มุมที่เปลี่ยนไป

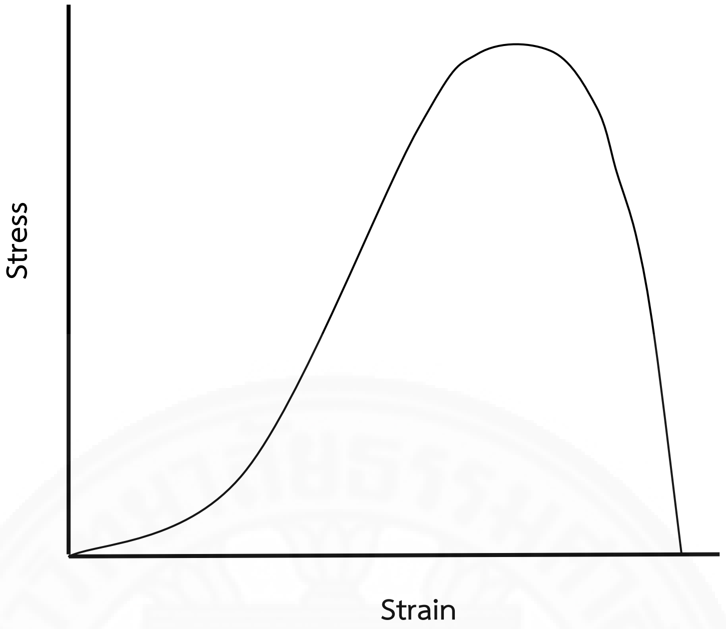
โดยค่าของความเครียดทั้งสองแบบจะเป็นแบบไร้หน่วย เพราะตัวตั้งและตัวหารมีหน่วยเป็นความยาวเหมือนกัน

(3) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด มีลักษณะเป็นเส้นโค้งความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain curve) หาได้จากการทดสอบแรงดึง (Tensile test) โดยมีแกนตั้งคือค่าของความเค้นและแกนนอนคือความเครียด ดังรูป 2.4 จากการทดสอบแรงดึง ซึ่งนอกจากได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดแล้ว ยังจะแสดงถึงความสามารถในการรับแรงดึงของวัสดุและบางครั้งอาจใช้บอกความสามารถในการขึ้นรูปของวัสดุ (Formability) ได้อีกด้วย



รูปที่ 3.15 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain Curve) แบบมีจุดคราก (Yield point)



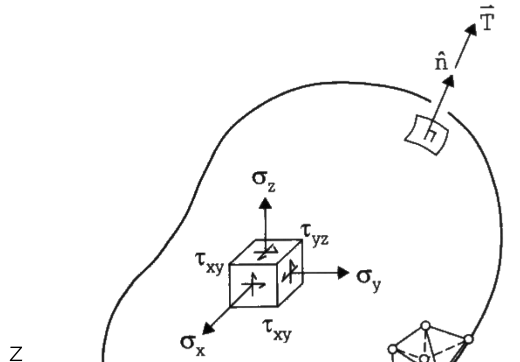
รูปที่ 3.16 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด (Stress-Strain Curve)
สำหรับวัสดุประเภทเนื้อเยื่อนุ่ม (Soft tissue)

จากรูปที่ 3.16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดของวัสดุประเภทเนื้อเยื่อนุ่มหรือหลอดเลือดแดง ซึ่งสามารถหาได้จากการทดลอง โดยมีผู้ทดสอบและเลือกรูปแบบของแบบจำลองที่เหมาะสม Bathe (1996), Huang and et al., (2001) และ Tang (2004)

3.2.2 สมการไฟไนเอลิเมนต์

ความสมดุลของของแข็งที่มีการยืดหยุ่นได้ในสามมิติดังรูปที่ 3.17 สามารถเขียนอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ดังสมการนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{3.77}$$



รูปที่ 3.17 ความสมดุลตามตำแหน่งใดๆ ในของแข็งสามมิติ

โดย $\sigma_x \, \sigma_y \, \sigma_z$ แทนค่าความเค้นฉาก (Nornal stress) ในแนวแกน x y z ตามลำดับ และ τ_{xy} τ_{xz} τ_{yz} แทนค่าความเค้นเฉือน (Shearing stress)

บางส่วนบนผิวรอบนอกของวัตถุทรงตันนี้ประกอบไปด้วย เงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันไป เช่น ผิวบางส่วนอาจมีการกำหนดระยะเคลื่อนตัว ในขณะที่ผิวส่วนอื่นๆ สามารถกำหนดเงื่อนไขของความเค้นผิว (surface traction) โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ ดังนี้

$$\vec{T} = T_x\hat{i} + T_y\hat{i} + T_z\hat{k} \qquad (3.78)$$

โดย T_x T_y T_z แทนค่าความเค้นที่ผิวในทิศแกน x y z โดยค่าความเค้นที่ผิวเหล่านี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าความเค้นฉากและความเค้นเฉือนได้ ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \qquad (3.79)$$

และ n_x n_y n_z คือ ทิศทางโคไซน์ (Direction cosine) ของเวกเตอร์

$$\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{i} + n_z\hat{k} \qquad (3.80)$$

เป็นเวกเตอร์หน่วย (Unit vector) ที่ตั้งฉากกับผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นค่าของความเค้นย่อย (Stress components) ต่าง ๆ ในสมการ (3.79) มีความสัมพันธ์กับค่าของความเครียดย่อย (Stress components) ดังนี้

$$\underset{(6\times1)}{\{\sigma\}} = \underset{(6\times6)}{[C]}\underset{(6\times1)}{\{\varepsilon\}} \tag{3.81}$$

เวกเตอร์ในสมการ (3.81) นี้ประกอบด้วย

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3.82}$$

โดย ε_x ε_y ε_z คือ ค่าความเครียดฉาก (Normal strain) ในแนวแกน x y z ตามลำดับ

τ_{xy} τ_{yz} τ_{xz} คือ ค่าความเครียดเฉือน (Shearing strain)

เมทริกซ์ $[C]$ แทนเมทริกซ์ความยืดหยุ่นขอววัสดุ (Material elasticity matrix) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$[C] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2v)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v)/2 \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

โดย E คือ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (Modulus of elasticity)

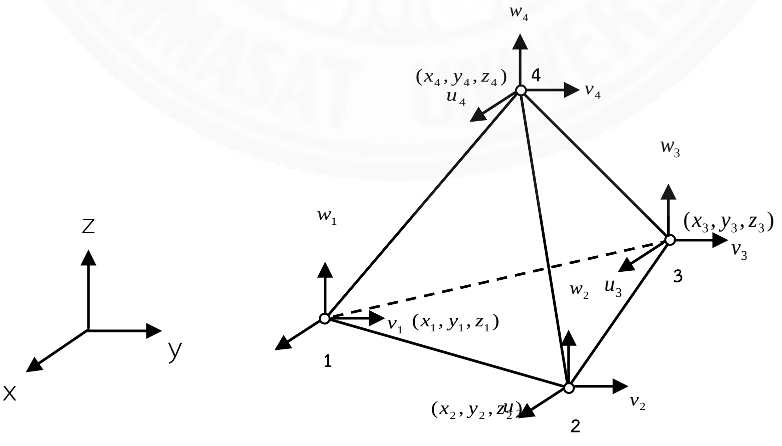
ν คือ ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซอง (Poisson’s ratio)

ซึ่งค่าความเครียดย่อยต่าง ๆ ข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัว u v w ได้ตามทฤษฎีของการเสียรูปน้อย (Small deformation theory) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \;;\; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial x} \;;\; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial x} \;;\; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

จำนวนตัวไม่รู้ค่าสำหรับปัญหาวัตถุทรงตันได้แก่ ค่าของการเสียรูป u v w เท่านั้น เมื่อทราบค่าของการเสียรูปเหล่านี้แล้ว จึงนำไปคำนวณหาค่าของความเครียดย่อยและค่าของความเค้นย่อยตามสมการ (3.84) และ (3.81) ได้ตามลำดับ

จากความเข้าใจข้างต้น ทำให้ทราบว่าแต่ละจุดต่อ (Node) ของรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว คือ ค่าของการเสียรูป u v และ w ในแนวแกน x y และ z ตามลำดับ ภาพที่ 2.9 แสดงเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อ ดังนั้นในแต่ละเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อนี้จะประกอบไปด้วยตัวไม่รู้ค่ารวม 12 ค่า



รูปที่ 3.18 เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อ

ค่าการเคลื่อนตัว u v และ w บนเอลิเมนต์ต่างๆ ถูกกำหนดให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น ยกตัวอย่างเช่น

$$u(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \partial_4 z \tag{3.85}$$

โดย α_i i = 1, 2, 3, 4 เป็นค่าคงที่ ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขที่จุดต่อทั้งสี่ดังนี้

จุดต่อ 1 : $u(x_1,y_1,z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 z_1$ (3.86 ก)

จุดต่อ 2 : $u(x_2,y_2,z_2) = u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 z_2$ (3.86 ข)

จุดต่อ 3 : $u(x_3,y_3,z_3) = u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 z_3$ (3.86 ค)

จุดต่อ 4 : $u(x_4,y_4,z_4) = u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \partial_4 z_4$ (3.86 ง)

สมการ (3.86 ก) ถึง (3.86 ง) สามารถนำมาใช้หาค่าคงที่ α_i i = 1, 2, 3, 4 ได้ จากนั้นจึงเขียนสมการ (3.85) ให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้ คือ

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \mathrm{N}_1 u_1 + \mathrm{N}_2 u_2 + \mathrm{N}_3 u_3 + \mathrm{N}_4 u_3 \\ &= \underset{(1\times4)}{\lfloor \mathrm{N} \rfloor} \underset{(4\times1)}{\{u\}} \end{aligned} \tag{3.87}$$

โดย $\lfloor \mathrm{N} \rfloor$ เรียกว่า เมทริกซ์ของการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation matrix) และ $\{u\}$ แทนเวกเตอร์ของค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ (Vector of nodal u-dispalcement) ในแนวแกน x

รายละเอียดของฟังก์ชันการประมาณภายในของเมทริกซ์ $\lfloor \mathrm{N} \rfloor$ ประกอบด้วย

$$\mathrm{N}_\mathrm{i}(x,y,z) = \mathrm{L}_\mathrm{i}(x,y,z) \qquad \mathrm{i} = 1, 2, 3, 4 \tag{3.88}$$

โดย L_i เรียกว่า โคออร์ดิเนตปริมาณ (Volumn coordinate) ซึ่งมีรายละเอียดคือ

$$\mathrm{L_i} = \frac{1}{6\mathrm{V}}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad \text{i = 1, 2, 3, 4} \tag{3.89}$$

ในที่นี้ V = ปริมาตรของเอลิเมนต์ = $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$ (3.90 ก)

$$\mathrm{a_1} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad ; \quad \mathrm{c_1} = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & y_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}$$

(3.90 ข)

$$\mathrm{b_1} = \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & y_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad ; \quad \mathrm{d_1} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

ส่วนค่าคงที่ตัวอื่น ๆ ได้แก่ $\mathrm{a_i}$ $\mathrm{b_i}$ $\mathrm{c_i}$ $\mathrm{d_i}$ เมื่อ i = 2, 3, 4 สามารถเขียนออกมาได้โดยใช้การวนสลับเปลี่ยนตัวเลข (Cyclic permutation) เช่น

$$\mathrm{a_2} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \text{ เป็นต้น}$$

ดังนั้น ลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u v w ในแนวแกน x y z บนเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อ คือ

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \underset{(1\times4)}{[\mathrm{N}]}\underset{(4\times1)}{\{u\}} \\ v(x, y, z) &= \underset{(1\times4)}{[\mathrm{N}]}\underset{(4\times1)}{\{v\}} \\ w(x, y, z) &= \underset{(1\times4)}{[\mathrm{N}]}\underset{(4\times1)}{\{w\}} \end{aligned} \tag{3.91}$$

โดยเมทริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายใน $\lfloor N \rfloor$ มีรายละเอียดดังในสมการ (3.88) ถึง (3.90)

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อสามารถประดิษฐ์ได้ด้วยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) โดยเริ่มจากการคูณสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.77) ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก ซึ่งในที่นี้คือฟังก์ชันการประมาณภายใน N_i แล้วอินทิเกรตตลอดทั่วทั้งปริมาตรของเอลิเมนต์ จากนั้นจึงกำหนดให้ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\int_V N_i\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)dV &= 0\\
\int_V N_i\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)dV &= 0 \qquad (3.92)\\
\int_V N_i\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{z}}{\partial z}\right)dV &= 0
\end{aligned}$$

โดย V แทนปริมาตรของเอลิเมนต์นั้น ๆ ส่วนฟังก์ชันการประมาณภายใน N_i จะขึ้นอยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ที่ใช้ ยกตัวอย่างเช่น หากเราเลือกใช้เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อแล้ว ฟังก์ชันการประมาณภายใน จะเขียนการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u v และ w ในสมการ (3.91) รวมเข้าด้วยกันคือ

$$\underset{(3\times1)}{\lfloor\bar{\delta}\rfloor} = \underset{(3\times12)}{\lfloor N(x,y,z)\rfloor}\underset{(12\times1)}{\lfloor\bar{\delta}\rfloor} \qquad (3.93)$$

โดย

$$\lfloor\bar{\delta}\rfloor^T = \lfloor u \quad v \quad w\rfloor$$

$$\lfloor\delta\rfloor^T = \lfloor u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4\rfloor \qquad (3.94)$$

ซึ่งหมายถึง เวกเตอร์ของความเครียดย่อยในสมการ (3.84) สามารถเขียนในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ $\lfloor\delta\rfloor$ ได้ดังนี้

$$\underset{(6\times1)}{\{\varepsilon\}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial w/\partial z \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial z + \partial w/\partial y \\ \partial u/\partial z + \partial w/\partial x \end{Bmatrix} = \underset{(6\times12)}{[\mathrm{B}(x,y,z)]} \underset{(12\times1)}{\{\delta\}} \qquad (3.95)$$

โดย $[\mathrm{B}]$ แทนเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดย่อยและการเคลื่อนตัวที่จุดต่อ

จากการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างตามสมการ (3.92) ทำให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ทรงที่หน้าแบบ 4 จุดต่อตังแสดงในรูปที่ 3.18 อันประกอบไปด้วย 12 สมการย่อยซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{(12\times12)}{[\mathrm{K}]} \underset{(12\times1)}{\{\delta\}} = \underset{(12\times1)}{\{\mathrm{F}\}} \qquad (3.96)$$

โดย $[\mathrm{K}]$ แทนเมทริกซ์ของความแข็งแรง (Stiffness matrix) ซึ่งคำนวณได้จาก

$$\underset{(12\times12)}{[K]} = \underset{(12\times6)}{[\mathrm{B}]^{\mathrm{T}}} \underset{(16\times6)}{[\mathrm{C}]} \underset{6\times12}{[\mathrm{B}]}\mathrm{V} \qquad (3.97)$$

โดย $[\mathrm{C}]$ แทนเมทริกซ์ความยืดหยุ่นของวัสดุตามสมการ (3.83)

V แทนปริมาณของเอลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่นั้น

ส่วนเวกเตอร์ $\{\mathrm{F}\}$ ทางด้านขวามือของสมการ (3.96) แทนโหลดเวกเตอร์ (Load vector) ซึ่งอาจเกิดจากแรงดัน (Pressure) ที่กระทำบนผิวภายนอก ยกตัวอย่างเช่น หากด้านซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2-3-4 ในรูปที่ 3.18 เป็นด้านที่ผิวภายนอกของโมเดลซึ่งถูกแรงดันที่มีค่า p_x p_y p_z กระทำในทิศแกน x y z ตามลำดับแล้วเวกเตอร์ $\{\mathrm{F}\}$ ที่เกิดขึ้นคือ

$$\lfloor F \rfloor^T = \frac{A_{2-3-4}}{3} \lfloor 0 \quad 0 \quad 0 \quad p_x \quad p_y \quad p_z \quad p_x \quad p_y \quad p_z \quad p_x \quad p_y \quad p_z \rfloor \quad (3.98)$$

โดย A_{2-3-4} แทนพื้นที่ของด้านซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 2-3-4 เป็นต้น

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.96) พร้อมไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ดังสมการ (3.97) และ (3.98) นี้เองที่นำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และฝังตัวอยู่ในไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ที่ใช้วิเคราะห์ปัญหารูปทรงต้นใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ กันได้ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.91) จะถูกคำนวณสำหรับทุก ๆ เอลิเมนต์ก่อนนำมาประกอบกันเข้าเป็นระบบสมการรวมขนาดใหญ่ จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงบนระบบสมการรวมนี้ แล้วจึงแก้สมการรวมทั้งระบบเพื่อหาค่าของการเคลื่อนตัว u v และ w ในทิศแกน x y z ของทุก ๆ จุดต่อ

เมื่อทราบค่าของการเคลื่อนตัว u v และ w ของทุก ๆ จุดต่อแล้ว จึงคำนวณหาค่าความเครียดย่อยในแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้สมการ (3.91) ก่อนนำไปหาค่าความเค้นย่อยโดยใช้สมการ (3.81) ต่อไป นั่นคือ

$$\underset{(6\times1)}{\{\sigma\}} = \underset{(6\times6)}{[C]}\,\underset{(6\times12)}{[B]}\,\underset{(12\times1)}{\{\delta\}} \quad (3.99)$$

ค่าของความเค้นย่อยทั้ง 6 ค่าที่คำนวณได้ตามสมการ (3.94) ในแต่ละเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าแบบ 4 จุดต่อนี้ ต่างมีค่าคงที่ทั่วทั้งเอลิเมนต์นั้น หลาย ๆ ซอฟต์แวร์จึงทำการเฉลี่ยค่าของความเค้นย่อยเหล่านี้ไปยังตำแหน่งของจุดต่อ ซึ่งห้อมล้อมด้วยหลายเอลิเมนต์ ก่อนแสดงผลลัพธ์ออกมาเป็นระดับสีบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ผลลัพธ์ที่ปรากฏขึ้นดูมีความเป็นจริงมากขึ้น

3.3 ชีวกลศาสตร์ (Biomechanics)

ชีวของแข็งเป็นการศึกษาแรงและผลของแรงที่กระทำต่อเนื้อเยื่อทั้งแบบแข็ง (hard tissue) และอ่อน (soft tissue) ทำให้เกิดการเสียรูปทั้งแบบยืดหยุ่น (elasticity) และเสียรูปถาวร (plasticity) ซึ่งสามารถใช้สมการคณิตศาสตร์วิศวกรรม มาอธิบายพฤติกรรมของกลศาสตร์ของแข็งของเนื้อเยื่อแข็งและอ่อน รวมทั้งพฤติกรรมการเสียรูปทั้งแบบยืดหยุ่นและเสียรูปถาวรได้ หาก

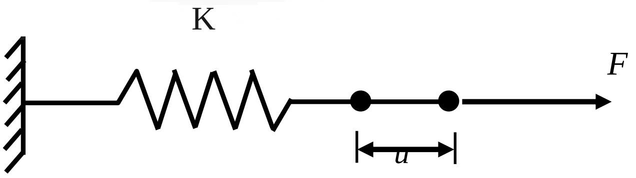
สามารถแก้สมการคณิตศาสตร์วิศวกรรมดังกล่าวได้ จะทำให้เข้าใจพฤติกรรมการเสียรูป ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นของเนื้อเยื่อแข็งและอ่อน ทั้งแบบยืดหยุ่นและเสียรูปถาวร ขณะได้รับแรงกระทำ ของอวัยวะแต่ละส่วนซึ่งมีหน้าที่การทำงานที่ต่างกัน

กลศาสตร์ของเนื้อเยื่ออ่อน เป็นการศึกษาแรงและผลของแรงที่กระทำกับเนื้อเยื่ออ่อน ได้แก่ กระดูกอ่อน (cartilage) เส้นเอ็นที่ยึดกล้ามเนื้อและกระดูก (tendon) เส้นเอ็นยึดข้อ (ligament) กล้ามเนื้อ (muscles) พังผืด (fascia) ผิวหนัง (skin) เนื้อเยื่อเส้นใย (fibrous tissue) ไขมัน (fat) เยื่อบุข้อต่อ (synovial membranes) เส้นประสาท (nerves) ผนังหลอดเลือด (blood vessels) คุณสมบัติของเนื้อเยื่ออ่อนมีความไม่เชิงเส้น (nonlinear) แอนไอโซทรอปิก (anisotropic) โดยเนื้อเยื่ออ่อนแต่ละชนิดจะมีหน้าที่รับภาระโหลดที่แตกต่างกัน เช่น ผนังหลอดเลือดมีการหดและขยายตัวจากแรงดันที่เพิ่มขึ้นขณะหัวใจบีบตัว เป็นต้น หัวข้อนี้จะกล่าวถึงผนังหลอด ในส่วนของคุณสมบัติวัสดุที่ใช้แทนพฤติกรรมการยืดหดตัวของผนังหลอดเลือด

3.3.1 คุณสมบัติของวัสดุไฮเปอร์อิลาสติก

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีต่าง ๆ ในส่วนของวัสดุประเภทไฮเปอร์อิลาสติก ซึ่งมีคุณสมบัติส่วนใหญ่คล้ายยาง กล่าวคือมีความยืดหยุ่นมาก โดยในบางกรณีวัสดุประเภทนี้จะมีความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity relation) ซึ่งจะแตกต่างจากวัสดุประเภทโลหะทั่วไป โดยสามารถมองวัสดุประเภทไฮเปอร์อิลาสติกนี้เป็นวัสดุประเภทเนื้อเยื่อนุ่ม (Soft tissue) ได้เช่นกัน

ในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบเชิงเส้นโดยทั่วไปความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับระยะยืดซึ่งเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke’s law)

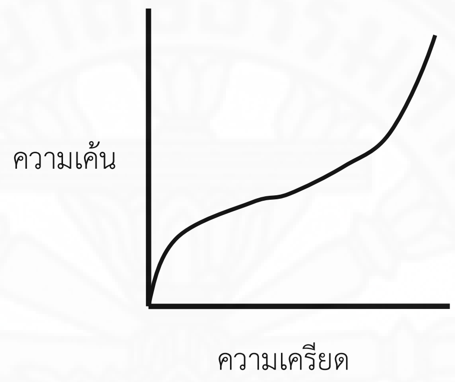


$$F = \mathrm{K}u$$

รูปที่ 3.19 แสดงกฎความสัมพันธ์ของฮุค

เมื่อ F คือแรงกระทำ K คือค่าสัมประสิทธิ์ของวัสดุ และ u เป็นระยะยืด

ความสัมพันธ์ลักษณะนี้จะแตกต่างกับวัสดุประเภทยาง โดยในกรณียางธรรมชาติ ซึ่งมีความยืดหยุ่นสูง และมีการเติมส่วนประกอบสารเคมีเข้าไปเพื่อให้คุณสมบัติของยางมีความทนทานมากขึ้น พฤติกรรมของยางจึงเปลี่ยนไปตามสารประกอบและมีคุณสมบัติที่เปลี่ยนไป โดยโมดูลัสของความยืดหยุ่นจะมีค่าสูงขึ้น และมีการยืดตัวที่ไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับภาระรับเหมือนกรณีของวัสดุจำพวกโลหะ หรือเรียกว่า พฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear behavior) ซึ่งก็จะเหมือนกับวัสดุประเภทเนื้อเยื่อ เอ็นและผนังหลอดเลือด

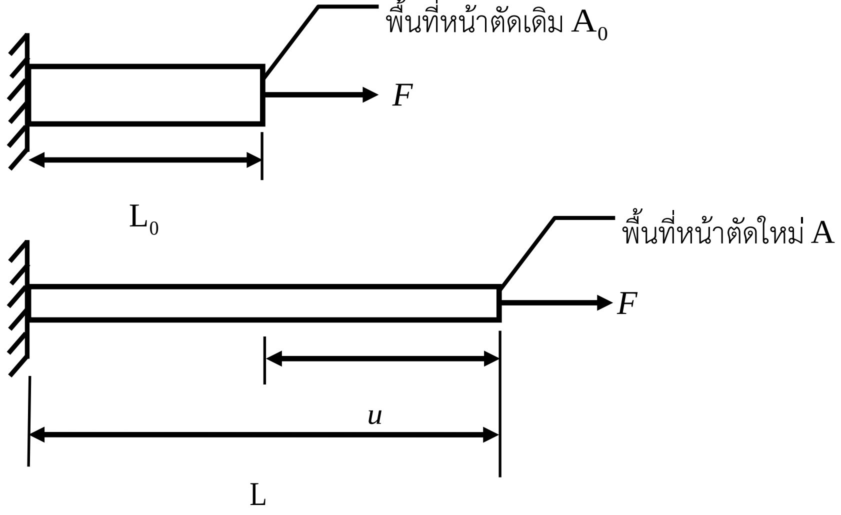


รูปที่ 3.20 แสดงพฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้นของยาง

(1) อัตราส่วนระยะยืด

การทดสอบการดึงแกนเดียวของชิ้นงานที่เป็นยาง และการวัดระยะที่ยืดออกตามแนวการดึงจะเป็นความสัมพันธ์ระหว่างระยะทั้งหมดกับความยาวเดิม

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}_0} = \frac{(\mathrm{L}_0 + u)}{\mathrm{L}_0} = 1 + \frac{u}{\mathrm{L}_0} \qquad (3.100)$$



รูปที่ 3.21 แสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนระยะยืด

โดยทั่วไปหากต้องการศึกษาการยืดตัวของวัสดุที่มีรูปทรงต่าง ๆ นั้นสามารถทำได้ด้วยการทดสอบแบบดึงสองแกนเท่ากัน ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ของอัตราส่วนระยะยืดได้ทั้งสามทิศทางตามแนวแกนหลัก x y z โดยในการวิเคราะห์การเสียรูปมาก (Large strain deformation) รวมถึงการคำนวณหาค่าอินวาเรียนท์ของความเครียด (Strain invariants) ซึ่งนำไปใช้คำนวณฟังก์ชันพลังงานความเครียด (Strain energy function) ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

(2)ความเค้นและความเครียด

วัสดุประเภทอิลาสโตเมอร์ (Elastomer) ซึ่งมีคุณสมบัติไฮเปอร์อิลาสติก การวิเคราะห์การเสียรูปด้วยโปรแกรมคำนวณระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ส่วนใหญ่ จะใช้สมการพื้นฐานที่เรียกว่า Green Lagrange strain, E โดยกรณีที่มีพฤติกรรมการดึงในแกนเดียวสามารถเขียนได้เป็น

$$E = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) \qquad (3.101)$$

สอดคล้องกับความเค้นอันดับที่ 2 ของ Piola Kirchhoff, S_2

$$S_2 = \frac{F}{A}\left(\frac{L_0}{L}\right)^2 \qquad (3.102)$$

แม้ว่าความเค้นอันดับที่ 2 ของ Piola Kirchhoff มีความเหมาะสมสำหรับใช้กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของพฤติกรรมทางกลของวัสดุ แต่การคำนวณพฤติกรรมของโครงสร้างนั้นทำได้ยาก นักวิจัยส่วนใหญ่จึงใช้ความสัมพันธ์ของความเค้นเคาชี (Cauchy stress, σ) และความเครียดลอการิทึม (Logarithmic strain, ε) แทนดังนี้

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{3.103}$$

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \tag{3.104}$$

หรือเขียนเป็นความเค้นทางวิศวกรรม (Engineering stress, S_1) และความเครียดทางวิศวกรรม (Engineering strain, e)

$$S_1 = \frac{F}{A_0} \tag{3.105}$$

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} \tag{3.106}$$

(3) แบบจำลองฟังก์ชันพลังงานความเครียด (Strain Energy Function)

การวิเคราะห์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของวัสดุประเภทอิลาสโตเมอร์ แบบจำลองของวัสดุจะแตกต่างจากฟังก์ชันพลังงานความเครียดทั่วไป โดยเรียกพฤติกรรมของวัสดุประเภทนี้ว่า ไฮเปอร์อิลาสติก ผลิตภัณฑ์ที่ทำจากวัสดุที่มีพฤติกรรมลักษณะนี้ จำเป็นต้องหาสมการแสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด เพื่อใช้อธิบายพฤติกรรมการยืดหยุ่นแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear elastic deformation) ซึ่งเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันความหนาแน่นของพลังงานความเครียด (Stain energy density function, W) ดังสมการด้านล่าง

$$W = W(u) \tag{3.107}$$

เมื่อ u คือเทนเซอร์ระยะยืด (Stretch tensor) มีลักษณะเป็นเมทริกซ์แนวทแยง (Diagonal matrix) ซึ่งประกอบไปด้วย λ_1 λ_2 และ λ_3 คือระยะยืดในทิศทางตามแนวแกน x y z โดยวัสดุไอโซโทรปิก (Isotropic material) สามารถเขียนพลังงานความเครียดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันสมมาตร (Symmetric function) ของ λ_1 λ_2 และ λ_3 ได้

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \tag{3.108}$$

ความสัมพันธ์ของระยะยืดตามแนวแกนหลักใด ๆ λ_i กับแรงต่อพื้นที่ f_i ในกรณีที่ชนิดวัสดุเป็นไอโซโทรปิก Treloar (1975) อธิบายโดยใช้ฟังก์ชันพลังงานความเครียดโดย

$$f_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \tag{3.109}$$

พลังงานความเครียด W อาจจะเขียนให้อยู่ในรูปของ Strain invariants

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{aligned} \tag{3.110}$$

หรืออาจเขียนให้อยู่ในรูป

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \tag{3.111}$$

ในกรณีที่พิจารณาเป็นวัสดุอัดตัวไม่ได้ สามารถเขียนได้ว่า

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{(V + \Delta V)}{V} = 1 \tag{3.112}$$

เมื่อ V คือปริมาตร ส่งผลให้

$$I_3 = J^2 = 1 \tag{3.113}$$

ดังนั้น

$$W = W(I_1, I_2) \quad (3.114)$$

ความเค้นหลักเคาชี (Cauchy principal stress) ซึ่งเป็นแรงต่อพื้นที่ที่เปลี่ยนแปลง (Strained area) สามารถอธิบายได้จากสมการ (3.114)

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} f_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + \sigma \quad (3.115)$$

(4) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Constitutive Model)

ฟังก์ชันพลังงานความเครียด W สามารถอธิบายพฤติกรรมความยืดหยุ่น แบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Elastic Deformation) แบ่งออกได้เป็นสองกลุ่มใหญ่ ๆ โดยกลุ่มแรกเป็นแบบจำลองซึ่งแทนพฤติกรรมจากการสังเกต (Phenomenological model) โดยพัฒนามาจากความสัมพันธ์ความความเค้นกับการเปลี่ยนรูป เมื่อไม่พิจารณาถึงโครงสร้างภายในโมเลกุล กลุ่มที่สองเป็นแบบจำลองซึ่งแทนพฤติกรรมทางกายภาพ (Physical based model) ด้วยการพัฒนามาจากกลไกโครงสร้างระดับจุลภาค จากทฤษฎีจลน์ศาสตร์ (Kinetic theory) หรือทฤษฎีกลศาสตร์สถิติ (Statistical mechanics theory) สมมติฐานจากการเคลื่อนที่ระดับโซ่โมเลกุลในแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุพอลิเมอร์ประเภทยางถูกนำมาเชื่อมโยงกับการเปลี่ยนแปลงทางเอนโทรปี (Entropy)

1. แบบจำลองซึ่งแทนพฤติกรรมจากการสังเกต (Phenomenological Model)

แบบจำลองที่อ้างอิงกับข้อมูลทดสอบ ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองนี้ ไม่มีความหมายทางกายภาพ แต่เป็นค่าสัมประสิทธิ์จากการปรับแบบจำลองให้เข้ากับข้อมูล จากการทดสอบหรือการทำนายพฤติกรรม โดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการจำลองพฤติกรรมเชิงกลของวัสดุในลักษณะเช่นนี้มีข้อดีคือ ความแม่นยำในช่วงที่มีข้อมูลทดลองสูง แต่ข้อเสียคือไม่สามารถใช้สมการดังกล่าวทำนายพฤติกรรมในลักษณะที่มีการทดสอบเพียงอย่างเดียวได้ ดังนั้นจึงจำเป็นที่

จะต้องมีการทดสอบวัสดุในหลายลักษณะ สำหรับใช้การวิเคราะห์พฤติกรรมให้มีความถูกต้องมากที่สุด

1.1 แบบจำลองพหุนาม (Polynomial Model)

ฟังก์ชันพลังงานความเครียด (Strain energy function) สำหรับวัสดุซึ่งมีคุณสมบัติแบบไอโซโทรปิกและอัดตัวไม่ได้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมของค่าที่ไม่ผันแปรของเทนเซอร์การเสียรูปได้

$$W = \sum_{i+j+k=1}^{N} C_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 3)^k \quad (3.116)$$

โดยที่ C_{ijk} เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง

จากสมมติฐานที่กำหนดให้ยางเป็นวัสดุอัดตัวไม่ได้ ดังนั้น I_3 = 1 จากสมการที่ 3.116 แบบจำลองพหุนามจึงลดรูปเป็น

$$W = \sum_{i+j=1}^{N} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (3.117)$$

เมื่อ N = 2

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_1 - 3)^2 \quad (3.118)$$

สมการข้างต้นเป็นแบบจำลองที่นิยมนำมาใช้ทำนาย เนื่องจากจำนวนเทอมที่ใช้มีความเหมาะสม ซึ่งประกอบไปด้วยเทอมของ First invariant, I_1 และ Second invariant, I_2

พิจารณาสภาวะดึงแกนเดียว (Uniaxial tension) สามารถเขียนเป็นเทนเซอร์ระยะยืดได้

$$F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

จากความสัมพันธ์

$$f = \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \lambda} \quad (3.120)$$

$$f = 2\left(1-\lambda^{-3}\right)\left[C_{10}\lambda + C_{01} + 2C_{20}\left(I_1 - 3\right) + C_{11}\left(I_1 - 3 + \lambda\left(I_2 - 3\right)\right) + 2C_{02}\left(I_2 - 3\right)\right] \quad (3.121)$$

ความเค้นจริง

$$T = \lambda f = 2\lambda\left(1-\lambda^{-3}\right)\left[C_{10}\lambda + C_{01} + 2C_{20}\left(I_1 - 3\right) + C_{11}\left(I_1 - 3 + \lambda\left(I_2 - 3\right)\right) + 2C_{02}\left(I_2 - 3\right)\right] \quad (3.122)$$

1.2 แบบจำลองมูนนี่รีฟลิน (Mooney-Rivlin Model)

แบบจำลองมูนนี่รีฟลินจะมีด้วยกัน 2 ,3 ,5 และ 9 พารามิเตอร์

2 พารามิเตอร์ $\left(C_{10}, C_{01}\right)$

$$W = C_{10}\left(I_1 - 3\right) + C_{01}\left(I_2 - 3\right) \quad (3.123)$$

3 พารามิเตอร์ $\left(C_{10}, C_{01}, C_{11}\right)$

$$W = C_{10}\left(I_1 - 3\right) + C_{01}\left(I_2 - 3\right) + C_{11}\left(I_1 - 3\right)\left(I_2 - 3\right) \quad (3.124)$$

5 พารามิเตอร์ $\left(C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}\right)$

$$W = C_{10}\left(I_1 - 3\right) + C_{01}\left(I_2 - 3\right) + C_{20}\left(I_1 - 3\right)^2 + C_{11}\left(I_1 - 3\right)\left(I_2 - 3\right) + C_{02}\left(I_2 - 3\right)^2 \quad (3.125)$$

9 พารามิเตอร์ $\left(C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}, C_{21}, C_{12}, C_{03}\right)$

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad (3.126)$$
$$+ C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^{2^3}$$
$$+ C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{21}(I_1 - 3)^2(I_2 - 3)$$
$$+ C_{12}(I_1 - 3)(I_2 - 3)^2 + C_{03}(I_2 - 3)^3$$

พิจารณาที่สภาวะการดึงแบบแกนเดียว สำหรับ 2 พารามิเตอร์

$$f = 2C_{10}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) + 2C_{01}\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (3.127)$$

1.3 แบบจำลองออกเดน (Ogden Model)

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2}\left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3\right) \quad (3.128)$$

แบบจำลองนี้สามารถทำนายพฤติกรรมของวัสดุได้ดีและเป็นที่นิยมใช้อีกหนึ่งรูปแบบหนึ่ง แต่จะมีความยากในการใช้งาน โดยเขียนอยู่ในรูปแบบผลรวมของอัตราส่วนการยืดตัว มีค่าโมดูลัสการเฉือนคือ

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \quad (3.129)$$

อันดับของแบบจำลองออกเดนซึ่งนิยมใช้ ได้แก่แบบจำลองออกเดนอันดับที่ 3 (n = 3) โดยพิจารณาที่สภาวะดึงแบบแกนเดียว

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\mu_i}{\alpha_i}\left(\lambda^{\alpha_i - 1} - \lambda^{\frac{-\alpha_i}{2} - 1}\right) \tag{3.130}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\mu_i \lambda}{\alpha_i}\left(\lambda^{\alpha_i - 1} - \lambda^{\frac{-\alpha_i}{2} - 1}\right) \tag{3.131}$$

1.4 แบบจำลองของโยห์ (Yeoh Model)

$$W = \sum_{i=1}^{N} C_{ij}(I_1 - 3)^i \tag{3.132}$$

เมื่อ $N = 3$

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \tag{3.133}$$

แบบจำลองของโยห์มีพื้นฐานมาจากแบบจำลองพหุนาม โดยกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ C_{ij} บางตัวมีค่าเป็นศูนย์ โดยในกรณีที่ j = 0 จะเรียกสมการนี้อีกลักษณะหนึ่งว่าสมการพหุนามลดรูป (Reduce polynomial Model) ซึ่งกำหนดเป็นแบบจำลองพหุนามลดรูปอันดับที่ 3 (n = 3) จะพบว่ามีแต่ค่าอินวาเรียนท์ I_1 (First invariant) เท่านั้น โดยโยห์ได้ให้เหตุผลของการลดรูปสมการว่าเทอมของ I_2 (Second invariant) มีอิทธิพลน้อยไม่ส่งผลต่อการทำนายพฤติกรรมจึงสามารถตัดทิ้งได้ และจากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของยางจะแสดงออกมาในรูปตัวอักษร S ดังนั้นในช่วงที่ใส่ภาระเข้าไปในช่วงแรก ค่าสัมประสิทธิ์ C_{10} แสดงถึงโมดูลัสของการเฉือน ค่า C_{20} จะมีอิทธิพลในช่วงกลางของกราฟที่เป็นจุดเปลี่ยน ซึ่งเป็นช่วงอ่อนตัว และค่า C_{30} จะมีอิทธิพลต่อกราฟช่วงปลาย โดยเป็นช่วงที่มีการรแข็งตัวมากขึ้น ทำให้วิเคราะห์ได้ว่าแบบจำลองของโยห์ใช้ได้ดีกับการวิเคราะห์ยางที่มีระยะยืดตัวมาก

พิจารณาที่สภาวะดึงแบบแกนเดียว

$$f = 2\left(\lambda - \lambda^{-2}\right)\sum_{i=1}^{3} iC_{i0}\left(I_1 - 3\right)^{i-1} \quad (3.134)$$

$$T = 2\left(\lambda^{2} - \lambda^{-1}\right)\sum_{i=1}^{3} iC_{i0}\left(I_1 - 3\right)^{i-1} \quad (3.135)$$

2. แบบจำลองที่แทนพฤติกรรมกายภาพ (Physical Based Model)

เนื่องจากแบบจำลองซึ่งใช้แทนพฤติกรรมจากการสังเกตนั้น ไม่สามารถทำนายพฤติกรรมการเปลี่ยนลักษณะอื่น ๆ ที่ไม่มีผลการทดลองมาก่อน เนื่องจากแบบจำลองที่แทนพฤติกรรมจากการสังเกต ได้อ้างอิงข้อมูลจากการทดลองมาทำนายพฤติกรรมของปัญหาดังกล่าว จึงมีการพัฒนาแบบจำลองที่นำความรู้ด้านกลไกการเสียรูปและการวิเคราะห์โครงสร้างโมเลกุล ดังนั้นแม้ว่าข้อมูลจากการทดลองมีไม่เพียงพอ แต่แบบจำลองที่แทนพฤติกรรมกายภาพสามารถทำนายพฤติกรรมในช่วงที่ไม่มีข้อมูล

2.1 แบบจำลองนีโอฮุกเกี้ยน (Neo-Hookean Model)

$$W = C_{10}\left(I_1 - 3\right) \quad (3.136)$$

แบบจำลองนี้มีค่าคงที่ C_{10} ซึ่งเป็นโมดูลัสของการเฉือน (Shear modulus) สามารถทำนายพฤติกรรมได้ดี เมื่อเทียบกับการทดลองดึงแกนเดียวในช่วง 0 – 40 % ดังนั้นพิจารณาที่สภาวะการดึงแบบแกนเดียว

$$f = \frac{dW}{d\lambda} = C_{10}\left(2\lambda - \frac{2}{\lambda^{2}}\right) \quad (3.137)$$

$$T = \lambda f = 2C_{10}\left(\lambda^{2} - \frac{1}{\lambda}\right) \quad (3.138)$$

2.2 แบบจำลองอรูดาบอยซ์ (Arruda-Boyce Model)

$$W = \mu \sum_{i=1}^{5} \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} \left(I_1^i - 3^i \right) \qquad (3.139)$$

โดยที่ $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{20}$, $C_3 = \frac{11}{1050}$, $C_4 = \frac{19}{7000}$, $C_5 = \frac{519}{673750}$, μ เป็นโมดูลัสการเฉือน (Shear modulus) ที่ความเครียดต่ำและ λ_m เป็นการล็อคตัวของระยะยืด

แบบจำลองนี้เรียกอีกอย่างว่า แบบจำลอง Eight Chain model เนื่องมาจากการพิสูจน์ด้วยทฤษฎี Non-Gaussian network ที่กำหนดให้มีสปริง 8 อันเชื่อมต่อกันที่จุดศูนย์กลางของเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ (Cubic element) ซึ่งค่าคงที่ได้มาจากการขยายอนุกรมของ Inverse langevin function และจากรูปแบบของสมการในทฤษฎีข้างต้นสามารถนำค่าคงที่ มาใช้ได้มากกว่า 5 เทอม แต่มีนักวิจัยหลายท่าน พบว่าเทอมที่เหลือมีผลต่อพฤติกรรมของวัสดุน้อยมาก จึงพิจารณาตัดออกได้

พิจารณาในสภาวะการดึงแบบแกนเดียว

$$f = 2\mu \left(\lambda - \lambda^{-2} \right) \sum_{i=1}^{5} \frac{iC_i}{\lambda_m^{2i-2}} I_1^{i-1} \qquad (3.140)$$

$$T = 2\mu\lambda \left(\lambda - \lambda^{-2} \right) \sum_{i=1}^{5} \frac{iC_i}{\lambda_m^{2i-2}} I_1^{i-1} \qquad (3.141)$$

2.3 แบบจำลองวานเดอวาลส์ (Van Der Waals Model)

$$W = \mu \left\{ -\left(\lambda_m^2 - 3 \right) \left[\ln \left(1 - \eta \right) \eta \right] - \frac{2}{3} a \left(\frac{\tilde{I} - 3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \qquad (3.142)$$

โดยที่ $\tilde{I} = (1-\beta)I_1 + \beta I_2$

$$\eta = \sqrt{\frac{\tilde{I}-3}{\lambda_m^2 - 3}}$$

$$a = \frac{1}{\lambda_m - \frac{1}{\lambda_m^2} + \frac{2c_{01}}{3\mu}}$$ คือ Global interaction parameter

β = Invariant Mixture Parameter

แบบจำลองวานเดอวาลส์มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า แบบจำลองคิเลี่ยน (Kilian model) แบบจำลองนี้มีความแตกต่างจากแบบจำลองอื่นๆ เนื่องจากมีค่า Locking stretch (λ_m) ซึ่งเป็นค่าที่บอกถึงข้อจำกัด จากการยืดตัวของโครงข่ายต่อโยงแบบ Non-Gaussian และจากโครงสร้างสมการพบว่าพลังงานความเครียดของวานเดอวาลส์ มีแนวโน้มเข้าใกล้ค่าไม่จำกัด (Infinity) ดังนั้นแบบจำลองชนิดนี้ จึงไม่สามารถอธิบายการดึงที่มีระยะยืดมากกว่า λ_m ได้ ซึ่งถือเป็นข้อจำกัดในการใช้งาน

พิจารณาที่สภาวะการดึงแกนเดียว

$$f = \mu\left(1-\lambda^{-3}\right)\left[\frac{1}{1-\eta}\right] - a\sqrt{\frac{\tilde{I}-3}{2}}\left(\lambda(1-\beta)+\beta\right) \qquad (3.143)$$

$$T = \mu\lambda\left(1-\lambda^{-3}\right)\left[\frac{1}{1-\eta}\right] - a\sqrt{\frac{\tilde{I}-3}{2}}\left(\lambda(1-\beta)+\beta\right) \qquad (3.143)$$

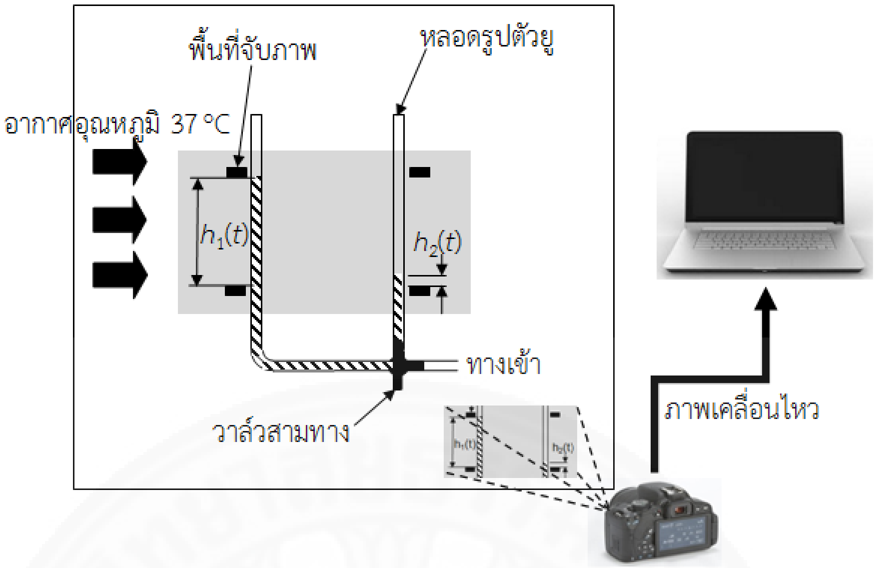
บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในบทนี้จะเป็นการนำเสนอผลการวิจัย ซึ่งประกอบไปด้วย ผลการวัดความหนืดของเลือด โดยใช้เครื่องวัดความหนืดแบบหลอดรูปตัวยูที่ใช้การประมวลผลด้วยภาพ การคำนวณค่าคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดและความเร็วของเลือดในหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นด้วยภาพจากอัตราซาวด์ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นจากภาพการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็กและการวิเคราะห์การไหลของเลือด โดยนำคุณสมบัติของเลือดและผนังหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นที่ได้จากสองข้อข้างต้นเป็นข้อมูลในการวิเคราะห์ปัญหา ซึ่งรายละเอียดทั้งหมดมีดังต่อไปนี้

4.1 การวัดความหนืดของเลือด

ความหนืดเลือดของคนทั่วไปมีค่าไม่เท่ากัน ขึ้นกับสัดส่วนของเม็ดเลือดแดง ปริมาณน้ำตาลและโปรตีนในเลือด ดังที่กล่าวในบทที่ 3 ซึ่งความหนืดเลือดของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองจะมีความสำคัญต่อโอกาสการแตกของผนังหลอดเลือดที่มีไขมันอุดตัน เพราะความหนืดของเลือดสูงจะส่งผลต่อการไหลและค่าความเค้นเฉือนที่กระทำต่อผนังของหลอดเลือด ดังนั้นการวัดค่าความหนืดเลือด เพื่อนำไปวิเคราะห์การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น จึงมีความสำคัญเพราะช่วยเพิ่มความแม่นยำในการวิเคราะห์ปัญหา

ในงานวิจัยนี้จึงพัฒนาเครื่องวัดความหนืดเลือดแบบหลอดรูปตัวยู โดยใช้วิธีเทคโนโลยีการประมวลผลภาพ ซึ่งใช้ปริมาตรของเลือดในการทดสอบไม่เกิน 3 ลูกบาศก์เซ็นติเมตร และใช้เวลาในการทดสอบไม่เกิน 2 นาที จากนั้นจึงนำข้อมูลจากการวัดมาคำนวณค่าความหนืดเลือดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆ โดยแผนภาพการทำงานและอุปกรณ์ของเครื่องวัดความหนืดเลือดแสดงดังรูปที่ 4.1 ขั้นตอนการวัดความหนืดของเลือดมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

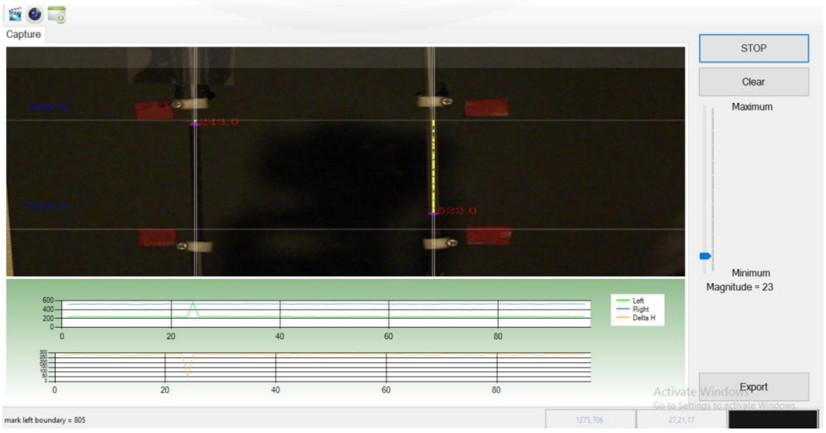


รูปที่ 4.1 แผนภาพการทำงานและอุปกรณ์ของเครื่องวัดความหนืดเลือด

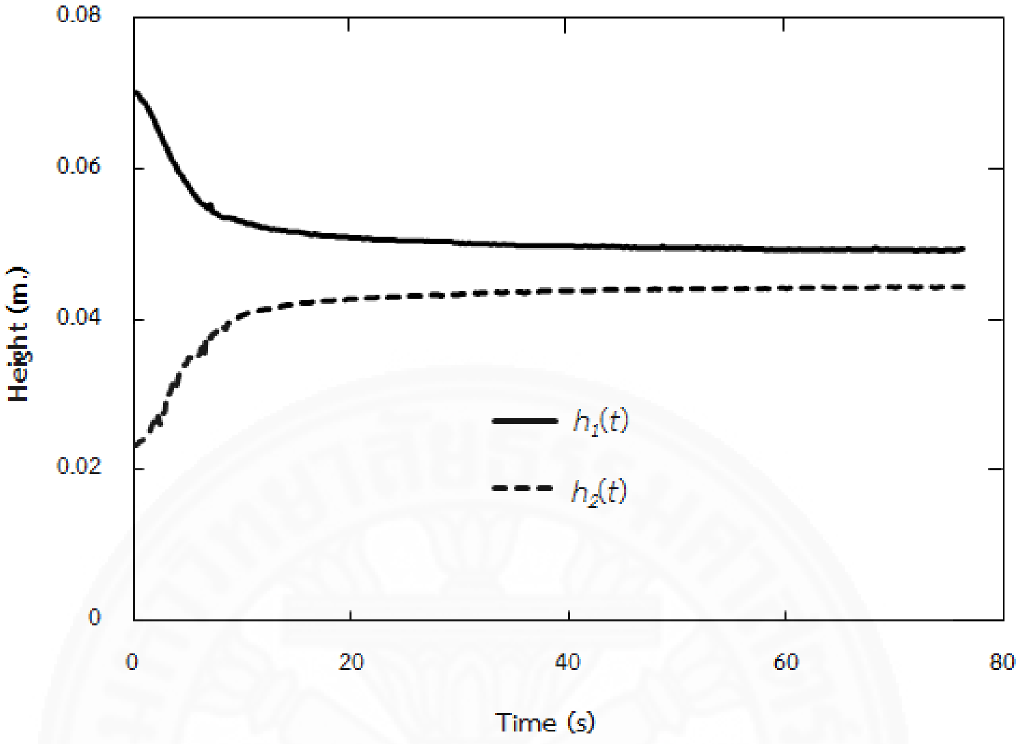
4.1.1 การวัดระดับการไหลในหลอดรูปตัวยูเทียบกับเวลา

ในขั้นตอนนี้เริ่มต้นจากการเจาะเลือดปริมาณ 3 ลูกบาศก์เซ็นติเมตร แล้วนำมาใส่ในหลอดรูปตัวยูบริเวณวาล์วสามทาง โดยให้ระดับเลือดด้าน $h_1(t)$ สูงกว่าทางด้าน $h_2(t)$ จากนั้นจึงเปิดวาล์วสามทาง พร้อมบันทึกภาพเคลื่อนไหวขณะที่ระดับเลือดเคลื่อนที่มาอยู่ในตำแหน่งสมดุลจนกระทั่งไม่มีการเคลื่อนไหว

นำภาพเคลื่อนไหวมาวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมประมวลผลภาพที่พัฒนาขึ้นดังรูปที่ 4.2 ซึ่งโปรแกรมจะจับการเปลี่ยนแปลงระดับความสูงของเลือดที่เปลี่ยนไปเทียบกับเวลา โดยผลัพธ์ที่ได้จะแสดงเป็นกราฟดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.2 โปรแกรมประมวลผลภาพที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัย



รูปที่ 4.3 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับเวลาจากการไหลของเลือดในหลอดรูปตัวยูที่ได้จาก โปรแกรมการประมวลผลจากภาพ

โดยกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความสูงกับเวลาจากการไหลของเลือดในหลอดรูปตัวยู จากโปรแกรมการประมวลผลจากภาพ ถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าความหนืดของเลือดในขั้นตอนต่อไป

4.1.2 การคำนวณหาค่าความหนืดของเลือด

การวัดการไหลของเลือดในขั้นตอนก่อนหน้านี้ โดยจับการเคลื่อนที่ของเลือดภายในหลอดเลือดรูปตัวยู ซึ่งสามารถอธิบายด้วยสมการอนุรักษ์พลังงาน และตั้งสมมุติฐานการไหลเสมือนสภาวะคงตัว และมีแรงตึงผิวระหว่างของไหลและของแข็งคงที่ สามารถเขียนเป็นสมการดังนี้

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g h_1(t) = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g h_2(t) + \Delta P(t) + \rho g \Delta h_{st} \quad (1)$$

โดยที่ P_1 และ P_2 คือ ความดันสถิตย์ในทั้งสองด้านของหลอดรูปตัวยู

g คือ แรงโน้มถ่วงของโลก

Δh_{st} คือ ความแตกต่างของความสูงเนื่องจากแรงตึงผิว

ρ คือ ความหนาแน่นของเลือด

V_1 และ V_1 คือ ความเร็วการไหลในทั้งสองด้านของหลอดรูปตัวยู

ความดันตลอดช่วงของหลอดรูปตัวยูมีค่าเท่ากับ $P_1 = P_2 = P_{atm}$ และ $|V|_1 = |V|_2$ แทนลงในสมการที่ (1) ทำให้เขียนได้เป็น

$$\Delta P(t) = \rho g[h_1(t) - h_2(t) - \Delta h_{st}] \qquad (2)$$

Casson model ถูกนำมาใช้เป็นสมการทดแทนพฤติกรรมของเลือดตลอดช่วงของค่าอัตราการเฉือน โดยเฉพาะช่วงเริ่มต้นของการไหล ซึ่งมีผลของความเค้นที่จุดครากของความหนืดเลือด ดังสมการด้านล่าง

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + \sqrt{k}\sqrt{\dot{\gamma}} \qquad \text{เมื่อ } \tau \geq \tau_y \qquad (3)$$

และ

$$\dot{\gamma} = 0 \qquad \text{เมื่อ } \tau < \tau_y \qquad (4)$$

โดยที่ τ_y คือ ความเค้นที่จุดคราก

k คือ ค่าคงที่ของ Casson

การนำสมการของ Casson model มาอินทริเกรทตลอดช่วงอัตราการเฉือน จะได้สมการในรูปของความเร็วของการไหลในหลอดรูปตัวยูดังนี้

$$V(t,r) = \frac{R^2 \Delta P(t)}{4kL}\left[1 - C^2(r) - \frac{8}{3}C_y^{\frac{1}{2}}(t)\left\{1 - C^{\frac{3}{2}}(r)\right\} + 2C_y(t)(1 - C(r))\right]$$

เมื่อ $r_y(t) \leq r \leq R$ (5ก)

$$V(t,r) = \frac{R^2 \Delta P(t)}{4kL}\left(1 - \sqrt{C_y(t)}\right)^3\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{C_y(t)}\right)$$

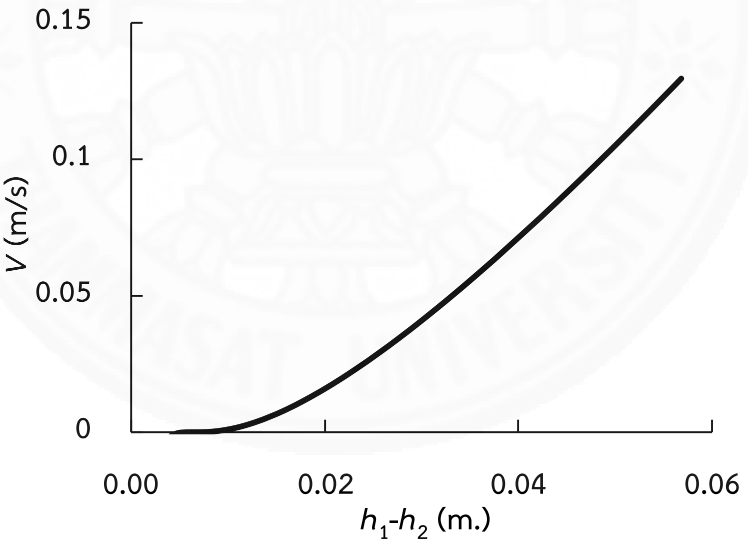
เมื่อ $r_y(t) \geq r$ (5ข)

โดย $C(r)=\dfrac{r}{R}$ และ $C_y(t)=\dfrac{r_y(t)}{R}=\dfrac{\tau_y}{\tau_w(t)}=\dfrac{\Delta h_y}{h_1(t)-h_2(t)-\Delta h_{st}}$

สมการที่ (5ก) และ (5ข) มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ Δh_{st}, k และ Δh_y ซึ่งสามารถหาได้จากการปรับเส้นโค้ง (curve fitting) จากผลการวัดระดับการเปลี่ยนแปลงความสูงของเลือดในหลอดรูปตัวยูกับเวลา $[d(h_1(t)-h_2(t))]/dt$ เทียบกับ h_1-h_2 ดังรูปที่ 4.4 โดยใช้โปรแกรม MATLAB R2010a ซึ่งเมื่อทราบค่าตัวแปรแล้วนำไปแทนในสมการที่ (6) และ (7) เพื่อหาค่าความหนืดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆ

$$\dot{\gamma}_w(t)=\frac{\rho g R}{2kL}\left(\sqrt{h_1(t)-h_2(t)-\Delta h_{st}}-\sqrt{\Delta h_y}\right)^2 \qquad (6)$$

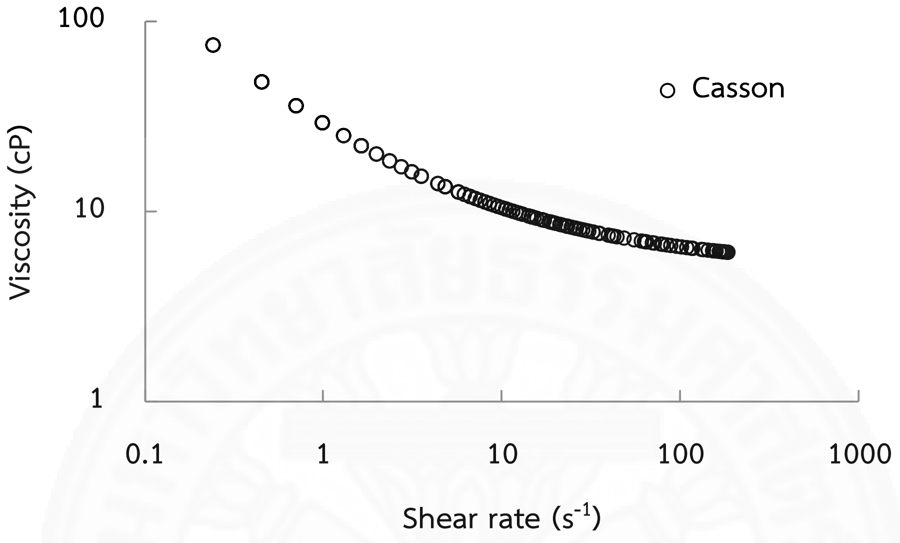
$$\eta(t)=\frac{\rho g R\left[h_1(t)-h_2(t)-\Delta h_{st}\right]}{2\dot{\gamma}_w(t)L} \qquad (7)$$



รูปที่ 4.4 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับระยะ h_1-h_2

ผลจากการปรับเส้นโค้งและแทน Δh_{st}, k และ Δh_y ในสมการที่ (6) และ (7) ได้ค่าความหนืดของเลือดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆแสดงดังรูปที่ 4.5 ซึ่งพบว่าความหนืดจะมีค่าสูงในช่วง

อัตราเฉือนต่ำ เนื่องจากการในช่วงแรกที่มีผลของการเรียงตัวของเม็ดเลือดแดง ในขณะที่อัตราเฉือนสูงความหนืดจะมีค่าต่ำและมีแนวโน้มคงที่ ซึ่งเป็นผลจากความหนืดของน้ำเลือดนั้นเอง

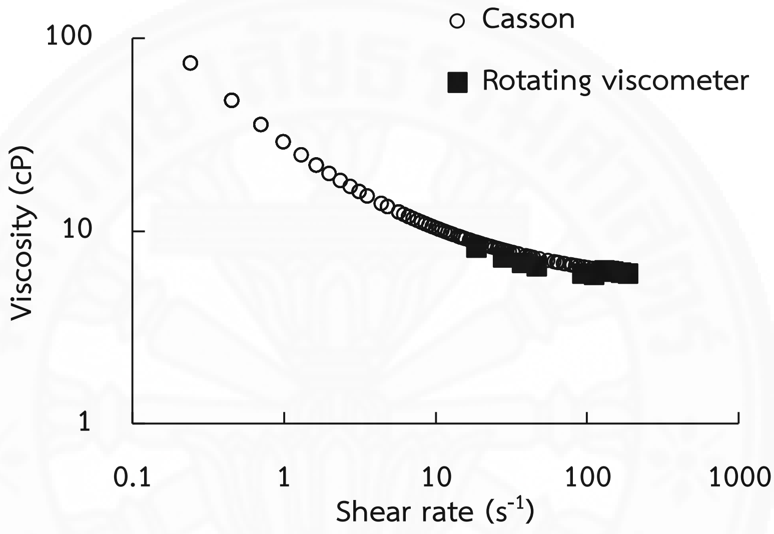


รูปที่ 4.5 กราฟแสดงค่าความหนืดของเลือดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆ ด้วย Casson model

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของการวัด จึงมีการวัดความหนืดเลือดจากเครื่องวัดความหนืดมาตรฐานยี่ห้อ Brookfield รุ่น DV II ซึ่งเป็นเครื่องวัดความหนืดแบบ Rotating Viscometer (RV) ดังรูปที่ 4.6 เพื่อนำค่าความหนืดที่ได้มาเปรียบเทียบกับเครื่องวัดความหนืดเลือดแบบหลอดรูปตัวยูที่พัฒนาขึ้น

รูปที่ 4.6 เครื่องวัดความหนืดแบบ Rotating Viscometer (RV)

เครื่องวัดความหนืดแบบ RV จะมีข้อจำกัดคือ สามารถวัดที่ค่าอัตราเฉือนได้ที่ละค่า และใช้เวลาในการวัดต่อค่าความเฉือนประมาณ 20 วินาที โดยเลือดจะเริ่มแข็งตัวหลังจากออกสู่ภายนอกร่างกายเกินกว่า 3 นาที ทำให้เครื่องวัดความหนืดแบบ RV ไม่เหมาะสมในการนำมาใช้วัดความหนืดเลือดที่ต้องการค่าความหนืดตลอดทุกช่วงของอัตราเฉือน โดยรูปที่ 4.7 แสดงกราฟเปรียบเทียบการวัดความหนืดเลือดด้วยเครื่อง RV กับเครื่องวัดความหนืดเลือดแบบหลอดรูปตัวยูที่พัฒนาขึ้น



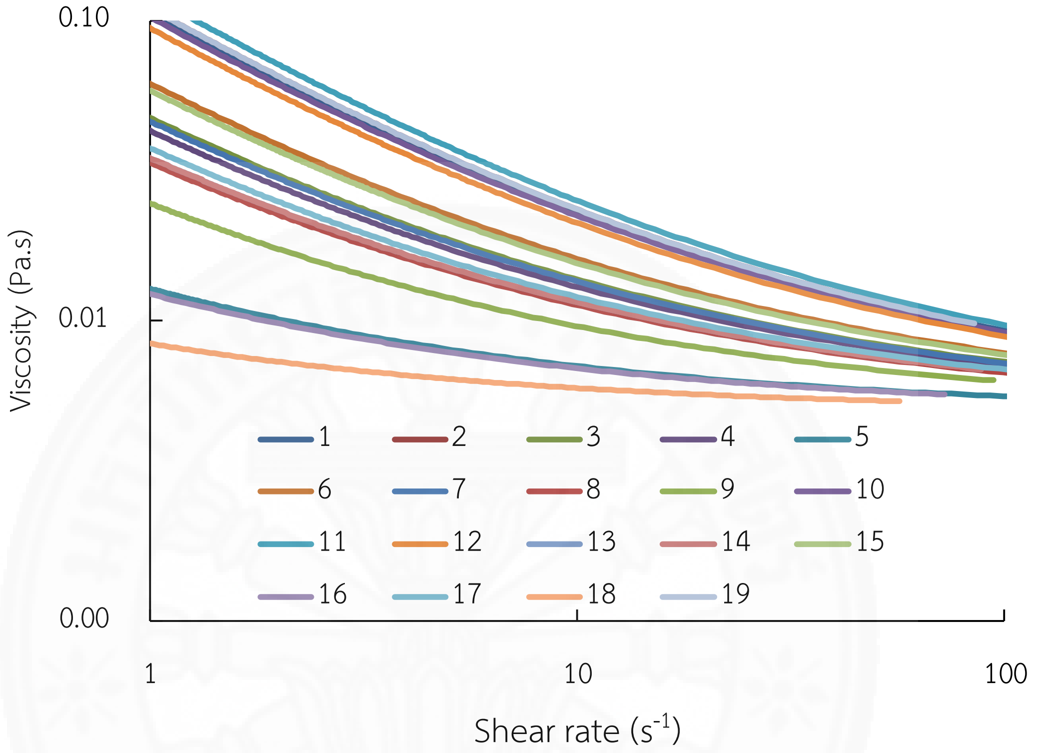
รูปที่ 4.7 กราฟเปรียบเทียบค่าความหนืดที่ได้จากการวัดด้วย RV กับเครื่องวัดความหนืดที่พัฒนาขึ้นตลอดช่วงอัตราเฉือน

จากรูปที่ 4.7 พบว่าการวัดจากเครื่องวัดความหนืดทั้งสองเครื่อง ให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน โดยเครื่อง RV ไม่สามารถวัดค่าความหนืดที่อัตราเฉือนต่ำได้ เพราะเป็นข้อกำกัดของอุปกรณ์ แต่เครื่องวัดความหนืดที่พัฒนาขึ้นสามารถหาค่าความหนืดได้ทุกช่วงของอัตราเฉือน

4.1.3 การวัดความหนืดของเลือดในผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง

หลังจากที่ทำการทดสอบเครื่องวัดความหนืดของเลือดที่พัฒนาขึ้น โดยเปรียบเทียบกับเครื่องวัดความหนืดแบบ RV แล้ว พบว่าให้ผลที่สอดคล้องกัน จึงนำเครื่องวัดความหนืดที่พัฒนาขึ้นไปวัดความหนืดเลือดของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองจำนวน 19 ราย ในการตรวจวัดครั้งนี้มีการขออนุมัติจริยธรรมการวิจัยในคน ของมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ซึ่งได้รับการอนุมัติเรียบร้อยแล้วตามรหัส

โครงการ MTU-EC-IM-4-115/57 โดยผู้วิจัยได้เข้าตรวจวัดที่ ศูนย์โรคหลอดเลือดทางสมอง โรงพยาบาลธรรมศาสตร์เฉลิมพระเกียรติ ซึ่งผลการวัดค่าความหนืดของเลือดแสดงดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 กราฟแสดงค่าความหนืดเลือดของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองที่อัตราเฉือนต่างๆ จำนวน 19 ราย

โดยผู้ป่วยแบ่งออกเป็นชาย 13 คน หญิง 6 คน อายุเฉลี่ย 57.8 ปี ฮีมาโทคริตเฉลี่ย (Hematocrit, Ht หรือ HCT) 43.3% จากรูปที่ 4.8 พบว่าค่าความหนืดเลือดของผู้ป่วยแต่ละรายมีค่าแตกต่างกัน ซึ่งจะส่งผลต่อแรงกระทำต่อผนังหลอดเลือดต่างกันขณะไหล โดยข้อมูลความหนืดที่ได้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณการไหลภายในหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นต่อไป โดยตัวอย่างหมายเลข 3 จะถูกนำไปวิเคราะห์การไหลของเลือดและความแข็งแรงของผนังหลอดเลือด

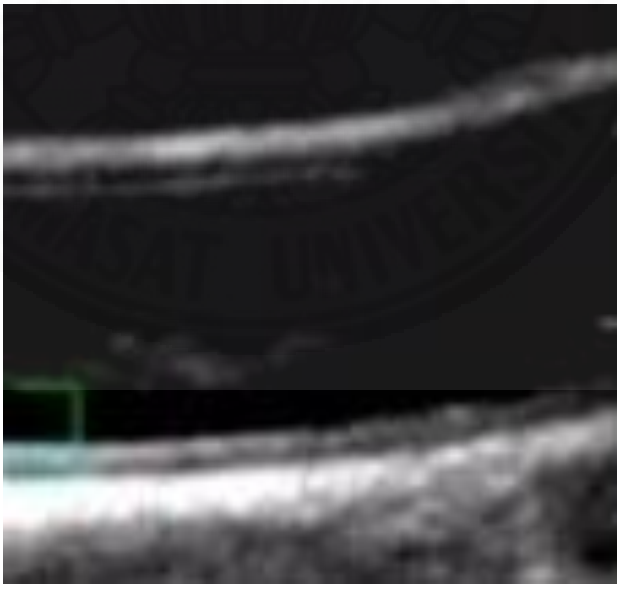
4.2 การหาค่าคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด

คุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นมีความสำคัญกับผลการวิเคราะห์การไหลของเลือดและความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือด โดยการไหลของเลือดจะมี

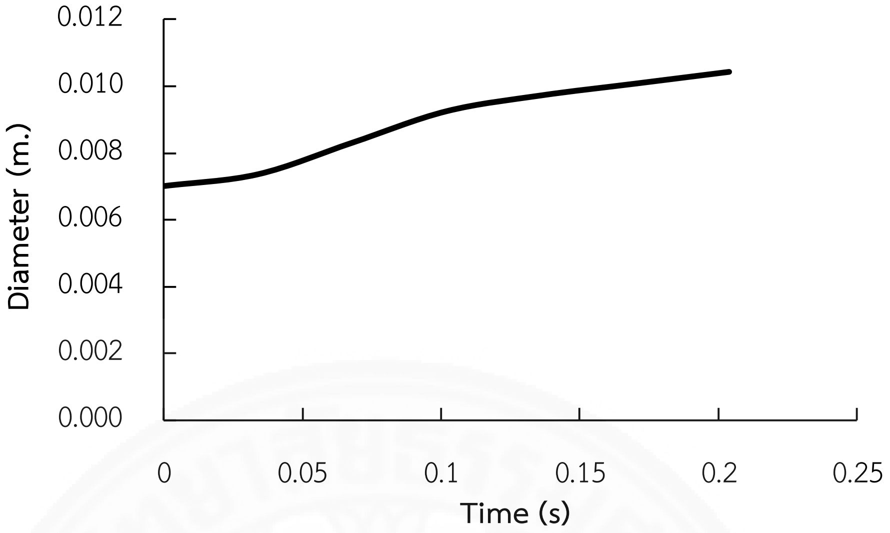
ความเร็วการไหลมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับการหดหรือขยายตัวของพื้นที่หน้าตัดของหลอดเลือด ซึ่งหากหลอดเลือดมีการยืดหยุ่นที่ดี การขยายตัวของผนังหลอดเลือดจะมากขึ้น ทำให้ความเร็วการไหลของเลือดลดลง และส่งผลต่อผนังหลอดเลือดที่จะรับแรงแนวเฉือนจากการไหลน้อยลงด้วย ทำให้การหาคุณสมบัติทางกลที่ถูกต้องมีความสำคัญต่อการวิเคราะห์โอกาสแตกของหลอดเลือดที่มีการอักเสบ นอกจากนี้ ผู้ป่วยแต่ละคนก็จะมีคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดแตกต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับอายุ เพศ โรคประจำตัวเป็นต้น

ดังนั้นการหาค่าดังกล่าวต้องวัดจากผู้ป่วยโดยตรง โดยงานวิจัยนี้นำวิธีการวัดคุณสมบัติทางกลของผู้ป่วยจากภาพอัตราซาวด์แล้ววิเคราะห์ค่าการหดและขยายตัวสัมพันธ์กับความดันที่กระทำ ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ซึ่งเป็นคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดนั้นเอง (Khamdaeng, 2012) และการหาคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดด้วย วิธีนี้จะนำเอาผลของกล้ามเนื้อ รวมทั้งเนื้อเยื่อที่อยู่บริเวณรอบๆหลอดเลือดมาพิจารณาด้วย

รูปที่ 4.9 คือภาพอัตราซาวด์บริเวณแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง จะถูกนำมาหาระยะการหดและขยายตัวเทียบกับเวลา และการเปลี่ยนแปลงความดันเลือดด้วยโปรแกรมประมวลผลด้วยภาพจากนั้น จึงนำค่ามาแสดงเป็นกราฟดังรูปที่ 4.10 สำหรับความดันของผู้ป่วยมีค่า 90-130 mm.Hg



รูปที่ 4.9 ภาพอัตราซาวด์บริเวณแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง



รูปที่ 4.10 ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

จากกฎของลาปาสสำหรับคำนวณความเค้นในระบบพิกัดทรงกระบอก สามารถคำนวณความเค้นเฉลี่ยแนวเส้นรอบวง ($\sigma_\theta(t)$) ได้ดังสมการด้านล่าง

$$\sigma_\theta(t) = \frac{P_i(t)d(t)}{2h} - \frac{P_i(t)}{2} \tag{8}$$

โดยที่ $P_i(t)$ คือ ความดันภายในหลอดเลือด

$d(t)$ คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดเลือด

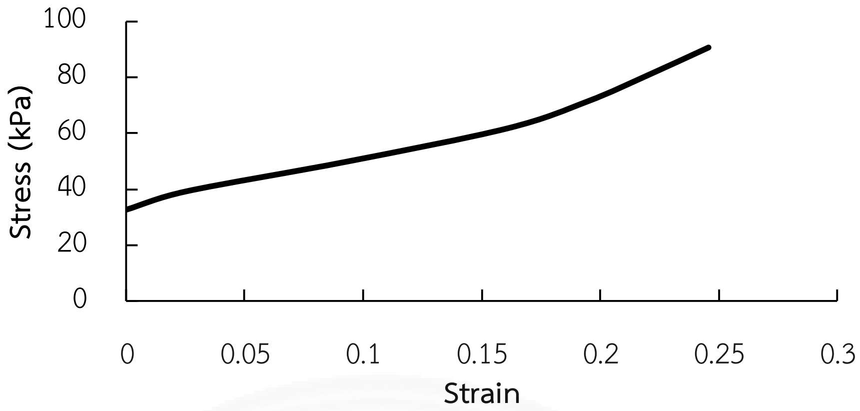
h คือ ความหนาของผนังหลอดเลือด

จากสมมุติฐานของ Cauchy strain ทำให้ค่าความเครียดเฉลี่ยแนวเส้นรอบวง ($\varepsilon_\theta(t)$) สามารถคำนวณได้จากสมการด้านล่าง

$$\varepsilon_\theta(t) = \frac{d(t) - d_{\min}}{d_{\min}} \tag{9}$$

โดยที่ $d_{\min}$ คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดเลือดที่มีค่าน้อยที่สุด

จากการคำนวณทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 ความเค้นและความเครียดของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นจากการคำนวณ

โดยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของหลอดเลือด แคโรติดไบเฟอร์เคชั่นจากรูปที่ 4.11 เนื่องจากผนังหลอดเลือดมีคุณสมบัติเป็นวัสดุแบบไฮเปอร์อีลาสติก และมูนนี่รีฟลิน (Mooney-Rivlin Model) แบบ 3 พารามิเตอร์จะถูกนำมาทดแทนพฤติกรรมของผนังหลอดเลือด

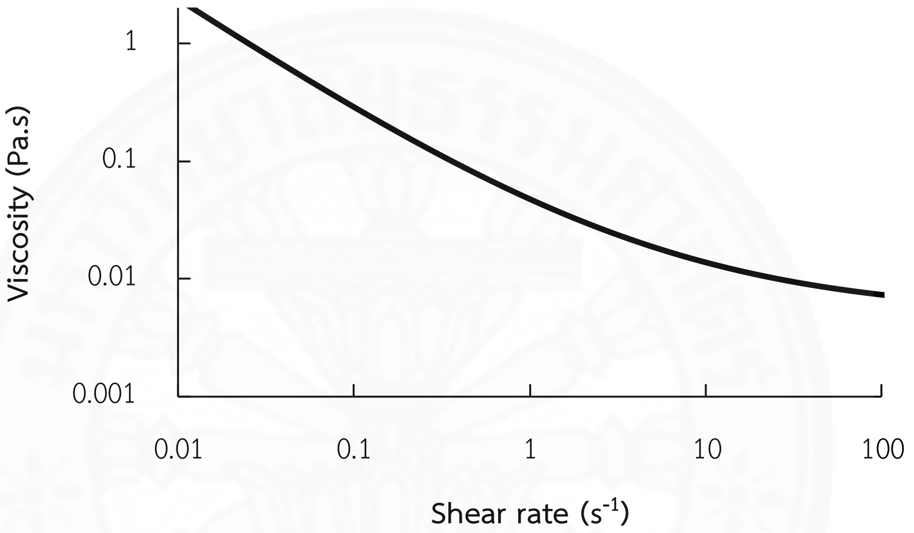
4.3 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดของผู้ป่วยแต่ล่ะคน ซึ่งมีรูปร่างของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นแตกต่างกันออกไป การนำรูปร่างของหลอดเลือดจริงมาใช้ในการวิเคราะห์ จึงมีความสำคัญ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้นำภาพจากการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็ก มาสร้างรูปร่างของหลอดเลือด ด้วยโปรแกรม Slicer ซึ่งเป็นโปรแกรมสร้างรูปร่างสามมิติ ด้วยภาพจากการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็ก และเป็นโปรแกรมที่ให้ใช้งานฟรี โดยรูปที่ 4.12 คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นที่ได้จากกระบวนการที่กล่าวมา

รูปที่ 4.12 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นจากภาพการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็ก

4.4 การวิเคราะห์การไหลของเลือด

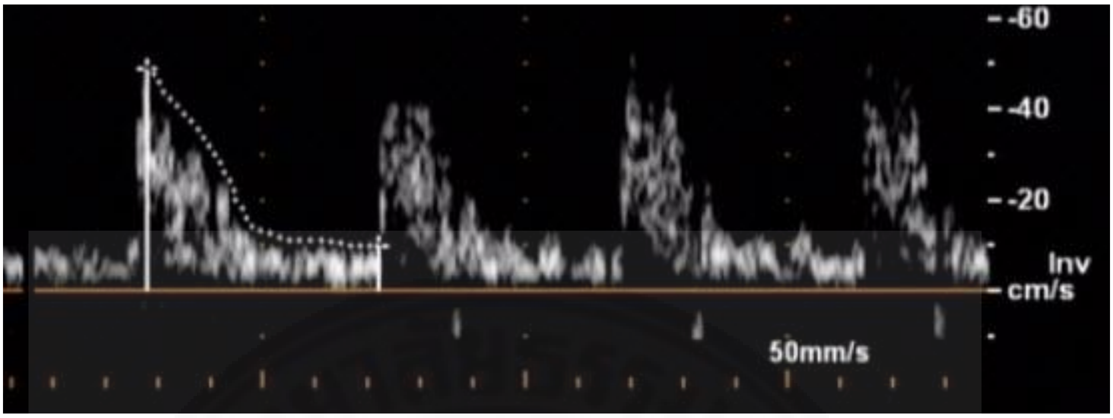
ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น จะต้องใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องหลายส่วน เพื่อทำให้การวิเคราะห์ปัญหา มีพฤติกรรมใกล้เคียงกับสิ่งที่เกิดขึ้นจริง ซึ่งงานวิจัยได้เริ่มต้นจากการสร้างเครื่องวัดความหนืดเลือด เพื่อวัดความหนืดเลือดของผู้ป่วย โดยค่าความหนืดเลือดที่วัดได้จากผู้ป่ายแสดงดังรูปที่ 4.13 ซึ่งในการวิเคราะห์จะใช้ Carreau Yasuda model ทดแทนพฤติกรรมความหนืดของเลือด



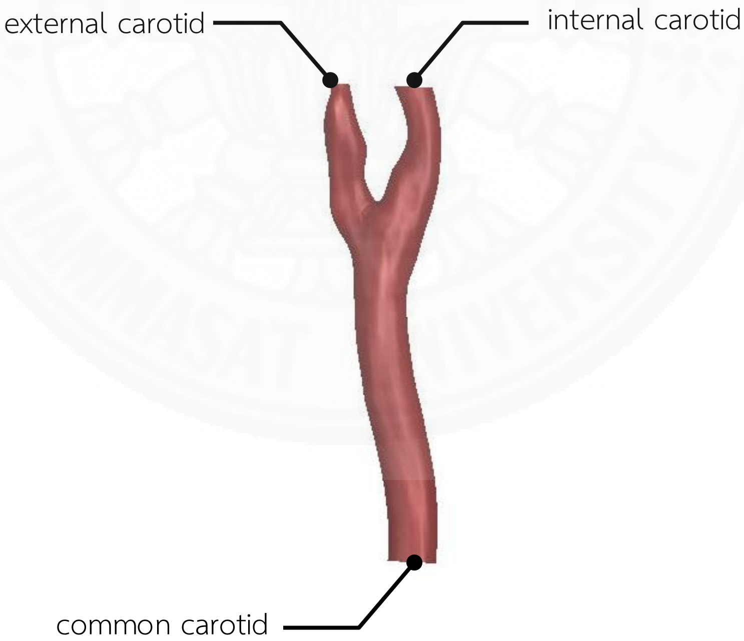
รูปที่ 4.13 กราฟความหนืดเลือดของผู้ป่วยกับค่าอัตราเฉือนสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหล

ในส่วนที่สองคือ คุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด ซึ่งต้องพิจารณาแรงกระทำจากเนื้อเยื่อรอบเส้นเลือดที่มีผลต่อความยืดหยุ่นของผนังหลอดเลือด โดยในงานวิจัยได้นำภาพจากอัตราซาวด์มาประมวลผลด้วยภาพแล้วคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดดังแสดงในข้างต้น และส่วนที่สามคือรูปร่างของผนังหลอดเลือด ซึ่งนำภาพจากการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็ก มาสร้างรูปร่างของหลอดเลือด โดยการใช้โปรแกรม Slicer

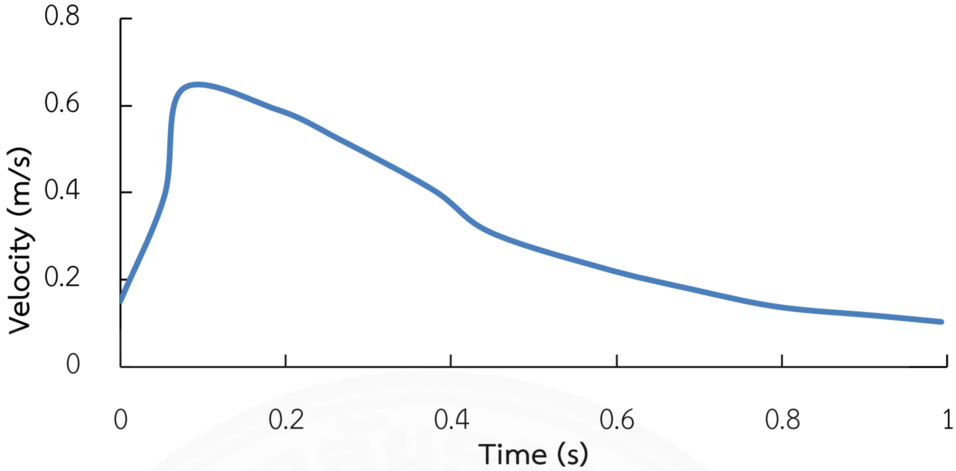
นอกจากนี้ความเร็วการไหลของเลือดสามารถนำภาพจากอัตราซาวด์ ซึ่งเป็นกราฟความเร็วที่ขึ้นกับเวลาตามการบีบตัวของหัวใจดังรูปที่ 4.14 โดยทำการวัดค่าความเร็วสามจุดด้วยกันได้แก่ ทางเข้าของ common carotid สำหรับเป็นการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และทางออกของ internal carotid และ external carotid สำหรับใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของการวิเคราะห์ปัญหา โดยตำแหน่งที่เป็นจุดวัดแสดงดังรูปที่ 4.15 และกราฟความเร็วกับเวลาที่ได้แสดงในรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.14 ภาพจากอัตราซาวด์สำหรับหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา

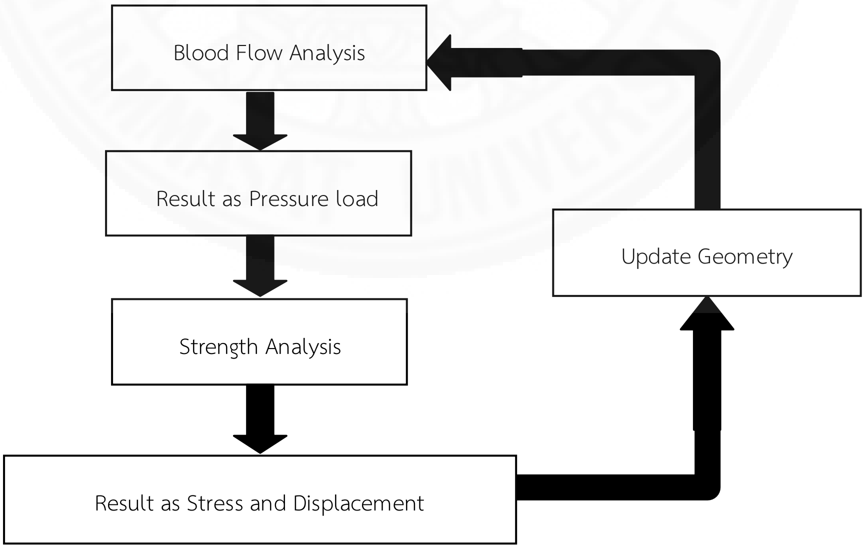


รูปที่ 4.15 แสดงตำแหน่งการวัดความเร็วการไหลของเลือด



รูปที่ 4.16 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของเลือดกับเวลาที่ common carotid

เมื่อข้อมูลที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดครบถ้วนแล้ว จึงทำการวิเคราะห์ปัญหา โดยมีสมมุติฐานว่าเป็นการไหลที่ขึ้นกับเวลา มีการคำนวณการบีบตัวของหัวใจสองครั้ง ของไหลมีพฤติกรรมแบบนอนนิวโตเนี่ยน ผนังหลอดเลือดมีคุณสมบัติแบบไฮเปอร์อิลาสติก และการวิเคราะห์ใช้เทคนิคการคำนวณแบบ 2 way Fluid Solid Interaction (2 way FSI) เพื่อจำลองการไหลและการยืดหดขยายตัวตลอดเวลา โดยขั้นตอนการคำนวณแสดงดังภาพที่ 4.17



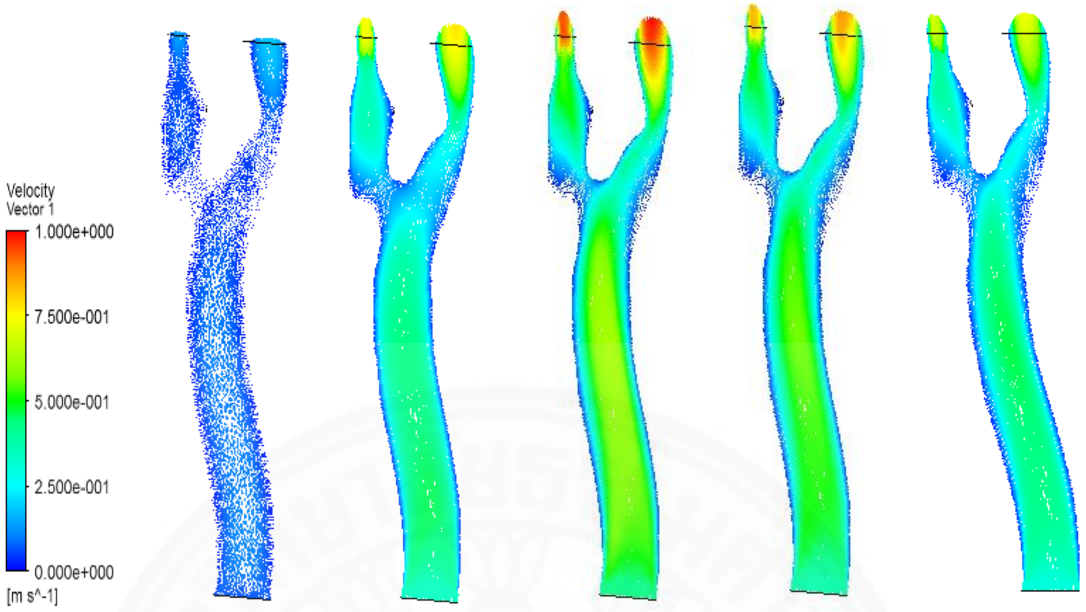
รูปที่ 4.17 แผนภาพการวิเคราะห์ปัญหาแบบ 2 way Fluid Solid Interaction (2 way FSI)

กำหนดเงื่อนไขขอบเขตของการไหล โดยให้ทางเข้าของเลือดที่ common carotid และทางออกมีสองทางคือ internal กับ external carotid สำหรับการจับยึดในกรณีการวิเคราะห์ความแข็งแรงพิจารณาเป็นพิกัดทรงกระบอก กำหนดให้ทางเข้าของ common carotid ไม่มีการเคลื่อนที่แนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงมุมบิด แต่ในแนวรัศมีสามารถยืดหดขยายได้ ส่วนที่ปลายทั้งสองของ internal กับ external carotid กำหนดให้ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวมุมบิด แต่แนวตั้งฉากและแนวรัศมีสามรถเคลื่อนที่ได้

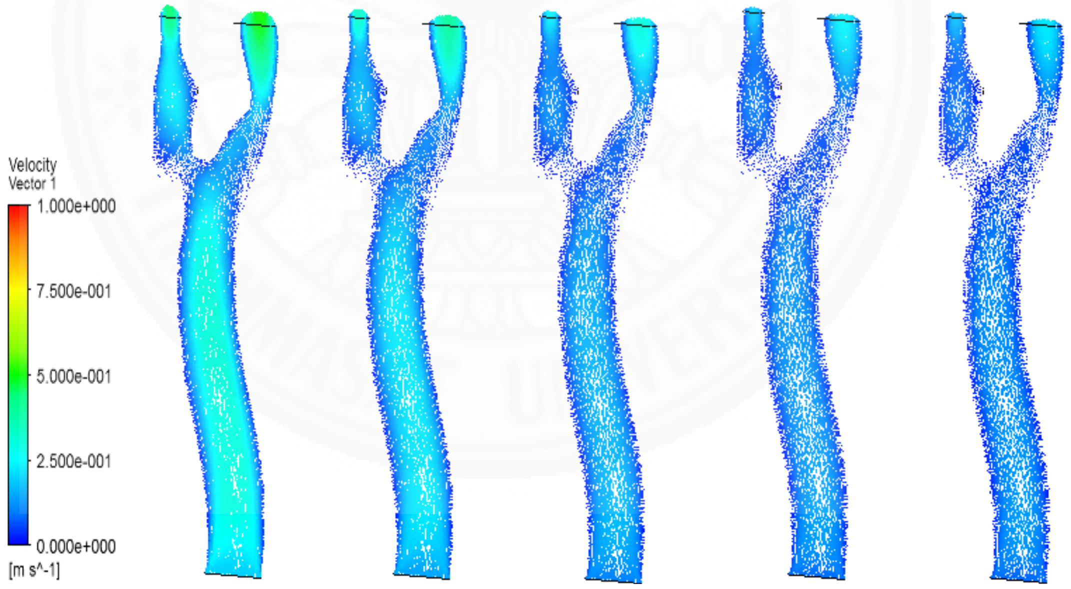
4.5 ผลการวิเคราะห์

การวิเคราะห์ปัญหาแบบ 2 way FSI เริ่มจากการคำนวณการไหลที่เกิดขึ้นภายในหลอดเลือดในช่วงการแบ่งเวลา ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้คือ ความเร็ว ความดัน ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลานั้นๆ โดยความดันที่ได้จะถูกส่งต่อไปเป็นแรงกระทำกับผนังหลอดเลือดในการวิเคราะห์ความแข็งแรงของผนังหลอดเลือด ในกรณีช่วงการบีบตัวของหัวใจ หลอดเลือดจะมีแรงกระทำมากขึ้น ทำให้หลอดเลือดขยายตัว ซึ่งผลการวิเคราะห์ความแข็งแรงได้แก่ ความเค้น และการเคลื่อนตัวของผนังหลอดเลือด โดยค่าการเคลื่อนตัวนี้ จะถูกนำไปปรับรูปร่างของหลอดเลือดสำหรับการวิเคราะห์การไหลต่อไป ทำซ้ำจนกระทั้งครบเวลาที่กำหนดไว้

รูปที่ 4.18 แสดงผลการวิเคราะห์เป็นเวกเตอร์ความเร็วในช่วงเวลาต่างๆ ซึ่งการไหลจะเริ่มต้นจากทางเข้าด้าน common carotid แล้วแยกไหลออกไปทางหลอดเลือด internal carotid และ external carotid bifurcation โดยช่วงเวลาที่มีความเร็วสูงสุดคือ 1.2 s ตามการบีบตัวของหัวใจ และในช่วงเวลาดังกล่าวความเค้นที่เกิดขึ้นสูงสุดมีค่าเท่ากับ 6,157 Pa

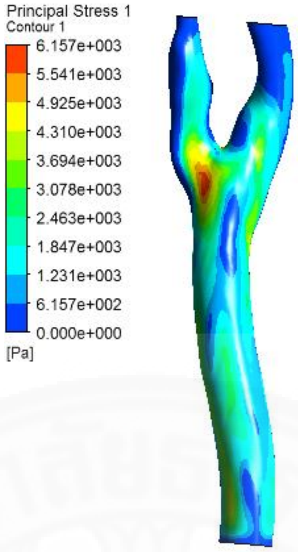


1.0 s 1.1 s 1.2 s 1.3 s 1.4 s



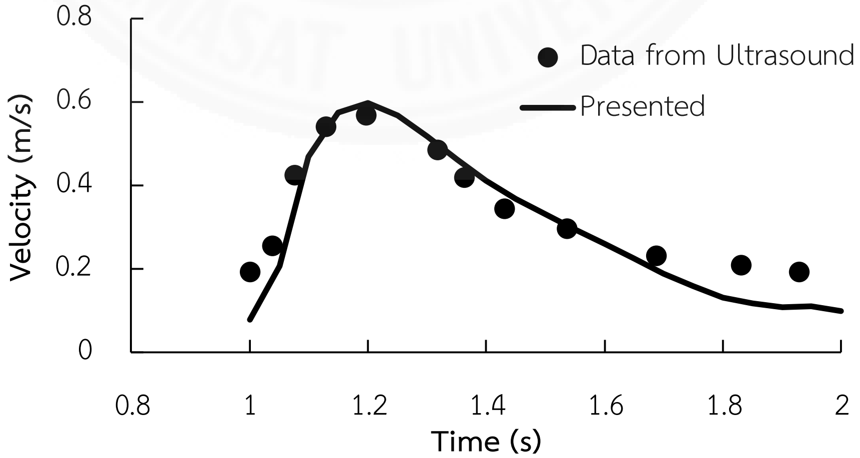
1.5 s 1.6 s 1.7 s 1.8 s 1.9 s

รูปที่ 4.18 แสดงเวกเตอร์ความเร็วการไหลของเลือดที่เวลาต่างๆกัน

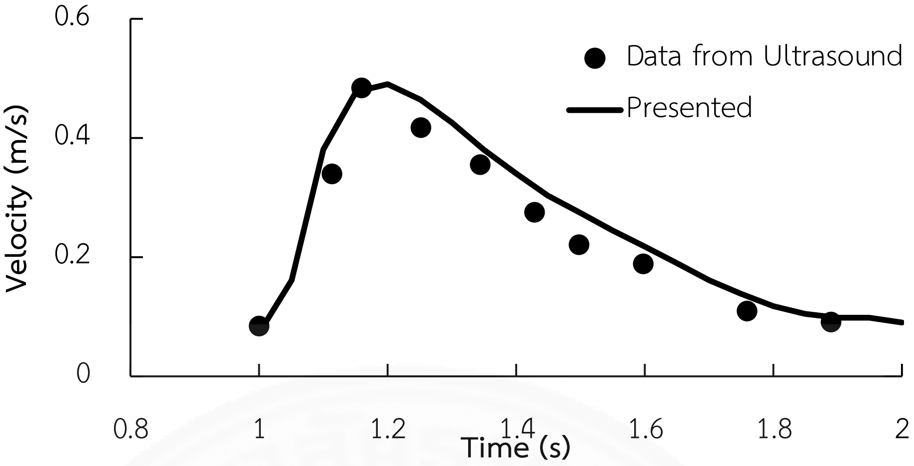


รูปที่ 4.19 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของเลือดกับเวลาที่ common carotid

การตรวจสอบความถูกต้องของการวิเคราะห์ด้วยการนำค่าความเร็วการไหลของเลือดที่ทางออกของหลอดเลือด internal carotid และ external carotid bifurcation จากการวัดด้วยอัตราซาวด์มาเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณ ซึ่งแสดงดังรูปที่ 4.20 และ 4.21 ตามลำดับ โดยพบว่าค่าที่ได้จากทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ทั้งนี้เป็นผลจากการนำคุณสมบัติจริงของความหนืดเลือด คุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด รูปร่างของหลอดเลือดและความเร็วการไหลที่ทางเข้า common carotid จากผู้ป่วยจริง มาใช้ในการคำนวณนั้นเองทำ



รูปที่ 4.20 กราฟเปรียบเทียบความเร็วเฉลี่ยของเลือดที่ช่วงเวลาต่างกันจากการวัดจริงจากอัตราซาวด์กับผลจากการวิเคราะห์การไหล บริเวณทางออกของ internal carotid bifurcation

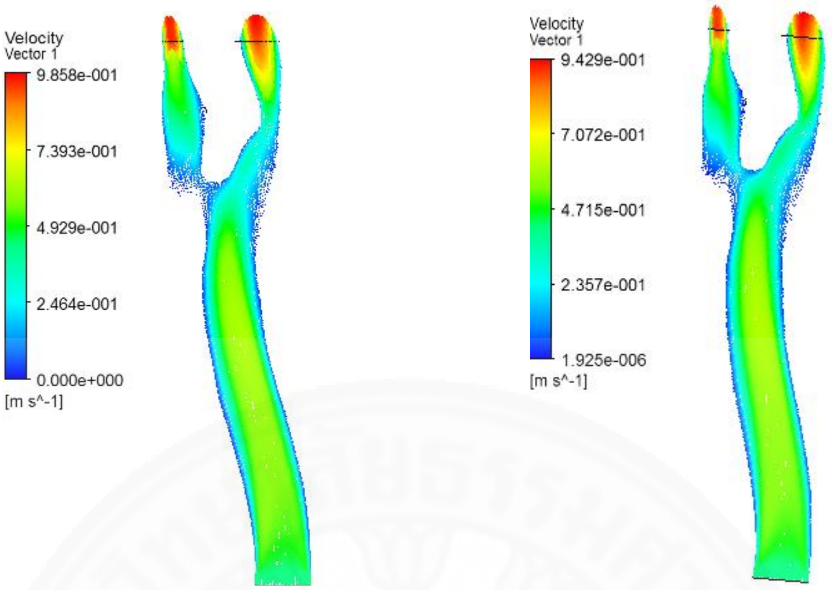


รูปที่ 4.21 กราฟเปรียบเทียบความเร็วเฉลี่ยของเลือดที่ช่วงเวลาต่างกันจากการวัดจริงจากอัตราซาวด์กับผลจากการวิเคราะห์การไหล บริเวณทางออกของ external carotid bifurcation

ผลจากการวิเคราะห์จะพบว่าความเร็วการไหลของเลือดจะเปลี่ยนไปตามการบีบตัวของหัวใจ โดยเมื่อมีความเร็วการไหลเพิ่ม พบว่าความเค้นที่ผนังหลอดเลือดสูงขึ้นตามไปด้วย และเมื่อผนังหลอดเลือดมีการอักเสบมากขึ้น จะทำให้ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดเลือดลดลง ทำให้ความเร็วการไหลเพิ่มขึ้น ซึ่งทำให้ความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือดมีค่าสูงตามไปด้วยนั่นเอง

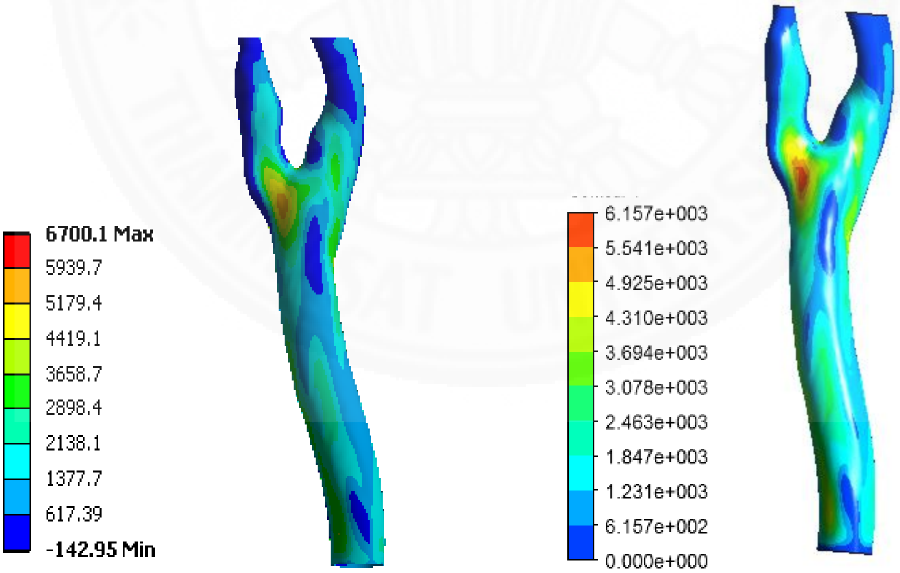
จากรูปที่ 4.22 แสดงการเปรียบเทียบเวกเตอร์การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น ด้วยการคำนวณแบบ 1 way FSI กับ 2 way FSI ที่เวลา 1.2 วินาที ซึ่งพบว่าความเร็วการไหลสูงสุดมีค่าไม่เท่ากัน เพราะการคำนวณแบบ 2 way FSI มีการคำนวณการขยายตัวของหลอดเลือดในทุกช่วงเวลาการคำนวณ ทำให้เมื่อปริมาณเลือดที่ไหลผ่านมีค่าเท่ากัน แต่ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดเลือดใหญ่ขึ้นจากการขายตัวของแรงดันเลือดในช่วงก่อนหน้า ทำให้ความเร็วการไหลลดลง ซึ่งความเร็วการไหลนี้เองจะมีผลกระทบต่อความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือด โดยผลการวิเคราะห์พบว่าความเร็วการไหลสูงสุดของการคำนวณด้วยวิธี 1 way FSI มีค่ามากกว่าการคำนวณด้วย 2 way FSI เท่ากับ 4.55%

เนื่องจากความเร็วของการไหลไม่เท่ากันทำให้ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือดมีค่าไม่เท่ากันไปด้วย ดังแสดงในรูปที่ 4.23 ซึ่งแสดงการกระจายตัวของความเค้นบนผนังหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น โดยพบว่าค่าความเค้นในการคำนวนแบบ 1 way FSI มีค่ามากกว่าการคำนวณด้วย 2 way FSI เท่ากับ 8.82% ดังนั้นหากวิเคราะห์ปัญหานี้ด้วยวิธี 1 way FSI ทำให้ค่าความเร็วและความเค้นสูงกว่าความเป็นจริงที่เกิดขึ้น



1 way FSI 2 way FSI

รูปที่ 4.22 เปรียบเทียบเวกเตอร์ความเร็วจากการคำนวณด้วยวิธี 1 way FSI และ 2 way FSI ที่เวลา 1.2 วินาที



1 way FSI 2 way FSI

รูปที่ 4.23 เปรียบเทียบการกระจายตัวของความเค้นจากการคำนวณด้วยวิธี 1 way FSI และ 2 way FSI ที่เวลา 1.2 วินาที

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเริ่มต้นจากคำถามในการวิจัย เรื่องความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือดของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง ซึ่งพบว่ามีงานวิจัยที่วิเคราะห์การไหลของเลือดผ่านหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น รวมทั้งการวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือด แต่ในการวิเคราะห์ปัญหากลับไม่นำคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องของผู้ป่วยมาวิเคราะห์และจำลองพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริง เช่น ความหนืดของเลือด ความเร็วการไหลตามการเต้นของหัวใจ และคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด มีเพียงการนำภาพการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็กมาสร้างรูปร่างของหลอดเลือดเท่านั้น ทำให้ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง จึงเป็นช่องว่างของการวิจัยที่ผ่านมา

การวิจัยจึงเริ่มต้นจากการหาวิธีการวัดความหนืดของเลือด คุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดและความเร็วการไหลตามการเต้นของหัวใจ เพื่อหาวิธีการวัดหรือนำค่าดังกล่าวจากผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองก่อนนำไปวิเคราะห์การไหลและหาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือดต่อไป

งานวิจัยนี้จึงหาวิธีการคำนวณและจำลองพฤติกรรมการไหลของเลือด รวมทั้งความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนังหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นให้มีความถูกต้องความสอดคล้องกับพฤติกรรมจริงและตรวจสอบความถูกต้องกับค่าจากการวัด ซึ่งขั้นตอนการวิจัยมีรายละเอียดดังนี้

5.1.1 การวัดความหนืดเลือด

งานวิจัยนี้ได้ประดิษฐ์เครื่องวัดความหนืดเลือดแบบหลอดรูปตัวยู โดยใช้วิธีเทคโนโลยีการประมวลผลภาพ ซึ่งใช้ปริมาตรของเลือดในการทดสอบไม่เกิน 3 ลูกบาศก์เซ็นติเมตร และใช้เวลาในการทดสอบไม่เกิน 2 นาที จากนั้นจึงนำข้อมูลจากการวัดมาคำนวณค่าความหนืดเลือดในช่วงอัตราเฉือนต่างๆ และตรวจสอบความถูกต้องโดยเปรียบเทียบกับการวัดความหนืดเลือดด้วยด้วยเครื่องวัดความหนืดแบบ RV และวิธีมีค่าความหนืดที่ใกล้เคียงกัน แต่เครื่องวัดความหนืดเลือดที่พัฒนาขึ้นสามารถวัดความหนืดได้ตลอดช่วงอัตราเฉือนต่างๆ ซึ่งจะทดแทนพฤติกรรมของเลือดที่มีคุณสมบัติแบบนอนนิวโตเนี่ยนได้ และในงานวิจัยนี้ได้วัดความหนืดของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองจำนวน 19 ราย

5.1.2 การหาค่าคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือด

ในงานวิจัยนี้นำวิธีการวัดคุณสมบัติทางกลของผู้ป่วยจากภาพอัตราซาวด์แล้ว วิเคราะห์ค่าการหดและขยายตัวสัมพันธ์กับความดันที่กระทำ ทำให้ได้ความเค้นและความเครียด ซึ่งเป็นคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดนั้นเอง (Khamdaeng, 2012) และการหาคุณสมบัติทางกลของผนังหลอดเลือดด้วย วิธีนี้จะนำเอาผลของกล้ามเนื้อ รวมทั้งเนื้อเยื่อที่อยู่บริเวณรอบๆหลอดเลือดมาพิจารณาด้วย ซึ่งทำให้การขยายและหดตัวของผนังหลอดเลือดมีพฤติกรรมสอดคล้องกับของจริงมากกว่า การตัดเอาผนังหลอดเลือดไปหาคุณสมบัติทางกลด้วยเครื่องมือวัดสมบัติความทนต่อแรงดึง

5.1.3 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น

การสร้างรูปร่างของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น โดยนำภาพจากการสั่นพ้องของคลื่นสนามแม่เหล็กของผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมอง มาสร้างรูปร่างของหลอดเลือด ด้วยโปรแกรม Slicer โดยรูปร่างของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นของผู้ป่วยจะมีลักษณะแตกต่างกันออกไป รวมถึงการอักเสบที่ทำให้ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลอดเลือดมีขนาดเล็กลง ส่งผลต่อการไหลของเลือด ดังนั้นรูปร่างของหลอดเลือดผู้ป่วยจึงมีความสำคัญต่อความแม่นยำ ในการวิเคราะห์การไหลและความเค้นที่เกิดขึ้น

5.1.4 การวัดความเร็วการไหลของเลือดตามการบีบตัวของหัวใจ

การวัดความเร็วการไหลได้นำเอาข้อมูลจากการตรวจวัดด้วยเครื่องอัตราซาวด์ ซึ่งจะมีกราฟความเร็วการไหลของเลือดที่ common , internal และ external carotid ในแต่ละช่วงเวลาการบีบตัวของหัวใจ โดย common carotid จะนำไปเป็นเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหล ส่วน internal และ external carotid จะถูกนำไปตรวจสอบความถูกต้องของการวิเคราะห์ปัญหา

5.1.5 การวิเคราะห์การไหลและความเค้นของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่น

จากข้อมูลการวัดข้างต้นจากผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองถูกนำไปวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีการคำนวณแบบ 2 way FSI ซึ่งมีการคำนวณการไหลและความเค้นควบคู่กันไปในแต่ละช่วงเวลา ทำให้สามารถจำลองพฤติกรรมการไหลและการหดหรือยืดตัวของผนังหลอดเลือดได้แม่นยำมากยิ่งขึ้นกว่าการวิเคราะห์ด้วยวิธี 1 way FSI โดยผลการวิเคราะห์การไหลถูกนำไปเปรียบเทียบกับการวัดความเร็วด้วยกราฟจากอัตราซาวด์ พบว่าค่าที่ได้ในแต่ละช่วงเวลาการบีบตัวของหัวใจมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ทำให้การวิเคราะห์ปัญหาการไหลและความเค้นของหลอดเลือดแคโรติดไบ

เฟอร์เคชั่น ด้วยขั้นตอนและวิธีการวิจัยทั้งหมด ให้ผลที่สอดคล้องกับพฤติกรรมจริงสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับผู้ป่วยโรคหลอดเลือดสมองได้

5.2 ข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์การไหลและความเค้นของหลอดเลือดแคโรติดไบเฟอร์เคชั่นด้วยกระบวนการวิจัยให้ผลลัพธ์สอดคล้องกับพฤติกรรมจริง แต่การทำนายถึงโอกาสการแตกของหลอดเลือดที่มีการอักเสบจำเป็นต้องศึกษาจากกลุ่มตัวอย่างเพิ่มเติม เพื่อหาค่าความเค้นที่ทำให้หลอดเลือดเกิดการแตกได้ต่อไป

รายการอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2545) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, พิมพ์ครั้งที่ 1.

ยรรยง ทองเจริญ. (2552) โรคหลอดเลือดสมองตีบตัน (Stroke): ศูนย์สมองและระบบประสาท สืบค้นจาก http://www.vejthani.com/web-thailand/Stroke.php

จิราภรณ์ สุจจานันท์. (2558) โรคหลอดเลือดสมอง ภัยร้ายใกล้ตัว: ศูนย์สมองและระบบประสาท สืบค้นจาก http://thonburihospital.com/2015_new

Barbara M. J., Peter R. J., Stuart C., and David K., (2004). Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: steady state simulations, Journal of Biomechanics 37, 709-720.

Bird RB, Armstrong RC, Hassager O. (1987a) Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 1: Fluid Mechanics. New York: Wiley Intersci.

Bird RB, Curtiss CF, Armstrong RC, Hassager O. (1987b) Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 2: Kinetic Theory. New York: Wiley Intersci.

E. Maher and etc., (2009). Tensile and compressive properties of fresh human carotid atherosclerotic plaques, Journal of Biomechanics 42, 402-411.

F.J.H. Gijsen, F.N. Van de Vosse and J.D. Janssen, (1999). The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: Steady flow in a carotid bifurcation model, Journal of Biomechanics **32,** 601–608.

F.J.H. Gijsen, E. Allanic, F.N. Van de Vosse and J.D. Janssen, (1999). The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: unsteady flow in a 90° curved tube, Journal of Biomechanics 32, 705-713.

Frank M.W., (1991). Viscous fluid flow. (2nd ed.). Singapore: McGRAW-HILL.

Fung Y. (1993) Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues, Springer, New York NY Berlin.

Fung Y. (2013) Biomechanics: motion, flow, stress, and growth, Springer Science & Business Media.

I. Marshall and etc., (2004). MRI and CFD studies of pulsatile flow in healthy and stenosed carotid bifurcation models, Journal of Biomechanics 37, 679-687.

J. Bernsdorf, D. Wang, (2009). Non-Newtonian blood flow simulation in cerebral aneurysms, Computers & Mathematics with Applications 58, 1024-1029.

J.F. Brun and etc., (2000). The paradox of hematocrit in exercise physiology: which is the "normal" range from an hemorheologist's viewpoint?, Clinical Hemorheology and Microcirculation 22, 287–303 .

J.P. Abraham, E.M. Sparrow, and R.D. Lovik, (2008). Unsteady, three-dimensional fluid mechanic analysis of blood flow in plaque-narrowed and plaque-freed arteries, International Journal of Heat and Mass Transfer 51, 5633-5641.

Jie Chen, Xi-Yun Lu, and Wen Wang, (2006). Non-Newtonian effects of blood flow on hemodynamics in distal vascular graft anastomoses, Journal of Biomechanics 39, 1983-1995.

Kim S., and Young I. (2000). A scanning capillary-tube viscometer, Review of Scientific Instrument 71, 3188–3192.

Kim S. and et al., (2002). A method of isolating surface tension and yield stress effects in a U-shaped scanning capillary-tube viscometer using a Casson model, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 103, 205–219.

Kim S. (2002). Study of Non-Newtonian Viscosity and Yield Stress of Blood in a Scanning Capillary-Tube Rheometer, Drexel University.

Kim S. and et al., (2009). Determination of rheological properties of whole blood with a scanning capillary-tube rheometer using constitutive models, Journal of Mechanical Science and Technology 23 , 1718–1726.

Manosh C. P., Md. Mamun Molla, and G. Roditi, (2009). Large–Eddy simulation of pulsatile blood flow, Medical Engineering & Physics 31,153-159.

Merrill W., (1969). Rheology of Blood, Physiological Review 49, 863-888.

P. F. Marques and etc., (2003). Modeling and Simulation of Pulsatile Blood Flow with a Physiologic Wave Pattern, Artificial Organs 27, 478-485.

Stoke G.G., (1845). On the theories of internal friction of fluids in motion, Trans. Cambridge Phil. Soc. 8, 287-305.

T. Khamdaeng and etc., (2012). Arterial stiffness identification of the human carotid artery using the stress–strain relationship in vivo, Ultrasonics 52, 2760-2767.

V. Deplano and M. Siou, (1999). Experimental and numerical study of pulsatile flows through stenosis: Wall shear stress analysis, Journal of Biomechanics 32, 1081-1090.

Victor A.N., Olusegun J.I., Joseph J., Peter H.S. and Charles L.F. (1997). Effects of Curvature and Stenosis-Like Narrowing on Wall Shear Stress in a Coronary Artery Model with Phasic Flow, Computers and Biomedical Research 30, 61–82.

Yildirim C and etc., (1999). Effect of Hematocrit on Blood Pressure Via Hyperviscosity, AJH 12, 739–743.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นายยศกร ประทุมวัลย์
วันเดือนปีเกิด	28 พฤษภาคม 2522
วุฒิการศึกษา	วิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต
ทุนการศึกษา	2557: สภาวิจัยแห่งชาติ

ผลงานทางวิชาการ

Pratumwal Y., Limtrakarn W., Premvaranon P. 2014. The analysis of blood flow past carotid bifurcation by using the one-way fluid solid interaction technique (FSI). Journal of research and applications in mechanical engineering. 2, 57-64.

ประสบการณ์ทำงาน	2546-ปัจจุบัน วิศวกร ศูนย์เทคโนโลยีโลหะและวัสดุแห่งชาติ

THAMMASAT UNIVERSITY