



ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์
สำหรับพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงไวบูล

โดย

นายจตุพร สมสมัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ปีการศึกษา 2559
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์โดยวิธีภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์
สำหรับพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงไวบูล

โดย

นายจตุพร สมสมัย



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ปีการศึกษา 2559
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Wald-type Confidence Intervals by the Profile Likelihood
Method for the Shape Parameter of Weibull Distribution

BY

MR. JATUPORN SOMSAMAI



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (APPLIED STATISTICS)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS

FACULTY OF SCIENE AND TECHNOLOGY

THAMMASAT UNIVERSITY

ACADEMIC YEAR 2016

COPYRIGHT OF THAMMASAT UNIVERSITY

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

วิทยานิพนธ์

ของ

นายจตุพร สมสมัย

เรื่อง

ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นโปर्फ
สำหรับพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงไวบูล

ได้รับการตรวจสอบและอนุมัติ ให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)

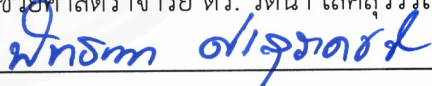
เมื่อ วันที่ 31 กรกฎาคม พ.ศ. 2560

ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์



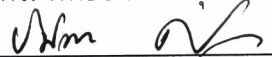
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รัตนา เลิศสุวรรณศรี)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์



(อาจารย์ ดร. พัทธ์ชนก ศรีสุระเดชชัย)

กรรมการสอบวิทยานิพนธ์



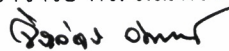
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รมิตา ศรีเหรา)

กรรมการสอบวิทยานิพนธ์



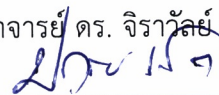
(อาจารย์ ดร. มณฑิรา ดวงสาพล)

กรรมการสอบวิทยานิพนธ์



(ศาสตราจารย์ ดร. จิราวัลย์ จิตรถเวช)

คณบดี



(รองศาสตราจารย์ ดร. ปกรณ์ เสริมสุข)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ สำหรับพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงไวบูล
ชื่อผู้เขียน	นายจตุพร สมสมัย
ชื่อปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติประยุกต์)
สาขาวิชา/คณะ/มหาวิทยาลัย	ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	อาจารย์ ดร. พัทธ์ชนก ศรีสุระเดชชัย
ปีการศึกษา	2559

บทคัดย่อ

การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงที่สำคัญสำหรับการสร้างตัวแบบของช่วงเวลาซึ่งประยุกต์ในหลายสาขาวิชา เช่น การประกันภัย วิศวกรรม ฟิสิกส์ หรือแม้กระทั่งทางการแพทย์ ในงานวิจัยนี้ได้เสนอสูตรช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald) สำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโปรไฟล์แบบปรับปรุงถูกใช้เพื่อกำจัดพารามิเตอร์สเกลที่ไม่ทราบ ช่วงความเชื่อมั่นใหม่ที่ได้นี้เรียกว่า ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF) และโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) ตามลำดับ แล้วใช้การจำลองมอนติคาร์โลในการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นใหม่ที่นำเสนอนี้กับช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ โปรไฟล์แบบปรับปรุงและแบบวัลด์ (วิธี PF MPF และ W ตามลำดับ) ใน 96 สถานการณ์ที่แตกต่างกัน เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบทั้ง 5 วิธี คือ ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น ผลการศึกษาพบว่า โดยทั่วไป ถ้าพารามิเตอร์รูปร่างมีค่าน้อย (ไม่เกิน 5) ช่วงความเชื่อมั่นแบบใหม่ WMPF จะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าระดับที่กำหนดถึงแม้ขนาดตัวอย่างเล็ก สำหรับกรณีพารามิเตอร์กำหนดรูปร่างมีค่ามากและตัวอย่างขนาดเล็ก ช่วงจากวิธี MPF จะเป็นช่วงที่แนะนำ และเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (ไม่น้อยกว่า 50) ทั้ง 5 วิธีมีแนวโน้มให้ช่วงความเชื่อมั่นใกล้เคียงกัน

คำสำคัญ: ช่วงความเชื่อมั่น, การแจกแจงไวบูล, ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์, มอนติคาร์โล

Thesis Title	Wald-type Confidence Intervals by the profile Likelihood Method for the Shape Parameter of Weibull Distribution
Author	Mr. Jatuporn Somsamai
Degree	Master of Science (Applied Statistics)
Major Field/Faculty/University	Department of Mathematics and Statistics Faculty of Science Thammasat University
Thesis Advisor	Dr. Patchanok Srisuradetchai
Academic Years	2016

ABSTRACT

The Weibull distribution is an important distribution for modelling a time period which is applied in many disciplines such as insurance, engineering, physics or even medicine. In this research, we propose formulas of Wald-type confidence intervals for the scale parameter. The profile and modified profile likelihood functions are employed to eliminate an unknown scale parameter. New confidence intervals are called Wald confidence intervals using profile (WPF) and modified profile (WMPF) likelihood. Then the Monte Carlo simulation is used to compare newly-proposed confidence intervals with profile, modified-profile and Wald confidence intervals (methods PF, MPF and W respectively) in 96 different situations. Criteria for comparing 5 methods are the coverage probability and the average length of confidence intervals. The results from this study indicate that generally if shape parameters are small (less than or equal to 5) the new confidence interval WMPF will give the coverage probability not less than a nominal level in spite of the small sample size. For cases with large values of shape parameters and small sample sizes, intervals from method MPF would be recommended. When the sample size is large (not less than 50), all 5 methods tend to produce about the same confidence intervals.

Keywords: Confidence interval, Weibull distribution, Profile likelihood, Monte Carlo

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี จากความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ชี้แนะแนวทางและมอบความรู้แก่ผู้วิจัย โดยเฉพาะอย่างยิ่งขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร. พิทธิชนก ศรีสุรเดชชัย และกรรมการวิทยานิพนธ์ทุกท่านที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ตลอดจนตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและสำนึกในพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณทุนเรียนดีเพื่อศึกษาต่อ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่ช่วยส่งเสริมสนับสนุนการเรียนของผู้วิจัย ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ของภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่อำนวยความสะดวกในการติดต่อประสานงานด้านต่างๆ และขอบคุณรุ่นพี่ เพื่อน และรุ่นน้องที่คอยให้กำลังใจกับผู้วิจัย

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณสมาชิกในครอบครัวทุกท่าน ที่ช่วยส่งเสริมสนับสนุนการเรียนและให้กำลังใจกับผู้วิจัยตลอดมาจนสำเร็จการศึกษา

นาย จตุพร สมสมัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	(1)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	(2)
กิตติกรรมประกาศ	(3)
สารบัญตาราง	(9)
สารบัญภาพ	(11)
รายการสัญลักษณ์และคำย่อ	(14)
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	6
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	6
1.4 เกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณา	7
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้จากการวิจัย	8
1.6 คำจำกัดความ	8
บทที่ 2 วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	10
2.1 การแจกแจงไวบูล (Weibull Distribution)	10
2.2 วิธีการหาตัวประมาณพารามิเตอร์	12
2.3 การประมาณพารามิเตอร์ด้วยช่วง	15
2.4 การประมาณที่ใช้กำลังสองของลอคฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น	19

2.5 การแจกแจงของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด	20
2.6 สถิติแบบวัลด์ (The Wald Statistic)	22
2.7 การเปรียบเทียบพิชเชอร์อินฟอเมชันกับค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชัน	25
2.8 ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์	26
2.9 ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง	28
บทที่ 3 วิธีการวิจัย	30
3.1 ช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 5 วิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้	30
3.1.1 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์	30
3.1.2 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ แบบปรับปรุง	30
3.1.3 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็น	32
3.1.4 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็น โปรไฟล์	41
3.1.5 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็น โปรไฟล์แบบปรับปรุง	48
3.2 ตัวอย่างการหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ทั้ง 5 วิธี	54
3.2.1 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็น โปรไฟล์	55
3.2.2 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็น โปรไฟล์แบบปรับปรุง	55
3.2.3 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดย ใช้ภาวะน่าจะเป็น	56
3.2.4 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดย ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์	56
3.2.5 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดย ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์	57
3.3 การจำลองสถานการณ์	58

3.3.1	ศึกษาการสร้างช่วงความเชื่อมั่น	58
3.3.2	กำหนดขอบเขตการศึกษา	58
3.3.3	การจำลองประชากร	58
3.3.4	การสุ่มขนาดตัวอย่างจากประชากร	58
3.3.5	การหาขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น	59
3.3.6	ตรวจสอบความถูกต้องของขอบเขตบนและล่างของช่วงความเชื่อมั่น	59
3.3.7	การทำซ้ำ	59
3.3.8	การคำนวณค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม	59
3.3.9	การคำนวณค่าประมาณความยาวโดยเฉลี่ย	59
บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล		62
4.1	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	63
4.2	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 1$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	64
4.3	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	66
4.4	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 10$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	67
4.5	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 1$ และ $\beta = 0.5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	69
4.6	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 1$ และ $\beta = 1$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	71

4.7 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 1$ และ $\beta = 5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	72
4.8 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 1$ และ $\beta = 10$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	74
4.9 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 5$ และ $\beta = 0.5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	76
4.10 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 5$ และ $\beta = 1$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	77
4.11 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 5$ และ $\beta = 5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	79
4.12 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 5$ และ $\beta = 10$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง	81
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	83
5.1 สรุปผลการวิจัย	83
5.1.1 สรุปผลของค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β	83
5.1.1.1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β	85
5.1.1.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β	87
5.1.2 สรุปผลของค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β	90

5.1.2.1 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β	90
5.1.2.2 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β	92
5.2 วิจัยและข้อเสนอแนะ	95
รายการอ้างอิง	97
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย	101
ภาคผนวก ข บทพิสูจน์	113
ภาคผนวก ค ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น	125
ประวัติผู้เขียน	135

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 ความเร็วลมเฉลี่ยรายเดือน (m/s) ที่เมืองโกกาทา (Kolkata) จากวันที่ 1 มีนาคม 2552 ถึง 31 มีนาคม 2552	54
5.1 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้ วิธีภาชนะน่าจะเป็นเป็นโพรไฟล์ (PF)	90
5.2 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้ วิธีภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)	90
5.3 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W)	91
5.4 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (WPF)	91
5.5 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดย ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)	91
5.6 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี	92
5.7 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้ วิธีภาชนะน่าจะเป็นเป็นโพรไฟล์ (PF)	93
5.8 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธี ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)	93
5.9 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W)	93
5.10 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดย ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (WPF)	94
5.11 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดย ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)	94
5.12 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี	95
6.1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ พารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาชนะน่าจะเป็นเป็นโพรไฟล์ (PF)	125
6.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ พารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาชนะน่าจะเป็นเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)	126

ตารางที่	หน้า
6.3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W)	127
6.4 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)	128
6.5 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)	129
6.6 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)	130
6.7 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)	131
6.8 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W)	132
6.9 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)	133
6.10 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)	134

สารบัญญภาพ

ภาพที่	หน้า
1.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล	1
2.1 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล	11
3.1 การหาขอบเขตบนและล่างของช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็น	31
3.2 แผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรม R Studio เวอร์ชัน 1.0.136	61
4.1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	64
4.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	64
4.3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	65
4.4 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	66
4.5 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	67
4.6 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	67
4.7 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	68

ภาพที่	หน้า
4.8 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	69
4.9 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	70
4.10 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	70
4.11 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	72
4.12 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	72
4.13 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	73
4.14 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	74
4.15 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	75
4.16 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 1, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	75

ภาพที่	หน้า
4.17 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	77
4.18 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	77
4.19 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	78
4.20 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	79
4.21 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	80
4.22 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	80
4.23 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	82
4.24 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200	82
5.1 วิธีที่ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ในแต่ละสถานการณ์	84
5.2 ค่าประมาณกับความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี	86
5.3 ค่าประมาณกับความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี	89

รายการสัญลักษณ์และคำย่อ

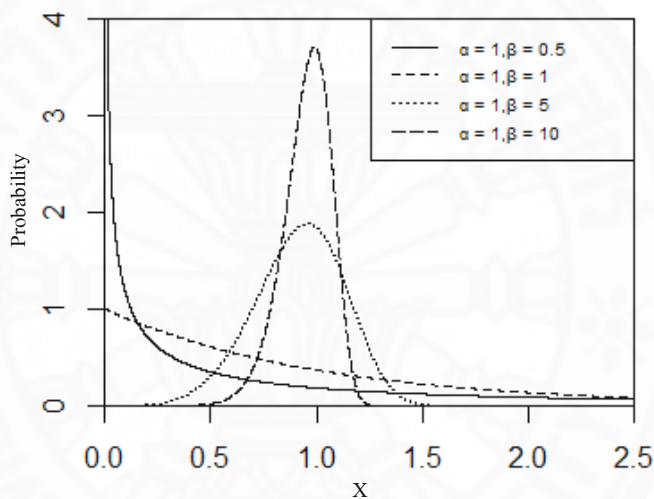
สัญลักษณ์/คำย่อ	คำเต็ม/คำจำกัดความ
$\hat{\theta}_{ML}$	ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ
$\hat{\alpha}_{ML}$	ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ α
$\hat{\beta}_{ML}$	ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ β
$L(\theta)$	ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม
$l(\theta)$	ลอกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม
$\tilde{L}(\theta)$	ภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ (Relative Likelihood)
$\tilde{l}(\theta)$	ลอกของอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น
$S(\theta)$	ฟังก์ชันสกอร์ (Score Function)
$I(\theta)$	ฟิชเชอร์อินฟอเมชัน (Fisher Information)
$I_p(\theta)$	ฟิชเชอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์
$I_m(\theta)$	ฟิชเชอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง
$J(\theta)$	ค่าคาดหวังของฟิชเชอร์อินฟอเมชัน
$J_p(\theta)$	ค่าคาดหวังของฟิชเชอร์อินฟอเมชันสำหรับภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์
$J_m(\theta)$	ค่าคาดหวังของฟิชเชอร์อินฟอเมชันสำหรับภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง
γ	สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น
$se(\hat{\theta}_{ML})$	ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\theta}_{ML}$
$\tilde{\alpha}$	ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $L(\alpha, \beta)$ โดยกำหนดให้ β เป็นค่าคงที่

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

นักคณิตศาสตร์ชาวสวีเดนชื่อ Waloddi Weibull ได้นำเสนอการแจกแจงไวบูลในปี ค.ศ. 1951 ซึ่งการแจกแจงไวบูลเป็นที่รู้จักอย่างแพร่หลายและมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลดังภาพที่ 1.1 โดยมี α เป็นพารามิเตอร์สเกลและ β เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง



ภาพที่ 1.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล

การแจกแจงไวบูลถูกใช้อย่างกว้างขวางในด้านของการวิเคราะห์ข้อมูลอายุการใช้งาน (Lifetime Data Analysis) เช่น การศึกษาระยะเวลาการเกิดของเนื้องอกในมนุษย์หรือในสัตว์ทดลอง ศึกษาระยะเวลาที่ชิ้นส่วนอุปกรณ์จะหมดอายุการใช้งานหรือได้รับการซ่อมแซมในช่วงเวลาที่ติดต่อกัน รวมไปถึงระยะเวลาสำหรับการพัฒนาการเกิดโรค ระยะเวลาการเติบโตของเซลล์มะเร็ง ระยะเวลาการแพร่ระบาดของโรค และระยะเวลาที่รอดชีวิตของผู้ป่วยจากการได้รับการรักษาทางการแพทย์ ค่าที่ได้จากการวัดอาจอยู่ในรูปของจำนวนครั้ง หรือจำนวนรอบของการล้มเหลวสำหรับชิ้นส่วนอุปกรณ์ หรืออาจอยู่ในรูปของระยะเวลาที่มีหน่วยเป็น วินาที นาที หรือชั่วโมง โดยทั่วไปลักษณะข้อมูลดังกล่าวสามารถใช้การแจกแจงไวบูลอธิบายได้ ส่วนในด้านวิศวกรรมศาสตร์จะศึกษาเกี่ยวกับระดับแรงดันไฟฟ้าในกรณีที่ฉนวนไฟฟ้าล้มเหลวและใช้เป็นส่วนช่วยวิเคราะห์ในการหาตำแหน่งติดตั้งของกั้นลมนผลิตไฟฟ้าหรือเครื่องกำเนิดไฟฟ้า ยิ่งไปกว่านั้นการแจกแจงไวบูลถูกใช้ในการบริหาร

ความเสี่ยงด้านประกันภัย (Insurance Risk Management) เช่น การสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ประกันภัยโดยใช้ข้อมูลของค่าสินไหมทดแทน

ปัญหาในการอนุมานเชิงสถิติโดยปกติแล้วสามารถแบ่งได้ 3 วัตถุประสงค์ คือ (1) ปัญหาการประมาณ (Estimation Problem) ซึ่งก็คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบทางสถิติ (2) ปัญหาการเลือกตัวแบบ (Model Selection Problem) บ่อยครั้งที่ผู้วิจัยมีหลายตัวแบบในการศึกษาข้อมูลชุดหนึ่งๆ แต่ต้องการทราบตัวแบบที่ดีที่สุดและ (3) ปัญหาการทำนาย (Prediction Problem) ซึ่งผู้วิจัยต้องการทำนายค่าของตัวแปรที่ศึกษาในอนาคตโดยใช้ข้อมูลที่มีอยู่ (Held & Bové, 2014) ในงานวิจัยนี้จัดว่าอยู่ในส่วนของปัญหาการประมาณโดยสนใจการประมาณแบบช่วง (Interval Estimation) สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์จะแบ่งได้ 2 แบบ คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) สำหรับการประมาณค่าแบบจุดเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์หรือฟังก์ชันของพารามิเตอร์ โดยเป็นค่าเพียงค่าเดียว (Single Valued Estimation) หรือจุดเดียว (Point Estimation) ซึ่งคำนวณได้จากตัวอย่าง การประมาณค่าแบบนี้อาจจะมีค่าเท่ากับค่าพารามิเตอร์หรืออาจจะคลาดเคลื่อนไปจากค่าพารามิเตอร์ได้ ส่วนการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงเป็นการประมาณที่จะได้ช่วงของตัวเลขที่ประมาณ ซึ่งมีคุณสมบัติว่าค่าที่แท้จริงของประชากรจะอยู่ในช่วงที่ประมาณได้ด้วยความเชื่อมั่นระดับหนึ่งซึ่งการประมาณค่าแบบช่วงเป็นการประมาณโดยอาศัยตัวประมาณแบบจุดและการแจกแจงภาวะน่าจะเป็นของตัวประมาณนั้น ซึ่งผลจากการประมาณจะทำให้ผู้วิจัยเชื่อมั่นได้ในระดับหนึ่งว่าช่วงที่ประมาณได้คลุมค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าแบบช่วงสามารถบอกขอบเขตของค่าประมาณได้ดีกว่าการประมาณค่าแบบจุด

การอนุมานเชิงสถิติสามารถแบ่งได้ตามแนวคิดพื้นฐานได้เป็น 2 แนวคิด (1) การอนุมานแบบความถี่ (Frequentist Inference) หรือเรียกว่าวิธีดั้งเดิม (Classical Method) และ (2) การอนุมานแบบเบย์ (Bayesian Inference) สองแนวคิดนี้มีความแตกต่างกันสิ้นเชิง กล่าวโดยสรุปคือ การอนุมานแบบความถี่นั้นจะสมมติให้พารามิเตอร์ที่สนใจเป็นค่าคงที่แล้วการอนุมานจะขึ้นกับการแจกแจงค่าตัวอย่าง (Sampling Distribution) นั้นหมายถึงการทดลองที่สนใจต้องสามารถทำซ้ำได้ (Repeatable Experiment) และความน่าจะเป็นของแนวคิดความถี่นั้น หมายถึงลิมิตของความถี่สัมพัทธ์ซึ่งผู้ที่มีอิทธิพลต่อการอนุมานดังกล่าวนี้ คือ Fisher และ Neyman (Lehmann, 2011) สำหรับแนวคิดแบบเบย์จะถือว่าพารามิเตอร์ที่สนใจเป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นหรือที่เรียกว่า การแจกแจงก่อน (Prior Distribution) และเมื่อเก็บข้อมูลมาแล้วจะนำข้อมูลไปปรับปรุงการแจกแจงก่อนซึ่งคือ การหาการแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) แล้วใช้การ

ແຈกแจงที่ได้นี้ไปทำการอนุมานพารามิเตอร์ที่สนใจ ผู้ที่มีอิทธิพลต่อการอนุมานแบบนี้ คือ De Bruno (1964) Jeffreys (1939) และ Savage (1972)

Bandyopadhyay และ Forster (2011) ได้กล่าวถึงแนวคิดหรือกระบวนทัศน์ (Paradigm) ของการอนุมานเชิงสถิติเพิ่มขึ้นอีก 2 กระบวนทัศน์ คือ (1) สถิติบนพื้นฐานของภาชนะน่าจะเป็น (Likelihood – Based Statistics) และ (2) สถิติบนพื้นฐานของเกณฑ์สารสนเทศเอเคเคียน (Akaikean-Information Criterion-Based Statistics) การอนุมานเชิงสถิติอันหลังนี้จะขึ้นอยู่กับมาตรวัดสารสนเทศของอะกะอิเกะซึ่งเสนอโดย Hirotugu Akaike ในปี ค.ศ. 1971 ในงานประชุมวิชาการและถูกตีพิมพ์ในเล่มรายงานการประชุม (Proceeding) ในปี ค.ศ. 1973 สารสนเทศนี้เป็นที่นิยมในการคัดเลือกตัวแบบ (Vrieze, 2012)

งานวิจัยครั้งนี้จะเป็นการหาช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้ฟังก์ชันภาชนะน่าจะเป็น (Likelihood Function) จึงถือว่าเป็นสถิติบนพื้นฐานของภาชนะน่าจะเป็น คำว่า “ภาชนะน่าจะเป็น” หรือ “Likelihood” นั้นเป็นที่รู้จักแพร่หลายจากตัวประมาณ “Maximum Likelihood Estimator” ซึ่ง Ronald Fisher ผู้ซึ่งได้ขนานนามว่าเป็นบิดาแห่งสถิติสมัยใหม่ได้มีบทบาทต่อตัวประมาณค่าประเภทนี้อย่างมาก (Kotz et al., 2005) ฟังก์ชันภาชนะน่าจะเป็น (Likelihood Function) นิยามโดย

$$L(\theta; X_{1:n}) = f(X_{1:n}; \theta) \quad , \theta \in \Theta$$

โดยที่ Θ แทนปริภูมิพารามิเตอร์ (Parameter Space) และ $X_{1:n}$ แทนเวกเตอร์ของข้อมูล ให้พิจารณาว่าฟังก์ชัน $L(\theta; X_{1:n})$ เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ เมื่อทราบ $X_{1:n}$ โดยปกติแล้วการสอนในระดับปริญญาตรี ผู้เรียนมักจะได้ใช้ฟังก์ชันภาชนะน่าจะเป็นในการหาตัวประมาณแบบภาชนะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator: MLE) ซึ่งหาได้จาก

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

โดยที่ $L(\theta)$ คือ ฟังก์ชันภาชนะน่าจะเป็น จะเห็นได้ว่า $\hat{\theta}_{ML}$ คือ ค่าของพารามิเตอร์ θ ในปริภูมิพารามิเตอร์ Θ ที่ทำให้ $L(\theta)$ มีค่าสูงที่สุด (Held & Bové, 2014) อย่างไรก็ตามในการอนุมานเชิงสถิตินิยมใช้ภาชนะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ (Relative Likelihood) ซึ่งนิยามโดย

$$\tilde{L}(\theta) = \frac{L(\theta; X_{1:n})}{\max L(\theta; X_{1:n})}$$

ช่วงภาวะน่าจะเป็นสำหรับพารามิเตอร์ θ คือ เซตของ θ ที่มีคุณสมบัติ $\{\theta | \tilde{L}(\theta) \geq c\}$ โดยที่ c คือค่าคงที่ (Fisher, 1973) สำหรับการกำหนดค่า c สามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบทของวิลค์ส (Wilks' theorem) ที่ว่า $-2\log \tilde{L}(\theta)$ มีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution) เป็นการแจกแจงไคกำลังสอง ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ คือ

$$\left\{ \theta \mid \tilde{L}(\theta) \geq e^{-\frac{1}{2}\chi_{1,\gamma}^2} \right\}$$

โดยที่ $\chi_{1,\gamma}^2$ แทน ควอนไทล์ที่ γ ของตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่มีองศาอิสระเท่ากับ 1 และ $\gamma \in (0,1)$ การแจกแจงไวบูลจะมี 2 พารามิเตอร์ คือ พารามิเตอร์สเกล α (Scale Parameter) และพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง β (Shape Parameter) ซึ่งในกรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์สเกล α ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นจะขึ้นอยู่กับ 2 พารามิเตอร์ซึ่งจะเรียกว่า ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม ซึ่งแทนด้วย $L(\alpha, \beta)$ เพื่อที่จะสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์สำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β จำเป็นต้องกำจัดพารามิเตอร์รบกวน (Nuisance Parameter) α ในงานวิจัยนี้จะใช้ 2 วิธีด้วยกัน คือ ใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (Profile Likelihood Function) และฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (Modified Profile Likelihood Function)

Wiel และ Meeker (1990) ได้มีการเสนอช่วงความเชื่อมั่นเอส (S-Confidence Interval) พารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูล ต่อมา Heo และคณะ (2001) ได้มีการเสนอช่วงความเชื่อมั่นของควอนไทล์ของการแจกแจงไวบูล Mahdi (2004) เสนอช่วงความเชื่อมั่นแบบไม่มีเงื่อนไขพารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูล หลังจากนั้น Phan และ Mccool (2009) ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นแบบแท้จริง (Exact Confidence Interval) พารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูลในกรณีที่ทราบพารามิเตอร์สเกล α ซึ่งช่วงความเชื่อมั่นข้างต้นนี้จะกล่าวไว้อย่างละเอียดในบทที่ 2 จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าไม่มีงานวิจัยที่สร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโปรไฟล์แบบปรับปรุงของการแจกแจงไวบูล

การแจกแจงไวบูลได้ถูกใช้อย่างกว้างขวางในการศึกษาการเพิ่มขึ้นของอัตราความล้มเหลว (Increasing Failure Rate) และการลดลงของอัตราความล้มเหลว (Decreasing Failure Rate) เพราะว่าอัตราความล้มเหลวมีแนวโน้มเป็นลักษณะของการแจกแจงไวบูลซึ่งอธิบายได้ด้วยค่าพารามิเตอร์รูปร่าง β จึงทำให้การประมาณค่าของพารามิเตอร์รูปร่าง β เป็นที่สนใจ ในวรรณกรรมจะมีอยู่หลายวิธีสำหรับวิธีการประมาณค่า เช่น วิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation: MLE) ตัวประมาณเชิงเส้น (Linear Estimator)

(Lawless, 1982) วิธีการพล็อตภาวะน่าจะเป็นและในการปรับปรุงการพล็อตภาวะน่าจะเป็น (Drapella & Kosznik, 1999) ตัวประมาณแบบ Shrinkage (Shrinkage Estimator) (Pendey & Singh, 1993) เป็นต้น ในวิธีการประมาณพารามิเตอร์ที่กล่าวมานี้ วิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดได้เป็นที่นิยมอย่างมากเพราะเป็นวิธีที่ง่ายในการประมาณและยังมีประสิทธิภาพ (Ross, 1994) การพล็อตภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลถูกใช้บ่อยในการประมาณค่าแบบคร่าวๆเพื่อเป็นค่าเริ่มต้นสำหรับกระบวนการเชิงตัวเลข (Numerical Procedures) ในการแก้สมการภาวะน่าจะเป็น อย่างไรก็ตามวิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ β สำหรับการแจกแจงไวบูลเป็นที่รู้จักกันดีว่าเป็นตัวประมาณที่เอนเอียงและเอนเอียงมากในกรณีที่มีตัวอย่างขนาดเล็กหรือมีการตัดปลายของข้อมูลที่เอนเอียง (Mackisack & Stillman, 1996) และ Ross (1994) ให้สูตรอย่างง่ายของการไม่เอนเอียงสำหรับกรณีของตัวอย่างที่ไม่ถูกตัดปลาย โดยแสดงให้เห็นถึงการใช้งานที่ค่อนข้างดี และมีการเพิ่มสูตรอื่นๆสำหรับกรณีข้อมูลที่ถูกลดปลายประเภทที่ 2 (Type II Censored Data) ต่อมา Yang และ Xie (2003) ได้เสนอตัวประมาณของพารามิเตอร์รูปร่าง β สำหรับการแจกแจงไวบูลที่ขึ้นกับภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ Cox และ Reid (1987; 1989; 1992) ภายใต้ข้อสมมติฐานการตั้งฉากของพารามิเตอร์ (Parameter Orthogonalization) ผลที่ได้คือการเปลี่ยนแปลงอย่างมากของการประมาณค่าพารามิเตอร์ β และยังเกี่ยวข้องกับการปรับปรุงภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์หรือสมการภาวะน่าจะเป็น ซึ่งตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบปรับปรุง (Modified MLE) ให้ผลที่น่าพอใจเมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบปกติ โดยในกรณีส่วนใหญ่ความเอนเอียงสัมพัทธ์ (Relative Bias) ลดลงเหลือน้อยกว่า 1% ดังนั้นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบปรับปรุงมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบปกติ และมียุทธศาสตร์มากกว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่ไม่เอนเอียงของ Ross (Unbiased MLE of Ross) (1994; 1996) ซึ่งตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดแบบปรับปรุงใช้งานได้ดีที่สุดสำหรับกรณีที่ข้อมูลสมบูรณ์หรือกรณีข้อมูลที่ถูกลดปลายประเภทที่ 2

การศึกษาข้างต้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโปรไฟล์แบบปรับปรุงสำหรับพารามิเตอร์รูปร่างของการแจกแจงไวบูล ซึ่งในงานวิจัยนี้จะหาช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมด 5 วิธี ได้แก่ (1) ช่วงความเชื่อมั่นของ β แบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (2) ช่วงความเชื่อมั่นของ β แบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง ซึ่งทั้งสองวิธีจะใช้คุณสมบัติของช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ จะเห็นได้ว่าต้องใช้วิธีการพล็อตกราฟช่วยในการหาช่วงความเชื่อมั่นและใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ในการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่าง ซึ่งจะกล่าวอย่างละเอียดไว้ในบทที่ 3 และ (3) ช่วงความเชื่อมั่นของ β แบบวัลด์ ซึ่งวิธีนี้จะปฏิบัติตามทฤษฎีของวัลด์ซึ่งจะกล่าวไว้ในบทที่ 2 จาก 3 วิธีข้างต้นผู้วิจัยจึงได้เสนอการหา

สูตรอย่างง่ายซึ่งจะนำทฤษฎีของการหาช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์และแบบวัลด์มาประยุกต์กัน จะได้เป็น (4) ช่วงความเชื่อมั่นของ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ และ (5) ช่วงความเชื่อมั่นของ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยมีดังนี้

1. สร้างสูตรสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald) ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโปรไฟล์แบบปรับปรุงของพารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูล

2. หาค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (Coverage Probability) โดยใช้การจำลองมอนติคาร์โล (Monte-Carlo Simulation) ของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 5 วิธี คือ

2.1 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)

2.2 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)

2.3 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W)

2.4 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)

2.5 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)

3. เปรียบเทียบค่าประมาณความยาวโดยเฉลี่ย (Average Length) ของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 5 วิธีข้างต้น

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1. การศึกษาเชิงคณิตศาสตร์

หาสูตรอย่างง่ายสำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β ในกรณีที่ไม่ทราบพารามิเตอร์สเกล α โดยใช้ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ดังนี้

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{J(\hat{\beta}_{ML})^{-1}}$$

เมื่อ $z_{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{(1+\gamma)}{2}$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน γ แทน สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $\gamma \in (0,1)$ และ $J(\hat{\beta}_{ML})^{-1}$ แทน ผกผันค่าคาดหวังของค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชัน และหา $J(\hat{\beta}_{ML})^{-1}$ ได้จากฟังก์ชันลอคภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโปรไฟล์แบบปรับปรุงโดยการกำจัดพารามิเตอร์รบกวน α

2. การศึกษาเชิงจำลอง

2.1 ให้ X_1, X_2, \dots, X_n แทน ตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงไวบูลที่มีพารามิเตอร์ α และ β

2.2 ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาได้แก่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

2.3 พารามิเตอร์สเกล $\alpha = 0.5, 1$ และ 5

2.4 พารามิเตอร์รูปร่าง $\beta = 0.5, 1, 5$ และ 10

2.5 ช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 0.95 และ 0.99 ของพารามิเตอร์ β ทั้ง 5 วิธี

2.6 การจำลองข้อมูลจะใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte-Carlo Simulation) ด้วยโปรแกรม R Studio โดยการทำซ้ำ 10,000 รอบ ในแต่ละกรณีของ n, α, β และระดับความเชื่อมั่น

1.4 เกณฑ์ที่ใช้ในการพิจารณา

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 5 วิธี คือค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (Coverage Probability) และค่าประมาณความยาวโดยเฉลี่ย (Average Length) ของช่วงความเชื่อมั่น โดยพิจารณาช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด หลังจากนั้นจะเปรียบเทียบค่าประมาณความยาวช่วงความเชื่อมั่น ซึ่งวิธีใดที่ให้ค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงเชื่อมั่นแคบที่สุดจะถือว่าวิธีนั้นเป็นวิธีการประมาณแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ β ที่ดีที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้น โดยการคำนวณค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและค่าประมาณความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงเชื่อมั่น สามารถหาได้ดังนี้

1. การประมาณค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณขึ้นจากการทำซ้ำ 10,000 รอบ พิจารณาจากช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้ในแต่ละวิธี ทำการนับจำนวนครั้งที่ทั้งหมดที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมพารามิเตอร์ β หาค่าด้วยจำนวนครั้งที่ทำซ้ำ นั่นคือ

$$CP = \frac{\sum_{i=1}^{10,000} I_{[L_i, U_i]}(\beta)}{10,000}$$

โดยที่ $I_{[L_i, U_i]}(\beta)$ จะมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ β อยู่ในช่วง $[L_i, U_i]$ และเท่ากับศูนย์เมื่ออยู่นอกช่วง $[L_i, U_i]$ เมื่อ L_i และ U_i เป็นขอบเขตล่างและบนของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i ตามลำดับ

2. ค่าประมาณความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงเชื่อมั่น พิจารณาจากผลต่างระหว่างค่าขอบเขตบน (U) และขอบเขตล่าง (L) ของช่วงความเชื่อมั่น และนำผลต่างที่ได้แต่ละครั้งมาบวกกันหารด้วยจำนวนครั้งที่ทำซ้ำ นั่นคือ

$$AL = \frac{\sum_{i=1}^{10,000} (U_i - L_i)}{10,000}$$

โดยที่ L_i และ U_i แทน ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i ตามลำดับ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้จากการวิจัย

1. ได้สูตรของช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโปรไฟล์แบบปรับปรุงสำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูล ซึ่งสามารถคำนวณด้วยมือได้เพราะโดยปกติแล้วการหาช่วงแบบนี้จะต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่น

2. เพื่อเป็นแนวทางในการเลือกขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมกับสถานการณ์ในการหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูล

1.6 คำจำกัดความ

ตัวอย่างสุ่ม (Random Sample) มีนิยามดังนี้ $X_{1:n} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรสุ่มที่แต่ละ $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ สุ่มมาจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ และแต่ละตัวเป็นตัวแปรอิสระกันและมีการแจกแจงเดียวกัน (Independent and Identically Distribution-iid)

พารามิเตอร์ (Parameter) คือ ค่าคงที่ๆ แสดงคุณลักษณะบางประการของประชากร

ตัวสถิติ (Statistic) คือ ฟังก์ชันของค่าสังเกตที่วัดมาจากหน่วยตัวอย่างต่างๆ ที่ถูกเลือกขึ้นมาเป็นตัวอย่าง ฟังก์ชันดังกล่าวจะไม่มีตัวพารามิเตอร์อื่นใดที่ยังไม่ทราบค่าติดอยู่ ตัวสถิติที่ได้จะใช้เป็นตัวประมาณ (Estimator) ของพารามิเตอร์ ค่าสถิติที่คำนวณออกมาเป็นตัวเลขจะใช้เป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์

ปริมาณหมุน (Pivots) มีนิยามดังนี้ ให้ $X_{1:n}$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ เมื่อ θ เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริง ให้ $V(X_1, \dots, X_n; \theta)$ เป็นฟังก์ชันของ $X_{1:n}$ และ θ ตัวแปรสุ่ม $V(X_1, \dots, X_n; \theta)$ เป็นปริมาณหมุน ก็ต่อเมื่อ การแจกแจงความน่าจะเป็นของ V ไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ θ

ตัวประมาณคงเส้นคงวา (Consistent Estimator) มีนิยามดังนี้ ให้ $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณของ θ ที่มาจากตัวอย่างขนาด n ตัวประมาณ $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณคงเส้นคงวาของ θ ก็ต่อเมื่อ $\hat{\theta}_n$ ลู่เข้าในค่าความน่าจะเป็น (Converge in probability) ไปหา θ นั่นคือ เมื่อ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon] = 0$

ตัวประมาณไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) มีนิยามดังนี้ ตัวประมาณ $\hat{\theta}_{ML} = \hat{\theta}_{ML}(X_1, \dots, X_n)$ เป็นตัวประมาณไม่เอนเอียงของพารามิเตอร์ θ ก็ต่อเมื่อ $E[\hat{\theta}_{ML}] = \theta$

บทที่ 2

วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ การแจกแจงไวบูล วิธีการหาตัวประมาณพารามิเตอร์ การประมาณพารามิเตอร์ด้วยช่วง การประมาณที่ใช้กำลังสองของลอค ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น การแจกแจงของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด สถิติแบบวัลด์ การเปรียบเทียบพิชเชอร์อินโฟเมชันกับค่าคาดหวังพิชเชอร์อินโฟเมชัน ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ และฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง ดังต่อไปนี้

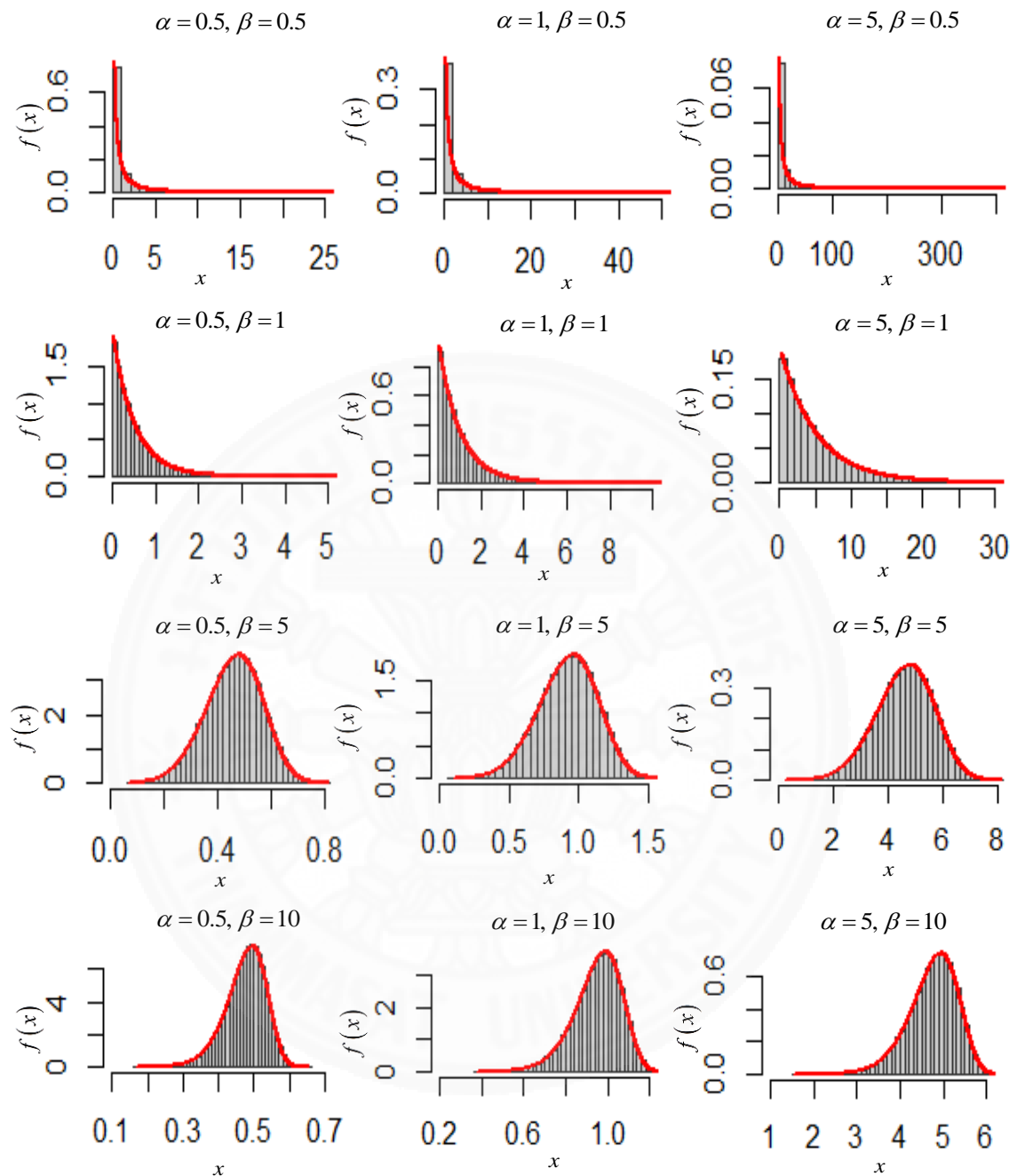
2.1 การแจกแจงไวบูล (Weibull Distribution)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไวบูลด้วยพารามิเตอร์ β คือพารามิเตอร์รูปร่าง (Shape Parameter) และ α คือ พารามิเตอร์สเกล (Scale Parameter) โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล คือ

$$f(x; \alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x, \alpha, \beta > 0$$

ในที่นี้จะให้แทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim Wb(\alpha, \beta)$ จากภาพ 1.1 สังเกตได้ว่า β มีผลกับฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงไวบูลอย่างมาก สำหรับ $0 < \beta < 1$ ฟังก์ชันความหนาแน่นจะเข้าสู่ศูนย์เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ศูนย์และจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $x > 0$ สำหรับ $\beta = 1$ ฟังก์ชันการแจกแจงไวบูลจะลดรูปเหลือเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเลขชี้กำลัง (Exponential Distribution) สำหรับ $\beta > 1$ ฟังก์ชันความหนาแน่นจะเข้าสู่ศูนย์ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ศูนย์และเพิ่มขึ้นจนถึงฐานนิยมแล้วลดลงหลังจากนั้น ซึ่งสิ่งที่น่าสนใจนั้นคือ ฟังก์ชันความหนาแน่นจะมีความชันเป็นลบอนันต์ เมื่อ $0 < \beta < 1, x = 0$ มีความชันเป็นบวกอนันต์ เมื่อ $1 < \beta \leq 2, x = 0$ และมีความชันเป็นศูนย์ เมื่อ $\beta > 2, x = 0$ นอกจากนี้ค่าความเบ้ (Skewness) และสัมประสิทธิ์ความผันแปร (Coefficient of variation) มีค่าขึ้นกับพารามิเตอร์รูปร่างเพียงอย่างเดียว สำหรับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วมของ (α, β) เมื่อกำหนด x_1, x_2, \dots, x_n คือ

$$L(\alpha, \beta; x_{1:n}) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}}$$



ภาพที่ 2.1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล

Scholz (2008) ได้มีการพิสูจน์ไว้ว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูล คือ $E(X) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ และ $Var(X) = \alpha^2 \left[\Gamma(1 + 2/\beta) - \{\Gamma(1 + 1/\beta)\}^2 \right]$ ตามลำดับ Mahdi (2004) ได้พิสูจน์ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ α และ β คือ

$$\hat{\alpha} = \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \right)^{1/\hat{\beta}} \quad \text{และ} \quad \hat{\beta} = \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \ln(x_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\beta}} \right)^{-1} - n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \right]^{-1}$$
 ตามลำดับ จะสังเกตได้ว่า $\hat{\beta}$ ไม่มีรูปปิด (Closed Form)

2.2 วิธีการหาตัวประมาณพารามิเตอร์

การประมาณค่าของพารามิเตอร์หรือฟังก์ชันของพารามิเตอร์ มีวิธีหาอยู่หลายวิธีทั้งที่เป็นแบบจุดและแบบช่วง แต่ละวิธีอาจให้ผลลัพธ์ของตัวประมาณพารามิเตอร์ที่เหมือนหรือแตกต่างกันได้ ตัวประมาณที่หาได้อาจมีสมบัติบางประการที่แตกต่างกัน ซึ่งในการหาตัวประมาณจะกำหนดให้ $X_{1:n} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$ ในที่นี้ทราบรูปแบบของฟังก์ชัน $f(x; \theta)$ แต่ไม่ทราบค่าของพารามิเตอร์ θ โดยที่ Θ เป็นปริภูมิพารามิเตอร์ (Parameter Space) ในกรณีที่พารามิเตอร์มากกว่า 1 ตัว ให้ $(\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ p ตัว ซึ่ง θ_j แต่ละตัวเป็นจำนวนจริง นั่นคือ ปริภูมิพารามิเตอร์ Θ เป็นปริภูมิแบบยูคลิดมิติ p ซึ่งนักสถิติต้องการหาสถิติ $\hat{\theta}_{ML} = \hat{\theta}_{ML}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ซึ่งแทน ฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม X_1, X_2, \dots, X_n ที่ใช้ประมาณ θ หรือประมาณฟังก์ชันของ θ ซึ่งในที่นี้จะใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Method of Maximum Likelihood) วิธีการประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีความเป็นมาโดยเป็นวิธีการที่ใช้กันแพร่หลายมากที่สุด มีแนวความคิดมานานตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ 18 Gauss จากปี ค.ศ. 1777 ถึง ค.ศ. 1855 และ Bernoulli ได้ใช้วิธีการนี้มาแล้ว ต่อมาในต้นคริสต์ศตวรรษที่ 20 จากปี ค.ศ. 1890 ถึง ค.ศ. 1962 Fisher ได้ทำการศึกษาสมบัติของวิธีการนี้ ทำให้มีผู้ใช้กันกว้างขวางมากขึ้นและถือว่าวิธีการนี้เป็นผลของ Fisher (1912) โดยเขาได้นำเสนอผลงานเกี่ยวกับวิธีการนี้พร้อมทั้งมีการปรับปรุงแก้ไขส่วนที่เกี่ยวข้องให้เหมาะสมขึ้นอีกด้วย นักสถิติคนอื่นๆก็มีส่วนทำให้วิธีการนี้เป็นที่นิยมแพร่หลายยิ่งขึ้นด้วย (ประชุม สุวดี, 2553)

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วมกำหนดให้ $X_{1:n}$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta$ ซึ่งไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ θ เราจะได้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) ของตัวอย่างสุ่ม ซึ่งคือฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_{1:n}$ โดยถือว่าเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ กำหนดให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วมแทนด้วย $L(\theta; x_{1:n}) = L(\theta)$ นั่นคือ

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n L(\theta; x_i) \\ = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

วิธีหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีขั้นตอนดังนี้

พารามิเตอร์ θ ในเทอมค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่ม $X_{1:n}$ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด เรียกว่า ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator: MLE) ของ θ นั่นคือ $\hat{\theta}_{ML}$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ ก็ต่อเมื่อ $L(\hat{\theta}_{ML}; x_{1:n}) = L(\hat{\theta}_{ML})$ มีค่าสูงสุด ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์จะได้ว่า $\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$ เพื่อความสะดวกในการใช้งาน กำหนดให้ลอการของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม (Log-Likelihood Function) แทนด้วย $l(\theta) = \log L(\theta)$ ซึ่งเป็นลอการิทึมฐานธรรมชาติของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วมใช้ในการหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด จากคุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันทางเดียว (Monotone Function) นั่นคือ θ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุดเป็นค่าเดียวกับ θ ที่ทำให้ลอการของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด ดังนั้น

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta)$$

วิธีการหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการหาค่าของพารามิเตอร์ θ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม $L(\theta)$ มีค่าสูงสุด ซึ่งเป้าหมายในการหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ คือ การหาค่า θ ที่ $\hat{\theta}_{ML}$ จะทำให้ $L(\hat{\theta}_{ML}; x_{1:n}) \geq L(\theta; x_{1:n})$ เมื่อ $\theta \in \Theta$ โดย $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ ถ้าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม $L(\theta)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้เมื่อเทียบกับ θ อาจใช้อนุพันธ์หาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ ได้ เมื่อพิสัย (Range) ของ $f(x; \theta)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ θ และ θ อยู่ในช่วงจำนวนจริงช่วงหนึ่ง ในกรณีดังกล่าว $\hat{\theta}_{ML}$ คือรากของสมการ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ เงื่อนไขพอเพียงที่ $\hat{\theta}_{ML}$ ทำให้ $L(\hat{\theta}_{ML}) \geq L(\theta), \theta \in \Theta$ คือ $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$ เมื่อ $\theta = \hat{\theta}_{ML}$

ภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ (Relative Likelihood) ซึ่งมีความสำคัญในการพิจารณาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นทั้งหมดที่เป็นแหล่งข้อมูลโดยคำนึงถึงการให้ข้อมูลของ θ ซึ่งจะดีกว่าที่จะพิจารณาแค่ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\theta}_{ML}$ เพียงอย่างเดียวและไม่คำนึงถึงฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ นิยามโดย

$$\tilde{L}(\theta) = \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{ML})}$$

มีคุณสมบัติว่า $0 \leq \tilde{L}(\theta) \leq 1$ และ $\tilde{L}(\hat{\theta}_{ML}) = 1$ โดยที่ $L(\theta)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ θ และ $L(\hat{\theta}_{ML})$ คือ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ในกรณี $\tilde{L}(\hat{\theta}_{ML}) = 1$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ θ มีค่าเท่ากับค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด แล้วเรียกภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ว่าภาวะน่าจะเป็นแบบปรกติ (Normalization of Likelihood) เมื่อใส่ลอกเข้าไปในสมการอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นทำให้ได้ลอกของอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น คือ

$$\tilde{l}(\theta) = \log \tilde{L}(\theta) = l(\theta) - l(\hat{\theta}_{ML}) \quad , -\infty \leq \tilde{l}(\theta) \leq 0$$

โดยที่ $l(\theta) = \log L(\theta)$, $l(\hat{\theta}_{ML}) = \log L(\hat{\theta}_{ML})$ และ $\tilde{l}(\hat{\theta}_{ML}) = 0$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ซึ่งการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 ของลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นนั้น จะเรียกว่า ฟังก์ชันสกอร์ (Score Function) นั่นคือ

$$s(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}$$

และค่าติดลบของอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ของลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น เรียกว่า ฟิชเชอร์อินโฟเมชัน (Fisher Information) แทนด้วยสัญลักษณ์ $I(\theta)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} I(\theta) &= -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \\ &= -\frac{\partial s(\theta)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

กรณีพารามิเตอร์มีมากกว่า 1 ตัว กำหนดให้มีพารามิเตอร์ p ตัว จะได้เมทริกซ์ฟิชเชอร์อินโฟเมชันเป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีขนาด $p \times p$ ที่มีสมาชิกแถวที่ i และหลักที่ j หาได้จาก

$$I_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} l(\theta) \quad , 1 \leq i, j \leq p$$

ถ้าแทน θ ด้วย $\hat{\theta}_{ML}$ ในฟิชเชอร์อินฟอเมชันจะเรียกค่านี้ว่า ค่าสังเกตของฟิชเชอร์อินฟอเมชัน (Observed Fisher information) หรือ $I(\hat{\theta}_{ML})$ และในการหาค่าคาดหวังของฟิชเชอร์อินฟอเมชัน (Expected Fisher Information) มีนิยามดังนี้

$$J(\theta) = E[I(\theta)]$$

โดยที่ $0 < J(\theta) < \infty$ และ $E[I(\theta)]$ เป็นค่าคาดหวังของฟิชเชอร์อินฟอเมชัน ถ้าแทน θ ด้วย $\hat{\theta}_{ML}$ ในค่าคาดหวังฟิชเชอร์อินฟอเมชันจะเรียกค่านี้ว่า ค่าคาดหวังของค่าสังเกตฟิชเชอร์อินฟอเมชัน (Expected Observed Fisher information) หรือ $J(\hat{\theta}_{ML})$ ซึ่งต่อไปจะนำมาหาความแปรปรวนของ $\hat{\theta}_{ML}$ ได้

2.3 การประมาณพารามิเตอร์แบบช่วง

การประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริงด้วยค่าใดค่าหนึ่งมีความน่าจะเป็นเท่ากับศูนย์ที่จะได้ค่าประมาณตรงกับค่าที่เป็นจริง สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์มี 2 แบบ คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และ การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) สำหรับการประมาณค่าแบบจุดเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์หรือฟังก์ชันของพารามิเตอร์โดยเป็นค่าเพียงค่าเดียวหรือจุดเดียวซึ่งคำนวณได้จากตัวอย่าง การประมาณค่าแบบนี้อาจจะมีค่าเท่ากับค่าพารามิเตอร์หรืออาจจะคลาดเคลื่อนไปจากค่าพารามิเตอร์ได้ ส่วนการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบช่วงเป็นการประมาณที่จะได้ช่วงของตัวเลขที่ประมาณ ซึ่งมีคุณสมบัติว่าค่าที่แท้จริงของประชากรจะอยู่ในช่วงที่ประมาณได้ด้วยความเชื่อมั่นระดับหนึ่งซึ่งการประมาณค่าแบบช่วงเป็นการประมาณโดยอาศัยตัวประมาณค่าแบบจุดและการแจกแจงภาวจะน่าจะเป็นของตัวประมาณนั้น ซึ่งผลจากการประมาณด้วยช่วงจะให้ความเชื่อมั่นที่สูงกว่าการประมาณค่าแบบจุด ช่วงดังกล่าวจะคลุมค่าที่แท้จริงของพารามิเตอร์นั้นๆ ในกรณีที่พารามิเตอร์มากกว่า 1 ตัว พารามิเตอร์จะอยู่ในรูปเวกเตอร์ก็เช่นเดียวกัน หากประมาณด้วยเวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่งมีความน่าจะเป็นเท่ากับศูนย์ที่ค่าจะตรงกับเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ กำหนดให้ $X_{1:n}$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ โดยที่ θ เป็นจำนวนจริง ให้ $L(X_{1:n})$ และ $U(X_{1:n})$ เป็นสถิติที่ $L(X_{1:n}) \leq U(X_{1:n})$ ทุกจุดสังเกต (x_1, x_2, \dots, x_n) ที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S และ

$$P(L(X_{1:n}) \leq \theta \leq U(X_{1:n})) \geq \gamma$$

เรียกช่วงสุ่ม (Random Interval) $(L(X_{1:n}), U(X_{1:n}))$ ว่า ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ ของ θ และเรียก γ ว่า สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient) $\gamma \in (0,1)$ ซึ่ง $L(X_{1:n})$ เป็นขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่น (Lower Bound Confidence Interval) และ $U(X_{1:n})$ เป็นขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น (Upper Bound Confidence Interval) ของ θ สำหรับการประมาณค่าแบบช่วงนั้น ช่วงความเชื่อมั่นที่มีระดับความเชื่อมั่นสูงกว่าจะมีแนวโน้มให้ความยาวของช่วงมากกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่มีระดับความเชื่อมั่นต่ำกว่า แต่ในการใช้ประโยชน์ เช่น ช่วงประมาณที่กว้างจะมีประโยชน์น้อยกว่าช่วงประมาณที่แคบ ดังนั้น นอกจากจะพิจารณาค่าระดับความเชื่อมั่นแล้วสิ่งที่จำเป็นในการพิจารณาถึงการประมาณค่าแบบช่วง คือ ความยาวเฉลี่ยของช่วงประมาณ ซึ่งคือค่าของผลต่างของขอบเขตบนและขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นหรือหาได้จากค่า $U(X_{1:n}) - L(X_{1:n})$

แนวคิดของช่วงความเชื่อมั่นถูกเสนอครั้งแรกโดย Neyman (1937) ซึ่งความหมายของช่วงความเชื่อมั่นจะอิงกับหลักการสุ่มซ้ำ (Repeated Sampling Principle) ซึ่งกล่าวว่า กระบวนการทางสถิติควรอยู่บนพื้นฐานการทดลองที่ทำซ้ำได้และมีการแจกแจงค่าตัวอย่าง (Sampling Distribution) ที่ทำให้ทราบผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองนั้นๆ แนวคิดดังกล่าวนี้เป็นปรัชญาของ Frequentist ซึ่งในบางศาสตร์ เช่น โบราณคดี เศรษฐศาสตร์ ดาราศาสตร์ การทดลองอาจไม่สามารถทำซ้ำได้ (Pawitan, 2014)

แนวคิดแบบเบส์ (Bayesian) ไม่ได้อิงกับหลักการสุ่มซ้ำแต่มองว่าพารามิเตอร์ θ ที่สนใจนั้นมีการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน (Prior Distribution) และหลังจากเก็บข้อมูลมาจะนำไปปรับปรุงการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน แล้วเรียกการแจกแจงที่ปรับปรุงแล้วว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง (Posterior Probability Distribution) ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญในการอนุมานเชิงสถิติแบบเบส์ (Gelman, 2014)

แนวคิดแบบ Fisherian การอนุมานเชิงสถิติจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น เพียงอย่างเดียว แนวคิดดังกล่าวนี้มีส่วนคล้ายกับทั้ง Frequentist และ Bayesian ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก (Rohde, 2014)

งานวิจัยครั้งนี้ได้สนใจการประมาณแบบช่วงโดยใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นซึ่งเป็นแนวคิดแบบ Fisherian (Fisher, 1973) ได้นิยามช่วงภาวะน่าจะเป็นของ θ คือ เซตของ θ ที่มีคุณสมบัติ

$$\left\{ \theta \mid \frac{L(\theta)}{\max L(\theta)} \geq c \right\} = \left\{ \theta \mid \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{ML})} \geq c \right\}$$

โดยที่ $L(\theta)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ θ และ $L(\hat{\theta}_{ML})$ คือ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ θ มีค่าเท่ากับค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด สำหรับการกำหนดค่า c นั้น จะอาศัยอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นของ Wilk (1938) กล่าวคือ

$$W = -2 \log_e \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{ML})}$$

ซึ่ง W มีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution) ที่เป็นการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 แต่ในกรณีที่ตัวแปรสุ่มที่สนใจมีการแจกแจงปกติ W จะมีการแจกแจงที่แท้จริงแบบไคกำลังสอง ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็น คือ

$$\left\{ \theta \left| \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{ML})} \geq e^{-\frac{1}{2}\chi_{1,\gamma}^2} \right. \right\} \quad (2.1)$$

หรือเขียนได้อีกแบบ คือ

$$\left\{ \theta \left| \tilde{l}(\theta) \geq -\frac{1}{2} \chi_{1,\gamma}^2 \right. \right\} \quad (2.2)$$

โดยที่ $\tilde{l}(\theta) = \log \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{ML})}$ และ $\chi_{1,\gamma}^2$ แทน ควอนไทล์ที่ γ ของ χ_1^2 โดยให้ $\gamma \in (0,1)$

Weil และ Meeker (1990) ได้มีการเสนอว่าสำหรับการแจกแจงไวบูลซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 ตัว ในกรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์สเกล α ช่วงความเชื่อมั่นเอส $100(1-\delta)\%$ (S-Confidence Interval) ของพารามิเตอร์รูปร่าง β คือ

$$\frac{\hat{\beta}}{v} < \beta < \hat{\beta}v$$

โดยที่ $v = \exp\left[z_{1-\delta/2} \frac{s_{\hat{\beta}}}{\hat{\beta}}\right]$ และ $s_{\hat{\beta}}$ คือ ค่าประมาณส่วนเบี่ยงเบนของตัวประมาณ $\hat{\beta}$ ซึ่งจะประมาณค่า $s_{\hat{\beta}}$ และ $\hat{\beta}$ โดยใช้การจำลอง (Simulation) ต่อมา Heo และคณะ (2001) ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของควอนไทล์ คือ

$$\hat{X}_T \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \hat{S}_T$$

โดย \hat{X}_T คือ ตัวประมาณควอนไทล์ที่สอดคล้องกับระยะเวลา T โดยที่ $\hat{X}_T = g(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ และ \hat{S}_T คือ ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ \hat{X}_T ซึ่ง

$$S_T^2 = \frac{X_T^2}{N\Gamma^2(1+1/\beta)} \left\{ [1 + (2 - 2^{1-1/\beta})S + (1 - 2^{1-1/\beta})4H(1/2)S^2] \Gamma(1+2/\beta) - [1 + (-2 + 2^{1+1/\beta})S + (1 + 2^{1+1/\beta})S^2] \Gamma^2(1+1/\beta) \right\} \text{ และ } S = \{ \psi(1+1/\beta) - \ln[-\ln(1/T)] \} / \ln(0.5)$$

Mahdi (2004) นำเสนอขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น $100(1-p)\%$ แบบไม่มีเงื่อนไขของพารามิเตอร์รูปร่าง β คือ

$$\beta_U = \hat{\beta} \sqrt{\frac{\chi_{c(n-1)}^2(p)}{cn}}$$

โดยที่ $\chi_{c(n-1)}^2(p)$ คือ ควอนไทล์ที่ p ของการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรี $c(n-1)$ และ $\hat{\beta}$ ใช้วิธีของนิวตัน ราฟสัน (Newton-Raphson) ในการประมาณค่า เนื่องจาก $\hat{\beta}$ ไม่มีรูปแบบปิด (Closed Form) จึงต้องใช้วิธีดังกล่าว Phan และ McCool (2009) ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่นแบบแท้จริง (Exact Confidence Interval) ของพารามิเตอร์รูปร่าง β คือ

$$\frac{\tilde{\beta}}{v_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \beta < \frac{\tilde{\beta}}{v_{\frac{\alpha}{2}}}$$

โดยที่ $v_{\frac{\alpha}{2}}$ และ $v_{1-\frac{\alpha}{2}}$ คือควอนไทล์ที่ $\frac{\alpha}{2}$ และ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของ $v(n)$ ตามลำดับ ซึ่ง $v(n) = \frac{\tilde{\beta}}{\beta}$ คือฟังก์ชันปริมาณหมุน $\tilde{\beta} = \frac{(\pi/\sqrt{6})}{S_z}$ คือตัวประมาณแบบ Menon (Menon's Estimator) ของ β $S_z^2 = \frac{1}{\beta} S_t^2$ คือความแปรปรวนของ z และ S_t^2 คือความแปรปรวนของ t โดยที่ $t = \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$ จะได้ว่า S_z คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ z โดย $z = \ln x_p = \ln \alpha + \frac{1}{\beta} \ln t$ คือลอการิทึมธรรมชาติของค่าสังเกตในตัวอย่างสุ่มและควอนไทล์ที่ p ของการแจกแจงไวบูล คือ

$$x_p = \alpha [\ln t]^{\frac{1}{\beta}}$$

2.4 การประมาณที่ใช้กำลังสองของลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Quadratic Approximation of the Log-Likelihood Function)

การประมาณที่ใช้กำลังสองของลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นใช้ฟังก์ชันกำลังสองประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่สอง (Taylor Series of Second Order) รอบค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\theta}_{ML}$ คือ

$$\begin{aligned} l(\theta) &\approx l(\hat{\theta}_{ML}) + \frac{dl(\hat{\theta}_{ML})}{d\theta}(\theta - \hat{\theta}_{ML}) + \frac{1}{2} \frac{d^2l(\hat{\theta}_{ML})}{d\theta^2}(\theta - \hat{\theta}_{ML})^2 \\ &= l(\hat{\theta}_{ML}) + S(\hat{\theta}_{ML})(\theta - \hat{\theta}_{ML}) - \frac{1}{2} I(\hat{\theta}_{ML})(\theta - \hat{\theta}_{ML})^2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $S(\hat{\theta}_{ML}) = 0$ ดังนั้น การประมาณที่ใช้กำลังสองของลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad & \tilde{l}(\theta) = l(\theta) - l(\hat{\theta}_{ML}) \\ \text{จะได้} \quad & \tilde{l}(\theta) \approx -\frac{1}{2} I(\hat{\theta}_{ML})(\theta - \hat{\theta}_{ML})^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

สำหรับการหาสถิติแบบสคอร์ (The Score Statistic) กำหนดให้ $X_{1:n}$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$ ภายใต้เงื่อนไขปกติของฟิชเชอร์ (Fisher Regularity Conditions) จะได้ว่า

$$\frac{S(\theta)}{\sqrt{J(\theta)}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1) \quad (2.4)$$

โดยที่ $J(\theta)$ คือ ค่าคาดหวังฟิชเชอร์อินฟอเมชันของ θ สำหรับตัวแปร X_1, X_2, \dots, X_n จะเห็นได้ว่า $\frac{S(\theta)}{\sqrt{J(\theta)}}$ คือปริมาณหมุนที่อยู่ในเทอมของ θ ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ $\stackrel{a}{\sim}$ แทน การลู่เข้าของการแจกแจงเมื่อขนาดตัวอย่างเข้าใกล้อนันต์ ($n \rightarrow \infty$) จากสมการ (2.4) อาจเขียนได้อีกแบบ คือ

$$S(\theta) \stackrel{a}{\sim} N(0, J(\theta))$$

และจากสมการ (2.4) สามารถนำฟิชเชอร์อินฟอเมชัน $I(\theta)$ แทนค่าคาดหวังฟิชเชอร์อินฟอเมชัน $J(\theta)$ ได้เป็น

$$\frac{S(\theta)}{\sqrt{I(\theta)}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$$

2.5 การแจกแจงของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

การแจกแจงของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด กำหนดให้ $X_{1:n}$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta_0)$ และสมมติ $\hat{\theta}_{ML} = \hat{\theta}_{ML}(X)$ คือตัวประมาณค่าสูงสุดของ θ_0 ซึ่ง θ_0 แทนพารามิเตอร์ค่าจริง (True Parameter) และให้เป็นตามเงื่อนไขปกติของฟิชเชอร์ (Fisher Regularity Conditions) จะได้ว่า

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \xrightarrow{D} N(0, J_1(\theta_0)^{-1})$$

โดยที่ $J_1(\theta_0)$ คือ ค่าคาดหวังฟิชเชอร์อินฟอเมชันของหนึ่งค่าสังเกต X จากฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta_0)$ โดยค่าคาดหวังฟิชเชอร์อินฟอเมชันของ n ค่าสังเกต คือ $J(\theta_0) = nJ_1(\theta_0)$ จะได้ว่า

$$\sqrt{J(\theta_0)}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$$

หรือ

$$\hat{\theta}_{ML} \stackrel{a}{\sim} N(\theta_0, J(\theta_0)^{-1}) \quad (2.5)$$

ผลพลอยได้จากผลข้างต้นทำให้ได้คุณสมบัติของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด 2 ข้อ คือ (1) ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นค่าประมาณที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically Unbiased Estimator) (2) ความแปรปรวนของตัวประมาณเข้าสู่ขอบเขตล่างของคระเมอร์และราว (Cramér-Rao) ดังนั้น $\hat{\theta}_{ML}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ จากสมการ (2.5) ในกรณีที่ไม่ทราบ θ_0 เราจะประมาณด้วย $\hat{\theta}_{ML}$ และสามารถนำฟิชเชอร์อินฟอเมชัน $I(\theta)$ แทนค่าคาดหวังฟิชเชอร์อินฟอเมชัน $J(\theta)$ นั่นคือ

$$\text{จาก} \quad \hat{\theta}_{ML} \stackrel{a}{\sim} N(\theta_0, J(\hat{\theta}_{ML})^{-1}) \quad (2.6)$$

$$\text{จะได้} \quad \hat{\theta}_{ML} \stackrel{a}{\sim} N(\theta_0, I(\theta_0)^{-1})$$

ในกรณีที่ไม่ทราบ θ_0 เราจะประมาณด้วย $\hat{\theta}_{ML}$ นั่นคือ

$$\hat{\theta}_{ML} \stackrel{a}{\sim} N(\theta_0, I(\hat{\theta}_{ML})^{-1}) \quad (2.7)$$

(Held & Bové, 2001)

จากสมการ (2.6) และ (2.7) ทำให้ได้ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ($\hat{\theta}_{ML}$) คือ

$$se(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{1}{\sqrt{I(\hat{\theta}_{ML})}}$$

และ

$$se(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{1}{\sqrt{J(\hat{\theta}_{ML})}}$$

ตามลำดับ

2.6 สถิติแบบวัลด์ (The Wald Statistic)

การประมาณที่ใช้กำลังสองของลอกลฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสัมพันธ์ให้พิจารณาจากสมการ (2.3) แทนลงในสมการ (2.2) จะได้ว่า

$$\left\{ \theta \left| -\frac{1}{2} I(\hat{\theta}_{ML}) (\theta - \hat{\theta}_{ML})^2 \geq -\frac{1}{2} \chi_{1,\gamma}^2 \right. \right\}$$

$$\left\{ \theta \left| I(\hat{\theta}_{ML}) (\theta - \hat{\theta}_{ML})^2 \leq \chi_{1,\gamma}^2 \right. \right\}$$

$$\left\{ \theta \left| I(\hat{\theta}_{ML}) (\theta - \hat{\theta}_{ML})^2 \leq \left(\frac{z_{\frac{1+\gamma}{2}}} \right)^2 \right. \right\}$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ คือ

$$\left\{ \theta \left| \sqrt{I(\hat{\theta}_{ML})} |\theta - \hat{\theta}_{ML}| \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right. \right\}$$

เพราะว่า $\chi_{1,\gamma}^2 = \left(z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right)^2$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงไคกำลังสอง (Chi-Squared Distribution) กับการแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) ในการทดสอบสมมติฐานหลัก (Null Hypothesis) $H_0 : \theta = \theta_0$ ซึ่งสามารถใช้ในการทดสอบได้ถึงสองแบบ คือ

$$\sqrt{I(\hat{\theta}_{ML})} (\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

และ

$$\sqrt{J(\hat{\theta}_{ML})}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

ทั้งสองแบบเป็นการแจกแจงแบบปรกติมาตรฐานเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically Standard Normally Distributed) ภายใต้สมมติฐานหลัก และใช้ปริมาณหมุนประมาณ θ สถิติทดสอบนี้ถูกเรียกว่าสถิติทดสอบแบบวัตต์และถูกปรับปรุงโดย Abraham Wald จากทฤษฎีการแจกแจงตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะได้สถิติแบบวัตต์ว่า

$$z = \frac{\hat{\theta}_{ML} - \theta_0}{se(\hat{\theta}_{ML})}$$

หรือ

$$\chi^2 = \frac{(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0)^2}{se^2(\hat{\theta}_{ML})} \quad (2.8)$$

โดยที่ $se(\hat{\theta}_{ML})$ เท่ากับ $\sqrt{I^{-1}(\hat{\theta}_{ML})}$ หรือเท่ากับ $\sqrt{J^{-1}(\hat{\theta}_{ML})}$ ภายใต้สมมติฐานหลักที่เป็นการแจกแจงปรกติมาตรฐาน แทนด้วย $N(0,1)$ และการแจกแจงโคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 แทนด้วย χ_1^2 ซึ่งสามารถใช้ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ แบบวัตต์ได้ว่า

$$\hat{\theta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} se(\hat{\theta}_{ML})$$

เมื่อ $z_{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{(1+\gamma)}{2}$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน γ แทน สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น โดย $\gamma \in (0,1)$ และจากความสัมพันธ์ในสมการ (2.8) จะเป็นในลักษณะเดียวกัน ซึ่งสามารถประมาณช่วงแบบภาวะน่าจะเป็นที่ใช้การประมาณกำลังสอง (Quadratic Approximation) ได้ว่า

$$\left\{ \theta \left| \frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{ML})} \geq e^{-\frac{1}{2} z_{\frac{1+\gamma}{2}}^2} \right. \right\}$$

กรณีพารามิเตอร์ 1 ตัว สถิติแบบวัลด์นิยามได้ว่า

$$\frac{(\hat{\theta}_{ML} - \theta)^a}{se(\hat{\theta}_{ML})} \sim N(0,1)$$

สำหรับกรณีพารามิเตอร์มีมากกว่า 1 ตัว ให้เวกเตอร์พารามิเตอร์ แทนด้วย $(\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ ซึ่งมีตัวประมาณภาวะนั้น่าจะเป็นสูงสุดของแต่ละ $\theta_i, i=1,2,\dots,p$ คือ $\hat{\theta}_i$ จะได้สถิติแบบวัลด์เป็น

$$\frac{\hat{\theta}_i - \theta_i^a}{se(\hat{\theta}_i)} \sim N(0,1), \quad i=1,2,\dots,p$$

จากสมการ (2.5) สำหรับกรณีที่มีพารามิเตอร์มากกว่า 1 ตัว จะได้การแจกแจงเชิงเส้นกำกับของแต่ละ $\theta_i, i=1,2,\dots,p$ ซึ่งแต่ละตัวมีตัวประมาณภาวะนั้น่าจะเป็นสูงสุด คือ $\hat{\theta}_i$ เป็น

$$\hat{\theta}_i^a \sim N(\theta_i, J^{ii})$$

โดย J^{ii} แทน สมาชิกตัวที่ i ในเส้นทแยงมุมของผกผันค่าคาดหวังของค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชันจะได้ว่า

$$J^{ii} = \left[J(\hat{\theta}_{ML})^{-1} \right]_{ii}$$

ดังนั้น ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณภาวะนั้น่าจะเป็นสูงสุดของ $\theta_i, i=1,2,\dots,p$ คือ รากที่สองของสมาชิกตัวที่ i ของเส้นทแยงมุมในเมทริกซ์ผกผันค่าคาดหวังของค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชัน

$$se(\hat{\theta}_i) = \sqrt{\left[J(\hat{\theta}_{ML})^{-1} \right]_{ii}} \quad (2.9)$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ แบบวัลด์ของ $\theta_i, i=1,2,\dots,p$ คือ

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \sqrt{\left[J(\hat{\theta}_{ML})^{-1} \right]_{ii}}$$

สำหรับการแจกแจงไวบูลจะมี 2 พารามิเตอร์นั่นคือ $p=2$ ซึ่งค่าคาดหวังของค่าสังเกตพิชเชอร์อินฟอเมชันของการแจกแจงไวบูลเป็น

$$J(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML}) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

ทำให้ได้ฟังก์ชันค่าคาดหวังของค่าสังเกตพิชเชอร์อินฟอเมชันของการแจกแจงไวบูลเป็น

$$J(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})^{-1} = \begin{pmatrix} J^{11} & J^{12} \\ J^{21} & J^{22} \end{pmatrix}$$

จากสมการ (2.8) ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\alpha}_{ML}$ และ $\hat{\beta}_{ML}$ คือ $se(\hat{\alpha}_{ML}) = \sqrt{J^{11}}$ และ $se(\hat{\beta}_{ML}) = \sqrt{J^{22}}$ ตามลำดับ

2.7 การเปรียบเทียบพิชเชอร์อินฟอเมชันกับค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชัน

ความแตกต่างระหว่างพิชเชอร์อินฟอเมชันกับค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชันนั่นคือค่าคาดหวังของพิชเชอร์อินฟอเมชัน หรือ $J(\theta)$ มีความหมายสำหรับพารามิเตอร์ θ ในปริภูมิพารามิเตอร์ Θ แต่พิชเชอร์อินฟอเมชัน หรือ $I(\theta)$ นั้นจะมีประโยชน์เฉพาะรอบๆค่า $\hat{\theta}_{ML}$ เท่านั้น อาจมองได้ว่า $I(\theta)$ เปรียบเสมือนค่าสถิติค่าเดียวมากกว่าที่จะเป็นฟังก์ชันของ θ ในทางตรงกันข้าม $J(\theta)$ คือปริมาณเฉลี่ยบนข้อมูลทุกชุดที่เป็นไปได้ซึ่งมาจากพารามิเตอร์ที่แท้จริงและเนื่องจากเรามอง $J(\theta)$ เป็นฟังก์ชันของ θ ซึ่งเป็นค่าที่บอกขอบเขตของ θ สำหรับพารามิเตอร์ที่มีสารสนเทศมากก็จะประมาณได้ง่ายกว่าพารามิเตอร์ที่มีสารสนเทศน้อย ในกรณีที่มีสารสนเทศมากเราไม่จำเป็นต้องใช้ขนาดตัวอย่างใหญ่มากเพื่อประมาณพารามิเตอร์ θ

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วจะได้สถิติเชิงเส้นกำกับ คือ

$$W_1 = J(\hat{\theta}_{ML})(\hat{\theta}_{ML} - \theta)^2 \sim \chi_1^2$$

$$W_2 = I(\hat{\theta}_{ML})(\hat{\theta}_{ML} - \theta)^2 \sim \chi_1^2$$

$$W = 2 \log \frac{L(\hat{\theta}_{ML})}{L(\theta)} \sim \chi_1^2$$

ความแตกต่างของ W_1 และ W_2 คือมีค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชันและพิชเชอร์อินฟอเมชันตามลำดับ ในกรณีที่มีการแจกแจงเป็นวงศ์เลขชี้กำลัง (Exponential Family) จะได้ว่า $J(\hat{\theta}_{ML}) = I(\hat{\theta}_{ML})$ ดังนั้น $W_1 = W_2$ แต่สำหรับกรณีที่ $J(\hat{\theta}_{ML}) \neq I(\hat{\theta}_{ML})$ จะเกิดคำถามขึ้นว่าควรใช้อันไหนระหว่าง W_1 กับ W_2 ซึ่ง Efron และ Hinkey (1978) ได้อธิบายคำถามนี้อย่างละเอียดและมีการแสดงให้เห็นว่า $I(\hat{\theta}_{ML})$ ดีกว่า $J(\hat{\theta}_{ML})$ แต่ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นเราจะใช้ $J(\hat{\theta}_{ML})$ เนื่องจากเป็นการสร้างช่วงสุมที่มีได้เจาะจงกับข้อมูลชุดใดชุดหนึ่ง แนะนำโดย Pawitan (2013)

2.8 ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์

การแจกแจงไวบูลในกรณีที่เราสนใจพารามิเตอร์ β และมีพารามิเตอร์รบกวน (Nuisance Parameter) α เพื่อที่จะสร้างช่วงความเชื่อมั่นตามแนวคิดแบบ Fisherian จำเป็นต้องกำจัดพารามิเตอร์รบกวน α ในที่นี้จะใช้ 2 วิธีด้วยกัน คือ ใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง ซึ่งในการหาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์จะกำหนดให้ $L(\alpha, \beta)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วมของพารามิเตอร์ที่สนใจ β และพารามิเตอร์รบกวน α ให้ $\tilde{\alpha}(\beta)$ แทน ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $L(\alpha, \beta)$ โดยกำหนดให้ β เป็นค่าคงที่ ดังนั้น ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β คือ

$$\begin{aligned} L_p(\beta) &= \max_{\alpha} L(\alpha, \beta) \\ &= L(\tilde{\alpha}(\beta), \beta) \end{aligned}$$

สำหรับการแจกแจงไวบูล Yang และ Xie (2003) ได้พิสูจน์ไว้ว่าลอคฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ คือ

$$l_p(\beta) = n \log(\beta) - n \log(\tilde{\alpha}(\beta)) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n(\beta-1) \log(\tilde{\alpha}(\beta)) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\tilde{\alpha}(\beta)} \right)^\beta$$

ต่อมาจะกล่าวถึงความโค้งของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (Curvature of the Profile Likelihood) ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมาชิกของเมทริกซ์ฟิชเชอร์อินฟอเมชัน สำหรับการแจกแจงไวบูลจะมี 2 พารามิเตอร์ คือ (α, β) และมีค่าสังเกตฟิชเชอร์อินฟอเมชันเป็น

$$I(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

และผกผันของค่าสังเกตฟิชเชอร์อินฟอเมชันเป็น

$$I(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})^{-1} = \begin{pmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{pmatrix}$$

ค่าลบของความโค้งของลอคภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (Negative curvature of the Profile Likelihood) ของ β ที่ $\hat{\beta}_{ML}$ จะเท่ากับค่าของ $(I^{22})^{-1}$ จากคุณสมบัตินี้สามารถใช้ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) ประมาณลอคภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของพารามิเตอร์ β หรือ $\tilde{l}_p(\beta)$ ได้ดังนี้

$$\tilde{l}_p(\beta) \approx -\frac{1}{2} (I^{22})^{-1} (\beta - \hat{\beta}_{ML})^2$$

โดยที่ I^{22} แทน สมาชิกตัวที่ 2 ในแนวเส้นทแยงมุมของ $I(\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML})^{-1}$ ซึ่งผลที่ได้นี้จะสอดคล้องกับทฤษฎีของวัลด์

2.9 ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง

การแจกแจงของไวบูลซึ่งสมมติให้มีกระบวนการปรับรูปพารามิเตอร์ (Reparameterization) จาก (α, β) เป็น (λ, β) แบบตั้งฉาก ซึ่งหมายถึงตั้งฉากกันในค่าคาดหวังของฟังก์ชันอินโฟเมชัน $J_{\beta\lambda} = 0$ ซึ่งเงื่อนไขการตั้งฉากสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการพารามิเตอร์ก่อนแทนที่ คือ

$$j_{\alpha\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + j_{\beta\alpha} = 0$$

โดยที่ $j_{\alpha\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$, $j_{\beta\alpha} = \frac{(\xi-1)}{\alpha}$ โดยที่ $\xi \approx 0.5772$ แทนค่าคงที่ของออยเลอร์ (Euler's Constant) และพารามิเตอร์รบกวนที่ตั้งฉาก คือ $\lambda = \alpha e^{\frac{(1-\xi)}{\beta}}$ (Cox & Reid, 1987) ต่อมา Cox และ Reid (1989) ได้เสนอว่าถ้า λ เป็นพารามิเตอร์ตั้งฉากของ β สามารถปรับปรุงให้ λ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ (Smooth Function) ซึ่งการหาค่าสูงสุดของพารามิเตอร์ตั้งฉากโดยการใส่ลอกซึ่งจะได้

$$\lambda^\circ \propto \log(\lambda) = \log(\alpha) + \frac{1-\xi}{\beta}$$

Cox และ Reid ได้นิยามลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงว่า

$$l_m(\beta) = l_p(\beta) - \frac{1}{2} \log \det [J_{\lambda\lambda}(\beta, \tilde{\lambda}(\beta))] \quad (2.10)$$

โดยที่ $J_{\lambda\lambda}(\beta, \tilde{\lambda}(\beta))$ คือ สมาชิกของเมทริกซ์ค่าคาดหวังของค่าสังเกตอินโฟเมชันสำหรับ (β, λ) และ $\tilde{\lambda}(\beta)$ แทนตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดโดยกำหนดให้ β เป็นค่าคงที่ ซึ่ง λ เป็นพารามิเตอร์ตั้งฉากของ β สำหรับการหาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงให้พิจารณา

$$\lambda^\circ = \frac{\log(\lambda)}{\beta} = \frac{\log(\alpha)}{\beta} + \frac{1-\xi}{\beta^2} \text{ และ } \alpha = e^{\lambda^\circ \beta - \frac{(1-\xi)}{\beta}}$$

จาก $J_{\lambda\lambda}(\beta, \tilde{\lambda}^o(\beta)) = J_{\alpha\alpha}(\beta, \tilde{\alpha}(\beta)) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda^o} \right)^2 \Big|_{\alpha=\tilde{\alpha}(\beta)}$ ให้พิจารณา $J_{\alpha\alpha}(\beta, \tilde{\alpha}(\beta))$

เนื่องจาก $J_{\alpha\alpha}(\beta, \alpha) = \frac{n\beta^2}{\alpha^2}$ และ $\tilde{\alpha}(\beta) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{n} \right)^{1/\beta}$ ได้พิสูจน์อย่างละเอียดไว้ในบทที่ 3

$$\text{นั่นคือ } J_{\alpha\alpha}(\beta, \tilde{\alpha}(\beta)) = \frac{n\beta^2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{n} \right)^{2/\beta}} = \beta^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right)^{-2/\beta} n^{1+2/\beta}$$

$$\text{พิจารณา } \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda^o} = \frac{\partial}{\partial \lambda^o} \left(e^{\lambda^o \beta - \frac{(1-\xi)}{\beta}} \right) = e^{\lambda^o \beta - \frac{(1-\xi)}{\beta}} \beta$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } J_{\lambda\lambda}(\beta, \tilde{\lambda}^o(\beta)) &= \frac{n\beta^2}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}{n} \right)^{2/\beta}} \left(e^{\lambda^o \beta - \frac{(1-\xi)}{\beta}} \beta \right)^2 \Big|_{\alpha=\tilde{\alpha}(\beta)} \\ &= \frac{n\beta^2 e^{2\lambda^o \beta - \frac{2(1-\xi)}{\beta}} \beta^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta / n \right)^{2/\beta}} \\ &= \beta^4 e^{2\lambda^o \beta - \frac{2(1-\xi)}{\beta}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right)^{-2/\beta} n^{1+2/\beta} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $J_{\lambda\lambda}(\beta, \tilde{\lambda}(\beta))$ แปรผันตรงกับ β^4 หรือ $J_{\lambda\lambda}(\beta, \tilde{\lambda}^o(\beta)) \propto \beta^4$ และจากสมการ (2.10) จะได้ลอคฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง คือ

$$\begin{aligned} l_m(\beta) &= l_p(\beta) - \frac{1}{2} \log(\beta^4) \\ &= l_p(\beta) - 2 \log \beta \\ &= (n-2) \log(\beta) - n \log(\tilde{\alpha}) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n(\beta-1) \log(\tilde{\alpha}) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\tilde{\alpha}} \right)^\beta \end{aligned}$$

(Yang & Xie, 2003)

บทที่ 3 วิธีการวิจัย

เป้าหมายหลักของงานวิจัยครั้งนี้คือ การหาสูตรที่สามารถคำนวณด้วยมือได้ สำหรับช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูลในกรณีที่ไม่ทราบพารามิเตอร์สเกล α โดยใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุงในการกำจัดพารามิเตอร์รบกวน α โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 ช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 5 วิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้

3.1.1 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (PF)

กำหนดให้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากการแจกแจงไวบูลที่มีพารามิเตอร์สเกล α และพารามิเตอร์รูปร่าง β จากสมการ (2.1) จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ ของ β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (PF) คือ

$$\left\{ \beta \left| \frac{L_p(\tilde{\alpha}, \beta)}{\max L_p(\tilde{\alpha}, \beta)} \geq e^{-\frac{1}{2}\chi_{1,\gamma}^2} \right. \right\}$$

โดยที่ $\chi_{1,\gamma}^2$ แทน ควอนไทล์ที่ γ ของ χ_1^2 ซึ่ง $\gamma \in (0,1)$ และ $L_p(\tilde{\alpha}, \beta)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์ของ β โดยที่ $\tilde{\alpha}$ แทน ตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์ ซึ่งค่า $\max L_p(\tilde{\alpha}, \beta)$ หาได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

3.1.2 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)

กำหนดให้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากการแจกแจงไวบูลที่มีพารามิเตอร์สเกล α และพารามิเตอร์รูปร่าง β จากสมการ (2.1) จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ ของ β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF) คือ

$$\left\{ \beta \left| \frac{L_m(\tilde{\alpha}, \beta)}{\max L_m(\tilde{\alpha}, \beta)} \geq e^{-\frac{1}{2}\chi_{1,\gamma}^2} \right. \right\}$$

โดยที่ $\chi_{1,\gamma}^2$ แทน ควอนไทล์ที่ γ ของ χ_1^2 ซึ่ง $\gamma \in (0,1)$ และ $L_p(\tilde{\alpha}, \beta)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ β โดยที่ $\tilde{\alpha}$ แทน ตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง ซึ่งค่า $\max L_p(\tilde{\alpha}, \beta)$ หาได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

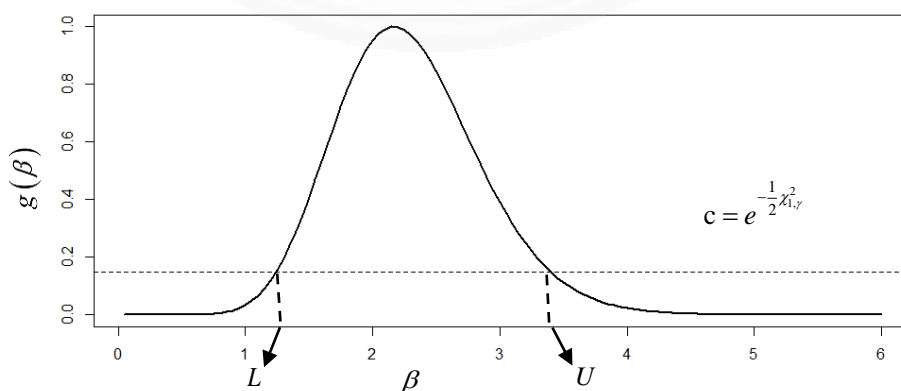
จากหัวข้อ 3.1.1 และ 3.1.2 จะเห็นได้ว่าการหาช่วงความเชื่อมั่นไม่ว่าจะเป็นวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF) และโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF) จะต้องพล็อตกราฟ

$$g_p(\beta) = \frac{L_p(\tilde{\alpha}, \beta)}{\max L_p(\tilde{\alpha}, \beta)}$$

และ

$$g_m(\beta) = \frac{L_m(\tilde{\alpha}, \beta)}{\max L_m(\tilde{\alpha}, \beta)}$$

เทียบกับค่า β แล้วขอบเขตล่าง (L) และขอบเขตบน (U) หาได้จาก $L_p = g_p^{-1}(c)$, $U_p = g_p^{-1}(c)$ และ $L_m = g_m^{-1}(c)$, $U_m = g_m^{-1}(c)$ ตามลำดับซึ่ง $U_p > L_p$ และ $U_m > L_m$ โดยที่ $c = e^{-\frac{1}{2}\chi_{1,\gamma}^2}$ ซึ่งโดยปกติจะไม่สามารถคำนวณด้วยมือได้จะต้องเขียนโปรแกรมคำสั่งเพื่อหาขอบเขตบนและล่างโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ในที่นี้ได้ใช้วิธีการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) สำหรับหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β โดยใช้โปรแกรม R Studio ดังภาพที่ 3.1



ภาพที่ 3.1 การหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็น

3.1.3 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W)

กำหนดให้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากการแจกแจงไวบูลที่มีพารามิเตอร์สเกล α และพารามิเตอร์รูปร่าง β สามารถหาสูตรอย่างง่ายของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W) จะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 การหาภาวะน่าจะเป็นร่วมของการแจกแจงไวบูล

ภาวะน่าจะเป็นร่วมของการแจกแจงไวบูลหาได้จาก

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta} \end{aligned}$$

ดังนั้น ภาวะน่าจะเป็นร่วมของการแจกแจงไวบูล คือ

$$L(\alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta} \quad (3.1)$$

ขั้นที่ 2 การหาลอการของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วม

จากสมการ (3.1) เมื่อใส่ลอการเข้าไปทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta) &= \log \left(\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta} \right) \\ &= \log \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^n + \log \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} \right) + \log \left(e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta} \right) \\ &= n \log \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \\ &= n \log \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(\alpha, \beta) &= n(\log(\beta) - \log(\alpha)) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n (\log(x_i) - \log(\alpha)) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \\
&= n\log(\beta) - n\log(\alpha) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n (\log(x_i)) - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n (\log(\alpha)) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \\
&= n\log(\beta) - n\log(\alpha) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n (\log(x_i)) - n(\beta - 1)\log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \\
&= n\log(\beta) - n\log(\alpha) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n(\beta - 1)\log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \quad (3.2)
\end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 การหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ β ของการแจกแจงไวบูล สำหรับการหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นร่วมกับ β หรือเรียกอีกอย่างว่าฟังก์ชันสคออร์ จากสมการ (3.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(n\log(\beta) - n\log(\alpha) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n(\beta - 1)\log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(n\log(\beta) - n\log(\alpha) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n\beta\log(\alpha) + n\log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \right) \\
&= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n\log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันสคออร์ของ β คือ

$$S(\beta) = \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n\log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) \quad (3.3)$$

$$\text{ให้ } S(\beta) = \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

นั่นคือ

$$\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n\log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) = 0$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\hat{\beta}_{ML}$ ไม่สามารถหารูปแบบปิด (Closed Form) ได้ แต่ $\hat{\beta}_{ML}$ สามารถคำนวณได้จากโปรแกรม R ใช้ฟังก์ชัน `optim()` ในการหาค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ β

ขั้นที่ 4 การหาค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ α ของการแจกแจงไวบูล จากสมการ (3.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\begin{aligned} &n \log(\beta) - n \log(\alpha) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ &-n(\beta-1) \log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \end{aligned} \right) \\ &= -\frac{n}{\alpha} - \frac{n(\beta-1)}{\alpha} + \beta \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta (\alpha)^{-\beta-1} \\ &= \frac{-n - n\beta + n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \\ &= -\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันสคออร์ของ α คือ

$$S(\alpha) = \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \quad (3.4)$$

$$\text{ให้ } S(\alpha) = \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0$$

นั่นคือ

$$-\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta = 0$$

คูณ α ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$-n\beta + \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta = 0$$

$$\begin{aligned}
\beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta &= n\beta \\
\frac{1}{(\alpha)^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta &= n \\
(\alpha)^\beta &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \\
\alpha &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ดังนั้น ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ α คือ

$$\hat{\alpha}_{ML} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^{\hat{\beta}_{ML}}}{n} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}}}$$

ขั้นที่ 5 การหาฟิชเชอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็น

จาก $I(\alpha, \beta) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}$ จะทำการหาสมาชิกแต่ละตัวของ $I(\alpha, \beta)$

หา $\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2}$ จากสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (S(\alpha)) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \right) = \frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\beta(\alpha)^{-\beta-1} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right) \\
&= \frac{n\beta}{\alpha^2} - (\beta+1)\beta(\alpha)^{-\beta-2} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta = \frac{n\beta}{\alpha^2} - \frac{(\beta+1)\beta}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta
\end{aligned}$$

หา $\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2}$ จากสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} &= \frac{\partial}{\partial \beta} (S(\beta)) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n \log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right) \\ &= -\frac{n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \\ &= -\frac{n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left(\log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

หา $\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta}$ จากสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (S(\beta)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n \log(\alpha) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right) \\ &= -\frac{n}{\alpha} - \left(-\beta \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta (\alpha)^{-\beta-1} \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \frac{1}{\left(\frac{x_i}{\alpha} \right)} \left(-\frac{x_i}{\alpha^2} \right) \right) \\ &= -\frac{n}{\alpha} + \beta \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta (\alpha)^{-\beta-1} \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \\ &= -\frac{n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \end{aligned}$$

หา $\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha}$ จากสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \beta} (S(\alpha))$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \\
&= -\frac{n}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right) \\
&= -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น ฟิชเชอร์อินฟอเมชันของการแจกแจงไวบูล คือ

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \beta) &= - \left(\begin{array}{cc} \frac{n\beta}{\alpha^2} - \frac{(\beta+1)\beta}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta & -\frac{n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \\ -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) & -\frac{n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left(\log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right)^2 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cc} -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{(\beta+1)\beta}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta & \frac{n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \\ \frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) & \frac{n}{\beta^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left(\log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right)^2 \end{array} \right) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

ขั้นที่ 6 การหาค่าคาดหวังของฟิชเชอร์อินฟอเมชัน

จากสมการ (3.6) นั้นคือ

$$J(\alpha, \beta) = E[I(\alpha, \beta)]$$

$$= E \left[\left(\begin{array}{cc} -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{(\beta+1)\beta}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta & \frac{n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \\ \frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) & \frac{n}{\beta^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \left(\log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \right)^2 \end{array} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
J(\alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{(\beta+1)\beta}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right] & -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{(\beta+1)\beta}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right] \\ \frac{n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right] - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right] & \frac{n}{\beta^2} + \sum_{i=1}^n E\left[\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right)^2\right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{(\beta+1)\beta}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n (1) & \frac{n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma'(2)}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (1) \\ \frac{n}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma'(2)}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (1) & \frac{n}{\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma''(2)}{\beta^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

สำหรับการพิสูจน์ $E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right]$, $E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$ และ $E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2\right]$ สามารถดูได้

ในภาคผนวก ข สมการที่ (6.4), (6.5) และ (6.6) ตามลำดับ

$$\begin{aligned}
J(\alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} -\frac{n\beta}{\alpha^2} + \frac{n(\beta+1)\beta}{\alpha^2} & \frac{n}{\alpha} - \frac{n\beta\Gamma'(2)}{\alpha\beta} - \frac{n}{\alpha} \\ \frac{n}{\alpha} - \frac{n\beta\Gamma'(2)}{\alpha\beta} - \frac{n}{\alpha} & \frac{n}{\beta^2} + \frac{n\Gamma''(2)}{\beta^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{n\beta(\beta+1-1)}{\alpha^2} & \frac{n - n\Gamma'(2) - n}{\alpha} \\ \frac{n - \Gamma'(2) - n}{\alpha} & \frac{n + n\Gamma''(2)}{\beta^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าคาดหวังของฟิชเชอร์อินฟอเมชันของการแจกแจงไวบูล คือ

$$J(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{n\beta^2}{\alpha^2} & -\frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \\ -\frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} & \frac{n(1+\Gamma''(2))}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

ขั้นที่ 7 การหาผกผันของค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชัน

จากสมการ (3.7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 J(\alpha, \beta)^{-1} &= \frac{1}{\det(J(\alpha, \beta))} \begin{pmatrix} \frac{n(1+\Gamma''(2))}{\beta^2} & \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \\ \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} & \frac{n\beta^2}{\alpha^2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\left(\left(\frac{n\beta^2}{\alpha^2} \right) \left(\frac{n(1+\Gamma''(2))}{\beta^2} \right) - \left(-\frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \right) \left(-\frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \right) \right)} \begin{pmatrix} \frac{n(1+\Gamma''(2))}{\beta^2} & \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \\ \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} & \frac{n\beta^2}{\alpha^2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\left(\left(\frac{n^2(1+\Gamma''(2))}{\alpha^2} \right) - \left(\frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \right)^2 \right)} \begin{pmatrix} \frac{n(1+\Gamma''(2))}{\beta^2} & \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \\ \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} & \frac{n\beta^2}{\alpha^2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{n}{\alpha} \right)^2 \left(1 - (\Gamma'(2))^2 + \Gamma''(2) \right)} \begin{pmatrix} \frac{n(1+\Gamma''(2))}{\beta^2} & \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} \\ \frac{n\Gamma'(2)}{\alpha} & \frac{n\beta^2}{\alpha^2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\frac{n(1+\Gamma''(2))}{\beta^2}}{\left(\frac{n}{\alpha} \right)^2 \left(1 - (\Gamma'(2))^2 + \Gamma''(2) \right) \beta^2} & \frac{\frac{n\Gamma'(2)}{\alpha}}{\left(\frac{n}{\alpha} \right)^2 \left(1 - (\Gamma'(2))^2 + \Gamma''(2) \right) \alpha} \\ \frac{\frac{n\Gamma'(2)}{\alpha}}{\left(\frac{n}{\alpha} \right)^2 \left(1 - (\Gamma'(2))^2 + \Gamma''(2) \right) \alpha} & \frac{\frac{n\beta^2}{\alpha^2}}{\left(\frac{n}{\alpha} \right)^2 \left(1 - (\Gamma'(2))^2 + \Gamma''(2) \right) \alpha^2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผกผันของค่าคาดหวังพิชเซอร์อินฟอเมชัน คือ

$$J(\alpha, \beta)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2(1+\Gamma''(2))}{n(1-(\Gamma'(2))^2+\Gamma''(2))\beta^2} & \frac{\alpha\Gamma'(2)}{n(1-(\Gamma'(2))^2+\Gamma''(2))} \\ \frac{\alpha\Gamma'(2)}{n(1-(\Gamma'(2))^2+\Gamma''(2))} & \frac{\beta^2}{n(1-(\Gamma'(2))^2+\Gamma''(2))} \end{pmatrix}$$

ขั้นที่ 8 การหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W)

จากสมการ (2.9) ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\beta}_{ML}$ คือ

$$\begin{aligned} se(\hat{\beta}_{ML}) &= \sqrt{J^{22}} = \sqrt{\frac{\hat{\beta}_{ML}^2}{n(1-(\Gamma'(2))^2+\Gamma''(2))}} \\ &= \frac{\hat{\beta}_{ML}}{\sqrt{n(1-(\Gamma'(2))^2+\Gamma''(2))}} = \frac{\hat{\beta}_{ML}}{\sqrt{n(1-(0.4228)^2+0.8237)}} \\ &= \frac{\hat{\beta}_{ML}}{\sqrt{n(1-0.1788+0.8237)}} = \frac{\hat{\beta}_{ML}}{\sqrt{1.6449n}} \end{aligned}$$

จากช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์จะได้ว่า

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} se(\hat{\beta}_{ML})$$

เมื่อ $z_{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{(1+\gamma)}{2}$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยที่ γ แทน สัมประสิทธิ์

ความเชื่อมั่น และ $\gamma \in (0,1)$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น γ 100% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W) คือ

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \frac{\hat{\beta}_{ML}}{\sqrt{1.6449n}}$$

สำหรับหัวข้อ 3.1.4 และ 3.1.5 เป็นหัวข้อที่ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอทฤษฎีบทการสร้างสูตรอย่างง่าย โดยใช้หาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF) และโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) ที่จะกล่าวต่อไปนี้

3.1.4 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากการแจกแจงไวบูลล์ที่ไม่ทราบพารามิเตอร์สเกล α ยกเว้น 5 กรณีดังนี้ 1.) $\alpha=5, \beta=5, n=5$ 2.) $\alpha=5, \beta=5, n=10$ 3.) $\alpha=5, \beta=10, n=5$ 4.) $\alpha=5, \beta=10, n=10$ และ 5.) $\alpha=5, \beta=10, n=20$ และตัวอย่างสุ่มนี้สามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β แล้ว ช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าวจะมีรูปร่างง่าย คือ

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{(n+1)}{n}\right) \left(\frac{1}{1.6449n - 0.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)}$$

เมื่อ $z_{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{(1+\gamma)}{2}$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยที่ γ แทน สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น และ $\gamma \in (0,1)$

พิสูจน์

ขั้นที่ 1 การหาล็อกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β

กำหนดให้ β เป็นค่าคงที่

พิจารณาสมการ (3.5) จะได้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของพารามิเตอร์ α คือ

$$\tilde{\alpha}(\beta) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

นำ $\tilde{\alpha}(\beta) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ แทนลงในสมการ (3.2) ซึ่งเรียกว่า ล็อกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น

โปรไฟล์ของ β ให้แทนด้วย $l_p(\beta)$ จะได้

$$\begin{aligned}
l_p(\beta) &= n \log(\beta) - n \log(\tilde{\alpha}(\beta)) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n(\beta-1) \log(\tilde{\alpha}(\beta)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\tilde{\alpha}(\beta)} \right)^\beta \\
&= n \log(\beta) - n \log \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n(\beta-1) \\
&\quad \log \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}} \right)^\beta \\
&= n \log(\beta) - \frac{n}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\
&\quad - \frac{n(\beta-1)}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^\beta}{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n}} \right) \\
&= n \log(\beta) - \frac{n}{\beta} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right) (\beta-1+1) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta} \\
&= n \log(\beta) - n \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{n} \right) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n \\
&= n \log(\beta) - n \left(\log \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right) - \log(n) \right) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n \\
&= n \log(\beta) - n \log \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right) + n \log(n) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \log(x_i) - n \\
&= n \log(\beta) - n \log \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta \right) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) + c
\end{aligned}$$

โดยที่ $c = n(\log(n)-1) - \sum_{i=1}^n \log(x_i)$

ดังนั้น ลอการฟังก์ชันสถานะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β คือ

$$l_p(\beta) = n \log(\beta) - n \log\left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta\right) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) + c \quad (3.8)$$

ขั้นที่ 2 การหาฟังก์ชันสคออร์ของสถานะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β

จากสมการ (3.8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_p(\beta) &= \frac{\partial l_p(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(n \log(\beta) - n \log\left(\sum_{i=1}^n (x_i)^\beta\right) + \beta \sum_{i=1}^n \log(x_i) + c \right) \\ &= \frac{n}{\beta} - \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) = \frac{n}{\beta} - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad (3.9) \end{aligned}$$

พิจารณาจากสมการ (3.9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_p(\beta)}{\partial \beta} &= \frac{\partial^2 l_p(\beta)}{\partial \beta^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{n}{\beta} - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right) \\ &= -\frac{n}{\beta^2} - n \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) \right) - \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right)^2} \\ &= -\frac{n}{\beta^2} - n \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) \log(x_i) - \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right)^2} \\ &= -\frac{n}{\beta^2} - n \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) \right)^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right)^2} \\ &= -\frac{n}{\beta^2} - n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} + n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \quad (3.10) \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 การหาค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β
จากสมการ (3.10)

$$I_p(\beta) = -\frac{\partial S_p(\beta)}{\partial \beta} \\ = -\left(-\frac{n}{\beta^2} - n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} + n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \right)$$

ดังนั้น ค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β คือ

$$I_p(\beta) = \frac{n}{\beta^2} + n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \quad (3.11)$$

ขั้นที่ 4 การหาค่าคาดหมายพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β
จากสมการ (3.11)

$$J_p(\beta) = E \left[\frac{n}{\beta^2} + n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \right] \\ = E \left[\frac{n}{\beta^2} \right] + E \left[n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right] - E \left[n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \right] \\ = \frac{n}{\beta^2} + n \frac{E \left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2 \right]}{E \left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right]} - n \frac{E \left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i) \right]^2}{E \left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \right]^2}$$

สำหรับการพิสูจน์ $E \left[n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right]$ และ $E \left[n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \right]$ สามารถดูได้ใน

ภาคผนวก ข สมการ (6.7) และ (6.8) ตามลำดับ

$$J_p(\beta) = \frac{n}{\beta^2} + n \frac{\left(\left(\frac{n\alpha^\beta}{\beta^2} \right) (\Gamma''(2) + 2\beta\Gamma'(2)\log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha)) \right)}{n\alpha^\beta} - n \frac{\left(\left(\frac{n\alpha^{2\beta}}{\beta^2} \right) (\Gamma''(3) + (n-1)(\Gamma'(2))^2 + 2\beta\log(\alpha)(\Gamma'(3) + (n-1)\Gamma'(2)) + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha)) \right)}{n(n+1)\alpha^{2\beta}} \quad (3.12)$$

โดยที่ $\Gamma^{(n)}(X)$ คืออนุพันธ์ย่อยหลายตัวแปรของฟังก์ชันแกมมา (The Partial Derivatives of the Gamma Function) ซึ่ง $\Gamma^{(n)}(X) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log^n(t) dt$ และให้ง่ายต่อการคำนวณจะนำค่าประมาณของ $\Gamma'(2) = 0.4228$, $\Gamma''(2) = 0.8237$, $\Gamma'(3) = 1.8456$ และ $\Gamma''(3) = 2.4929$ ซึ่งได้พิสูจน์ไว้อย่างละเอียดในภาคผนวก ข สมการ (6.23) แทนลงในสมการ (3.12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} J_p(\beta) &= \frac{n}{\beta^2} + \left(\frac{n}{\beta^2} \right) (\Gamma''(2) + 2\beta\Gamma'(2)\log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha)) \\ &\quad - \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2} \right) \left(\Gamma''(3) + (n-1)(\Gamma'(2))^2 + 2\beta\log(\alpha)(\Gamma'(3) + (n-1)\Gamma'(2)) \right) \\ &\quad \left. + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha) \right) \\ &= \frac{n}{\beta^2} + \left(\frac{n}{\beta^2} \right) (0.8237 + 2(0.4228)\beta\log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha)) \\ &\quad - \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2} \right) \left(2.4929 + (n-1)(0.4228)^2 + 2\beta\log(\alpha)(1.8456 + (n-1)0.4228) \right) \\ &\quad \left. + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha) \right) \\ &= \left(\frac{n}{\beta^2} \right) \left\{ 1 + (0.8237 + 0.8456\beta\log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha)) - \left(\frac{1}{(n+1)} \right) (2.4929 + 0.1788(n-1)) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{(n+1)} \right) ((3.6912\beta\log(\alpha) + 0.8456(n-1)\beta\log(\alpha)) + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha)) \right\} \\ &= \left(\frac{n}{\beta^2} \right) \left\{ 1.8237 + 0.8456\beta\log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right. \\ &\quad \left. - 3.6912 \frac{\beta\log(\alpha)}{(n+1)} - 0.8456 \frac{(n-1)}{(n+1)} \beta\log(\alpha) - \beta^2 \log^2(\alpha) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_p(\beta) &= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \begin{aligned} &1.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \\ &- 3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} - 0.8456 \frac{(n-1)}{(n+1)} \beta \log(\alpha) \end{aligned} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ 1.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) \left(1 - \frac{(n-1)}{(n+1)}\right) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} - 3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ 1.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) \left(\frac{2}{(n+1)}\right) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} - 3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ 1.8237 + \frac{1.6912}{(n+1)} \beta \log(\alpha) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} - 3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ 1.8237 + (1.6912 - 3.6912) \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ 1.8237 - 2 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right) \{ 1.8237(n+1) - 2\beta \log(\alpha) - 2.4929 - 0.1788(n-1) \} \\
&= \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right) \{ 1.8237n + 1.8237 - 2\beta \log(\alpha) - 2.4929 - 0.1788n + 0.1788 \} \\
&= \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right) \{ (1.8237 - 0.1788)n - 2\beta \log(\alpha) + (1.8237 + 0.1788 - 2.4929) \} \\
&= \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right) \{ 1.6449n - 0.4904 - 2\beta \log(\alpha) \}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชันของสถานะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β คือ

$$J_p(\beta) = \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right) \{ 1.6449n - 0.4904 - 2\beta \log(\alpha) \} \quad (3.13)$$

ขั้นที่ 5 การหาผกผันของค่าคาดหวังพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β จากสมการ (3.13) ผกผันของค่าคาดหวังพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ β คือ

$$J_p(\beta)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right)\{1.6449n - 0.4904 - 2\beta \log(\alpha)\}}$$

ขั้นที่ 6 การหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF) จากสมการ (2.9)

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\beta}_{ML}$ คือ

$$\begin{aligned} se(\hat{\beta}_{ML}) &= \sqrt{J_p(\hat{\beta}_{ML})^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{n}{(n+1)\hat{\beta}_{ML}^2}\right)\{1.6449n - 0.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})\}}} \\ &= \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{(n+1)}{n}\right) \left(\frac{1}{1.6449n - 0.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)} \end{aligned}$$

จากช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์จะได้

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} se(\hat{\beta}_{ML})$$

เมื่อ $z_{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{(1+\gamma)}{2}$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยที่ γ แทน สัมประสิทธิ์

ความเชื่อมั่น และ $\gamma \in (0,1)$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF) คือ

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{(n+1)}{n}\right) \left(\frac{1}{1.6449n - 0.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)}$$

3.1.5 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากการแจกแจงไวบูลที่ไม่ทราบพารามิเตอร์สเกล α ยกเว้น 5 กรณีดังนี้ 1.) $\alpha=5, \beta=5, n=5$ 2.) $\alpha=5, \beta=5, n=10$ 3.) $\alpha=5, \beta=10, n=5$ 4.) $\alpha=5, \beta=10, n=10$ และ 5.) $\alpha=5, \beta=10, n=20$ และตัวอย่างสุ่มนี้สามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุงของ β แล้วช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าวจะมีรูปอย่างง่าย คือ

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{1}{-\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)}$$

เมื่อ $z_{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{(1+\gamma)}{2}$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยที่ γ แทน สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น และ $\gamma \in (0,1)$

พิสูจน์

ขั้นที่ 1 การหาล็อกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุงของ β

กำหนดให้ β เป็นค่าคงที่ และ $l_m(\beta)$ ให้แทน ล็อกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุงของ β

Yang และ Xie (2003) ได้พิสูจน์ไว้ว่า

$$l_m(\beta) \propto l_p(\beta) - 2\log(\beta)$$

โดยที่ $l_p(\beta)$ พิจารณาจากสมการ (3.8) และฟังก์ชันสคอร์ของภาวะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุงของ β คือ

$$S_m(\beta) = \frac{n-2}{\beta} - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad (3.14)$$

ขั้นที่ 2 การหาค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ β ในทำนองเดียวกับการหาค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ β จากสมการ (3.14) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_m(\beta)}{\partial \beta} &= \frac{\partial^2 l_m(\beta)}{\partial \beta^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{n-2}{\beta} - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right) \\ &= -\frac{n-2}{\beta^2} - n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} + n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าสังเกตพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ β คือ

$$I_m(\beta) = \frac{n-2}{\beta^2} + n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \quad (3.15)$$

ขั้นที่ 3 การหาค่าคาดหมายพิชเซอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ β จากสมการ (3.15) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} J_m(\beta) &= E \left[\frac{n-2}{\beta^2} + n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \right] \\ &= E \left[\frac{n-2}{\beta^2} \right] + E \left[n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right] - E \left[n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

ในการทำงานเกี่ยวกับการหาค่าคาดหวังพีชเชอร์อินฟอเมชันของภาชนะจะเป็นโปรไฟล์ของ β จะได้ว่า

$$J_m(\beta) = \frac{n-2}{\beta^2} + \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left(\Gamma''(2) + 2\beta\Gamma'(2)\log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) \right) - \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right) \left(\Gamma''(3) \right. \\ \left. + (n-1)(\Gamma'(2))^2 + 2\beta\log(\alpha)(\Gamma'(3) + (n-1)\Gamma'(2)) + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha) \right) \quad (3.16)$$

โดยที่ $\Gamma^{(n)}(X)$ คือ อนุพันธ์ย่อยหลายตัวแปรของฟังก์ชันแกมมา (The Partial Derivatives of the Gamma Function) ซึ่ง $\Gamma^{(n)}(X) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log^n(t) dt$ และให้ง่ายต่อการคำนวณจะนำค่าประมาณของ $\Gamma'(2) = 0.4228$, $\Gamma''(2) = 0.8237$, $\Gamma'(3) = 1.8456$ และ $\Gamma''(3) = 2.4929$ ซึ่งได้พิสูจน์ไว้อย่างละเอียดในภาคผนวก ข สมการ (6.23) แทนลงในสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$J_m(\beta) = \frac{n-2}{\beta^2} + \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left(0.8237 + 2(0.4228)\beta \log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) \right) - \left(\frac{n}{(n+1)\beta^2}\right) \left(2.4929 \right. \\ \left. + (n-1)(0.4228)^2 + 2\beta \log(\alpha)(1.8456 + (n-1)0.4228) + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha) \right) \\ = \frac{n-2}{\beta^2} + \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \begin{array}{l} 0.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) - \left(\frac{1}{(n+1)}\right) (2.4929 + 0.1788(n-1)) \\ - \left(\frac{1}{(n+1)}\right) \left((3.6912\beta \log(\alpha) + 0.8456(n-1)\beta \log(\alpha)) + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha) \right) \end{array} \right\} \\ = \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-2}{n} + 0.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \\ - 3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} - 0.8456 \frac{(n-1)}{(n+1)} \beta \log(\alpha) - \beta^2 \log^2(\alpha) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
J_m(\beta) &= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \left[1 - \frac{2}{n} + 0.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[-3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} - 0.8456 \frac{(n-1)}{(n+1)} \beta \log(\alpha) - \beta^2 \log^2(\alpha) \right] \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \left[1 - \frac{2}{n} + 0.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[-3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} - 0.8456 \frac{(n-1)}{(n+1)} \beta \log(\alpha) - \beta^2 \log^2(\alpha) \right] \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \left[-\frac{2}{n} + 1.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[-3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} - 0.8456 \frac{(n-1)}{(n+1)} \beta \log(\alpha) \right] \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \left[-\frac{2}{n} + 1.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) \left(1 - \frac{n-1}{n+1} \right) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[-3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} \right] \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \left[-\frac{2}{n} + 1.8237 + 0.8456\beta \log(\alpha) \left(\frac{2}{n+1} \right) - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[-3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} \right] \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ \left[-\frac{2}{n} + 1.8237 + 1.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{n+1} - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[-3.6912 \frac{\beta \log(\alpha)}{(n+1)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_m(\beta) &= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ -\frac{2}{n} + 1.8237 + (1.6912 - 3.6912) \frac{\beta \log(\alpha)}{n+1} - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2}\right) \left\{ -\frac{2}{n} + 1.8237 - 2 \frac{\beta \log(\alpha)}{n+1} - \frac{2.4929}{(n+1)} - 0.1788 \frac{(n-1)}{(n+1)} \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2(n+1)}\right) \left\{ -\frac{2(n+1)}{n} + 1.8237(n+1) - 2\beta \log(\alpha) - 2.4929 - 0.1788(n-1) \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2(n+1)}\right) \left\{ -\frac{2n}{n} - \frac{2}{n} + 1.8237n + 1.8237 - 2\beta \log(\alpha) - 2.4929 - 0.1788n + 0.1788 \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2(n+1)}\right) \left\{ -2 - \frac{2}{n} + 1.8237n + 1.8237 - 2\beta \log(\alpha) - 2.4929 - 0.1788n + 0.1788 \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2(n+1)}\right) \left\{ -\frac{2}{n} + (1.8237 - 0.1788)n + (-2 + 1.8237 - 2.4929 + 0.1788) - 2\beta \log(\alpha) \right\} \\
&= \left(\frac{n}{\beta^2(n+1)}\right) \left\{ -\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\beta \log(\alpha) \right\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ β คือ

$$J_m(\beta) = \left(\frac{n}{\beta^2(n+1)}\right) \left\{ -\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\beta \log(\alpha) \right\} \quad (3.17)$$

ขั้นที่ 4 การหาผกผันของค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ β

จากสมการ (3.17) ผกผันของค่าคาดหวังพิชเชอร์อินฟอเมชันของภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุงของ β

$$J_m(\beta)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{\beta^2(n+1)}\right) \left\{ -\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\beta \log(\alpha) \right\}}$$

ขั้นที่ 5 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)

จากสมการ (2.9)

ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\beta}_{ML}$ คือ

$$\begin{aligned} se(\hat{\beta}_{ML}) &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{n}{\hat{\beta}_{ML}^2(n+1)}\right) \left\{ -\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML}) \right\}}} \\ &= \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{\left(-\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})\right)}} \end{aligned}$$

จากช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} se(\hat{\beta}_{ML})$$

เมื่อ $z_{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{(1+\gamma)}{2}$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยที่ γ แทน สัมประสิทธิ์

ความเชื่อมั่น และ $\gamma \in (0,1)$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น $\gamma 100\%$ ของพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) คือ

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{\left(-\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})\right)}}$$

3.2 ตัวอย่างการหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ทั้ง 5 วิธี

ตัวอย่างการหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี จะใช้ข้อมูลของความเร็วลมเฉลี่ยรายเดือน (m/s) ที่เมืองโกกาทา (Kolkata) จากวันที่ 1 มีนาคม 2552 ถึง 31 มีนาคม 2552 จาก Bhattacharya (2011) ซึ่งเป็นการศึกษาเพื่อที่จะหาดำเนินการติดตั้งกังหันลมผลิตพลังงานไฟฟ้า มีข้อมูลดังนี้

ตารางที่ 3.1 ความเร็วลมเฉลี่ยรายเดือน (m/s) ที่เมืองโกกาทา (Kolkata) จากวันที่ 1 มีนาคม 2552 ถึง 31 มีนาคม 2552

มีนาคม 2552	ความเร็วลม (m/s)	มีนาคม 2552	ความเร็วลม (m/s)
1	0.56	17	0.28
2	0.28	18	0.83
3	0.56	19	1.39
4	0.56	20	1.11
5	1.11	21	1.11
6	0.83	22	0.83
7	1.11	23	0.56
8	1.94	24	0.83
9	1.11	25	1.67
10	0.83	26	1.94
11	1.11	27	1.39
12	1.39	28	0.83
13	0.28	29	2.22
14	0.56	30	1.67
15	0.28	31	2.22
16	0.28		

หมายเหตุ จาก “Weibull Distribution for Estimating the Parameters” by P. Bhattacharya, 2011, *Department of Mathematics, College of Engineering & Management, Kolaghat India.*

จากตารางที่ 3.1 ให้ตัวอย่างเป็นความเร็วลมเฉลี่ยรายเดือน (m/s) ที่เมืองโกกาตาและการประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β จากตัวอย่างจะช่วยในการเลือกตำแหน่งติดตั้งของกังหันลมผลิตไฟฟ้า สำหรับงานวิจัยนี้ใช้ตัวอย่างดังกล่าวหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ได้ดังนี้

3.2.1 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)

จากสมการ (2.1)

$$\text{พิจารณา } \left\{ \beta \mid g_p(\beta) \geq e^{\left(\frac{1}{2}\chi_{1,0.95}^2\right)} \right\}$$

โดยที่ $g_p(\beta) = \frac{L_p(\tilde{\alpha}, \beta)}{\max L_p(\tilde{\alpha}, \beta)}$ ซึ่งสามารถนำตัวอย่างในตารางที่ 3.1 ไปหาค่าของ $\hat{\beta}_{ML}$ จะได้

$\hat{\beta}_{ML} = 1.9081$ แล้วนำตัวอย่างดังกล่าวไปพล็อตกราฟเพื่อหาช่วงความเชื่อมั่นและใช้วิธีการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) สำหรับหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β โดยใช้โปรแกรม R

Studio เพื่อหาขอบเขตล่างและขอบเขตบน โดยให้พิจารณาจากภาพที่ 3.1 ได้ $g_p^{-1}\left(e^{\left(\frac{1}{2}\chi_{1,0.95}^2\right)}\right)$ คือ

$L = 1.4164$ และ $U = 2.4770$ ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF) คือ $(1.4164, 2.4770)$

3.2.2 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)

จากสมการ (2.1)

$$\text{พิจารณา } \left\{ \beta \mid g_m(\beta) \geq e^{\left(\frac{1}{2}\chi_{1,0.95}^2\right)} \right\}$$

โดยที่ $g_m(\beta) = \frac{L_m(\tilde{\alpha}, \beta)}{\max L_m(\tilde{\alpha}, \beta)}$ ซึ่งสามารถนำตัวอย่างในตารางที่ 3.1 ไปหาค่าของ $\hat{\beta}_{ML}$ จะได้

$\hat{\beta}_{ML} = 1.9081$ แล้วนำตัวอย่างดังกล่าวไปพล็อตกราฟเพื่อหาช่วงความเชื่อมั่นและใช้วิธีการประมาณ

ค่าในช่วง (Interpolation) สำหรับหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β โดยใช้โปรแกรม R Studio เพื่อหาขอบเขตล่างและขอบเขตบน โดยให้พิจารณาจากภาพที่ 3.1 ได้ $g_m^{-1}\left(e^{\left(\frac{-1}{2}\chi_{1,0.95}^2\right)}\right)$ คือ $L=1.3471$ และ $U=2.3936$ ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ ภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF) คือ (1.3471, 2.3936)

3.2.3 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W)

$$\text{พิจารณา } \hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \frac{\hat{\beta}_{ML}}{\sqrt{1.6449n}}$$

โดยที่ $\hat{\beta}_{ML}$ สามารถคำนวณโดยใช้โปรแกรม R Studio ฟังก์ชัน `optim()` จะได้ $\hat{\beta}_{ML} = 1.9081$ และนำค่า $\hat{\beta}_{ML} = 1.9081, n = 31, \gamma = 0.95$ แล้วนำไปแทนในสมการด้านบนจะได้

$$\begin{aligned} 1.9081 \pm z_{0.975} \frac{1.9080}{\sqrt{1.6449(31)}} &= 1.9081 \pm 1.96 \frac{1.9081}{\sqrt{50.9919}} \\ &= 1.9081 \pm 1.96(0.2672) \\ &= 1.9081 \pm 0.5237 \end{aligned}$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W) คือ (1.3844, 2.4318)

3.2.4 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)

$$\text{พิจารณา } \hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{(n+1)}{n}\right) \left(\frac{1}{1.6449n - 0.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)}$$

โดยที่ $\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML}$ สามารถคำนวณโดยใช้โปรแกรม R Studio ฟังก์ชัน `optim()` จะได้ $\hat{\alpha}_{ML} = 1.1550, \hat{\beta}_{ML} = 1.9081$ และนำค่า $\hat{\alpha}_{ML} = 1.1550, \hat{\beta}_{ML} = 1.9081, n = 31, \gamma = 0.95$ แล้วนำไปแทนในสมการด้านบนจะได้

$$1.9081 \pm z_{0.975} (1.9081) \sqrt{\left(\frac{31+1}{31}\right) \left(\frac{1}{1.6449(31) - 0.4904 - 2(1.9081)\log(1.1550)}\right)}$$

$$1.9081 \pm 1.96(1.9081) \sqrt{\left(\frac{32}{31}\right) \left(\frac{1}{50.2627}\right)} = 1.9081 \pm 1.96(0.2734)$$

$$= 1.9081 \pm 0.5360$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF) คือ (1.3705, 2.4457)

3.2.5 ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)

$$\text{พิจารณา } \hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{1}{-\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)}$$

โดยที่ $\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML}$ สามารถคำนวณโดยใช้โปรแกรม R Studio ฟังก์ชัน `optim()` จะได้ $\hat{\alpha}_{ML} = 1.1550, \hat{\beta}_{ML} = 1.9081$ และนำค่า $\hat{\alpha}_{ML} = 1.1550, \hat{\beta}_{ML} = 1.9081, n = 31, \gamma = 0.95$ แล้วนำไปแทนในสมการด้านบนจะได้

$$1.9081 \pm z_{0.975} (1.9081) \sqrt{\left(\frac{32}{31}\right) \left(\frac{1}{-\frac{2}{31} + 1.6449(31) - 2.4904 - 2(1.9081)\log(1.1550)}\right)}$$

$$= 1.9081 \pm 1.96(1.9081) \sqrt{\left(\frac{32}{31}\right) \left(\frac{1}{48.1982}\right)}$$

$$= 1.9081 \pm 1.96(0.2792)$$

$$= 1.9081 \pm 0.5473$$

ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) คือ (1.3590, 2.4571)

3.3 การจำลองสถานการณ์

การจำลองสถานการณ์กระทำเพื่อศึกษาเปรียบเทียบความยาว ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ (วิธี WPF และ WMPF) กับอีก 3 วิธี (วิธี PF, MPF และ W) และศึกษาขนาดตัวอย่าง มีขั้นตอนการจำลองดังต่อไปนี้

3.3.1 ศึกษาการสร้างช่วงความเชื่อมั่น

สร้างช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 0.95 และ 0.99 ของ

1. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)
2. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)
3. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W)
4. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)
5. ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)

3.3.2 กำหนดขอบเขตการศึกษา

กำหนดขอบเขตการศึกษาโดยให้

1. พารามิเตอร์สเกล $\alpha = 0.5, 1$ และ 5
2. พารามิเตอร์รูปร่าง $\beta = 0.5, 1, 5$ และ 10
3. ขนาดตัวอย่าง $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

3.3.3 การจำลองประชากร

การจำลองในงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม R Studio เวอร์ชัน 1.0.136 ในจำลองประชากรให้มีพารามิเตอร์ตามที่กำหนดในข้อ 3.3.2 โดยให้ขนาดเท่ากับ 100,000 (เสมือนว่ามีประชากรขนาดอนันต์)

3.3.4 การสุ่มขนาดตัวอย่างจากประชากร

สุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรในข้อ 3.3.3

3.3.5 การหาขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น

หาขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่นจาก $L = g^{-1}(c)$ และ $U = g^{-1}(c)$ ตามลำดับโดยที่ $U > L$ ดังแสดงในภาพที่ 3.1

3.3.6 ตรวจสอบความถูกต้องของขอบเขตบนและล่างของช่วงความเชื่อมั่น

ตรวจสอบว่าขอบเขตบนและล่างที่ได้จากข้อ 3.3.5 คลุมพารามิเตอร์ β ที่กำหนดหรือไม่

3.3.7 การทำซ้ำ

ทำซ้ำข้อ 3.3.4-3.3.6 จำนวน 10,000 รอบ

3.3.8 การคำนวณค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (Coverage Probability)

คำนวณค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (Coverage Probability) จาก

$$CP = \frac{\sum_{i=1}^{10,000} I_{[L_i, U_i]}(\beta)}{10,000}$$

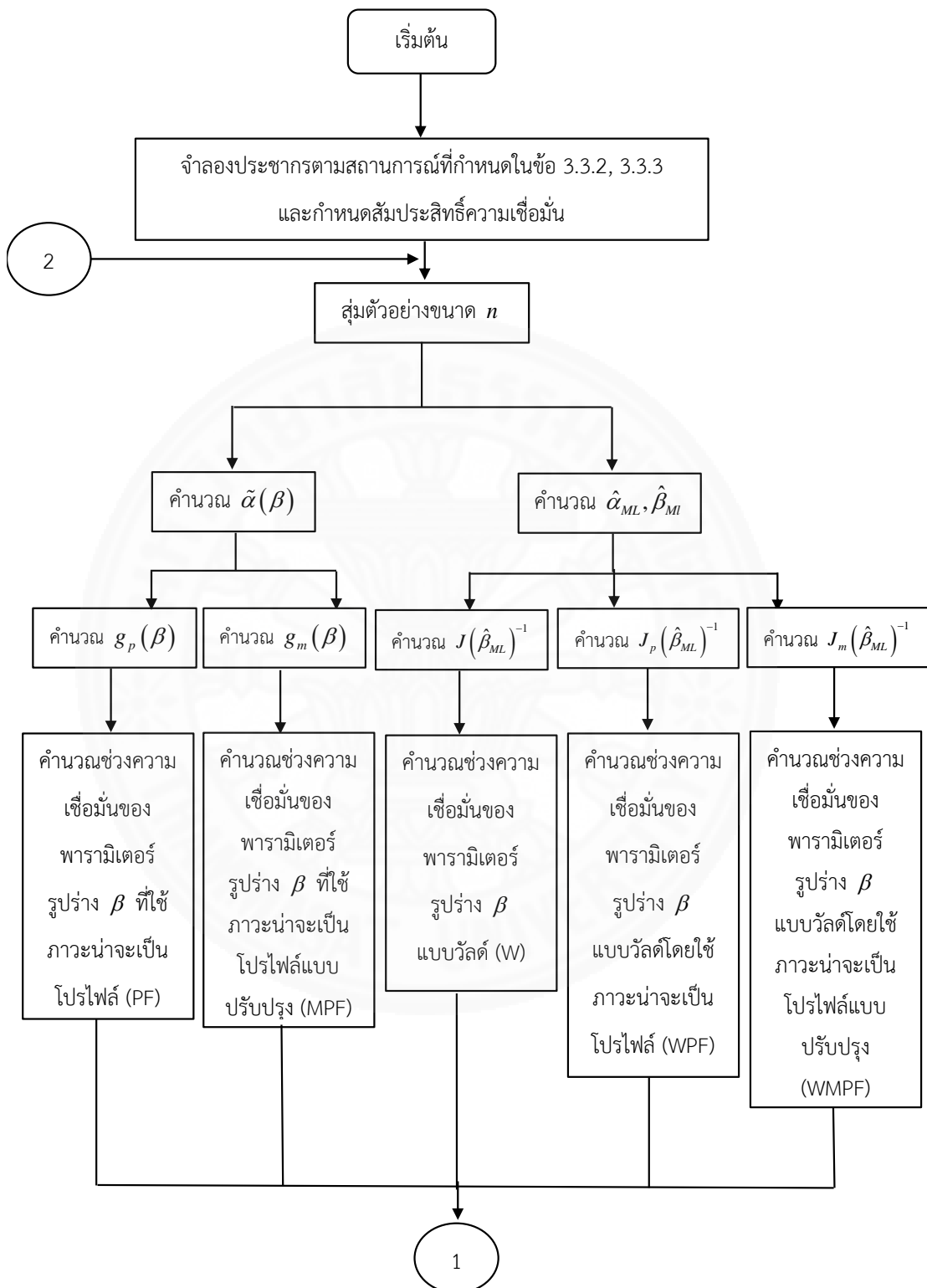
โดยที่ $I_{[L_i, U_i]}(\beta)$ จะมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ β อยู่ในช่วง $[L_i, U_i]$ และเท่ากับศูนย์เมื่ออยู่นอกช่วง L_i และ U_i เป็นขอบเขตล่างและบนของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i ตามลำดับ

3.3.9 การคำนวณค่าประมาณความยาวโดยเฉลี่ย (Average Length)

คำนวณค่าประมาณความยาวโดยเฉลี่ย (Average Length) ของช่วงเชื่อมั่นจาก

$$AL = \frac{\sum_{i=1}^{10,000} (U_i - L_i)}{10,000}$$

โดยที่ L_i และ U_i เป็นขอบเขตล่างและบนของช่วงความเชื่อมั่นในรอบที่ i ตามลำดับ





ภาพที่ 3.2 แผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรม R Studio เวอร์ชัน 1.0.136

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

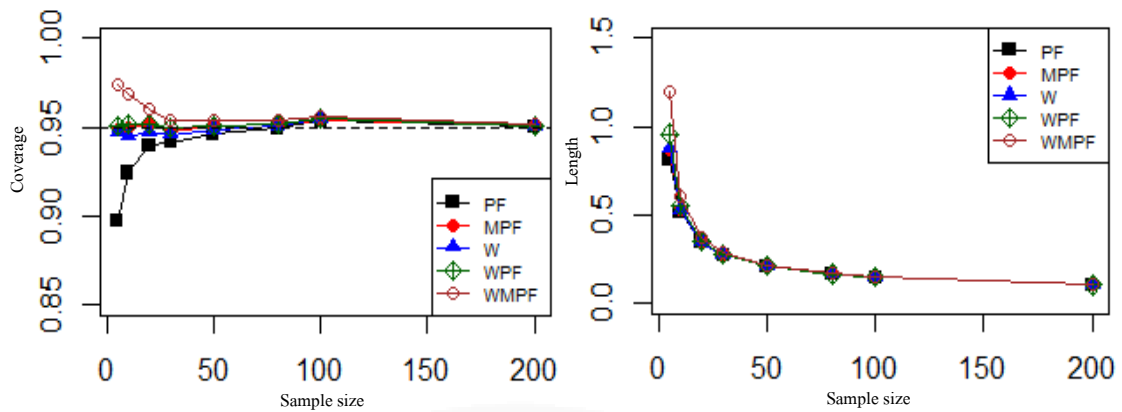
การสร้างสูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald) ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์และโปโรไฟล์แบบปรับปรุงของพารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูลซึ่งได้นำเสนอไว้ในทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 ซึ่งเป็นวัตถุประสงค์ของงานวิจัยครั้งนี้แล้วนำมาเปรียบเทียบกับช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์, ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุง และแบบวัลด์ โดยพิจารณาจากค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการจำลอง เพื่อหาข้อสรุปในการนำสูตรอย่างง่ายไปใช้

$E(X)$	แทน ค่าเฉลี่ยของประชากรในการแจกแจงไวบูล
$Var(X)$	แทน ความแปรปรวนของประชากรในการแจกแจงไวบูล
n	แทน ขนาดตัวอย่าง
PF	แทน วิธีภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์
MPF	แทน วิธีภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุง
W	แทน วิธีแบบวัลด์
WPF	แทน วิธีแบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์
WMPF	แทน วิธีแบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุง
l_{PF}	แทน ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์
l_{MPF}	แทน ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุง
l_W	แทน ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีแบบวัลด์
l_{WPF}	แทน ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีแบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์
l_{WMPF}	แทน ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นด้วยวิธีแบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปโรไฟล์แบบปรับปรุง
$X \sim Wb(\alpha, \beta)$	แทน ตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงไวบูลที่มี α เป็นพารามิเตอร์สเกลและ β เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง

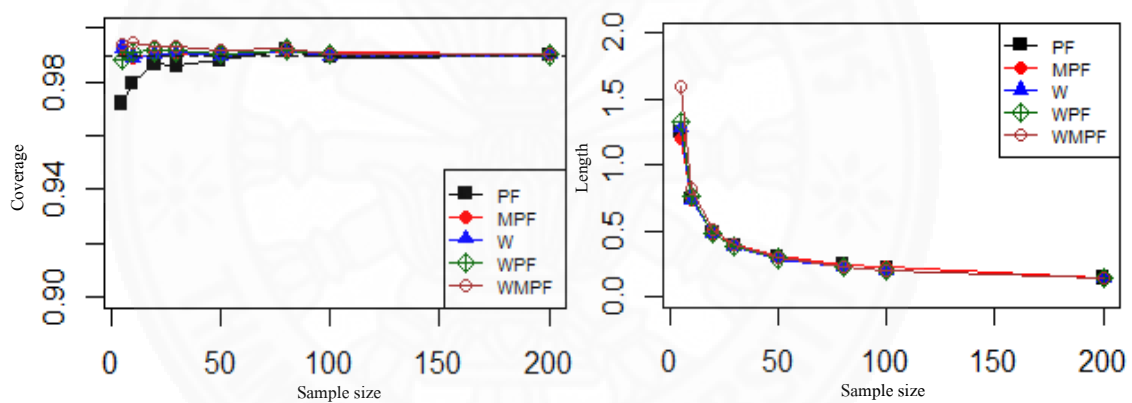
งานวิจัยนี้ศึกษาค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β โดยที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100, 200$ จากค่า α และ β ทั้ง 12 กรณี ดังนี้

4.1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.1 และ 4.2 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 0.5$ สำหรับกรณีนี้มี $E(X) = 1, Var(X) = 5$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ 6.6188 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวจะพบว่าวิธี WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 30$) เมื่อขนาดตัวเพิ่มขึ้นจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี MPF วิธี W และวิธี WPF จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง แต่วิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็เพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n = 80$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมจึงเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF ให้ค่าช่วงที่มีความยาวมากกว่าช่วงจากอีก 4 วิธีที่เหลือ และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (0.8116, 0.8664, 0.8770, 0.9588, 1.1951)$ จะได้ว่า $l_W = 1.08l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 0.91l_{WPF}, 0.73l_{WMPF}$ จะสังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่จะสูงกว่าเพียงเล็กน้อย สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (1.2507, 1.1989, 1.2764, 1.3336, 1.5921)$ จะได้ว่า $l_W = 1.02l_{PF}, 1.06l_{MPF}, 0.96l_{WPF}, 0.80l_{WMPF}$ จะสังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่จะสูงกว่าเพียงเล็กน้อย (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

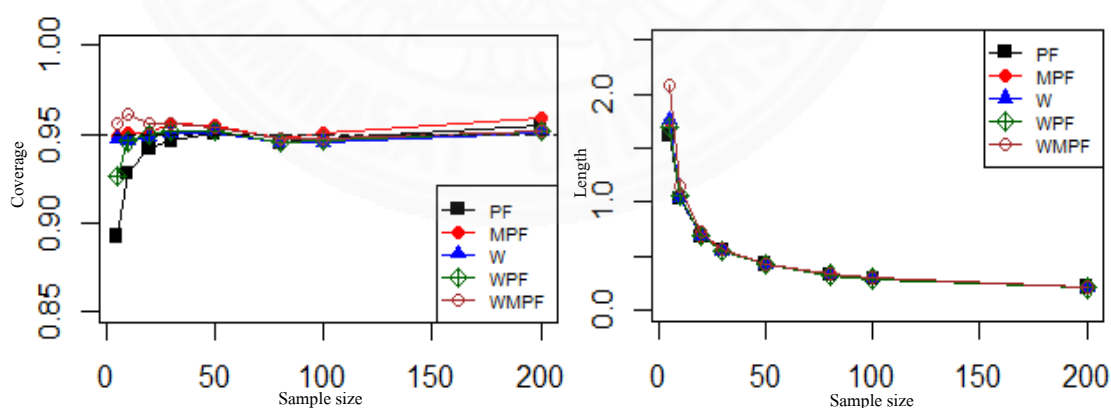


ภาพที่ 4.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

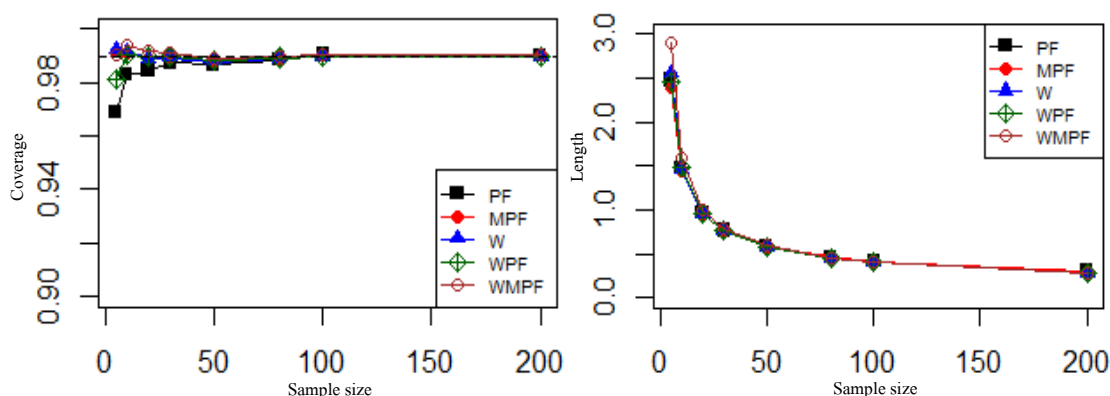
4.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 1$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.3 และ 4.4 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha = 0.5$ และ $\beta = 1$ สำหรับกรณีนี้มี $E(X) = 0.5$, $Var(X) = 0.25$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ 2 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้

ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 30$) เมื่อขนาดตัวเพิ่มขึ้นจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี PF และ WPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก ($n \leq 30$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n = 50$ และ $n = 80$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF ให้ค่าช่วงที่มีความยาวมากกว่าช่วงจากอีก 4 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (1.6211, 1.7411, 1.7631, 1.7029, 2.0799)$ จะได้ว่า $l_W = 1.09l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 1.04l_{WPF}, 0.85l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำและสูงกว่าวิธี W ตามลำดับ สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (2.4800, 2.3898, 2.5570, 2.4653, 2.8952)$ จะได้ว่า $l_W = 1.03l_{PF}, 1.07l_{MPF}, 1.04l_{WPF}, 0.88l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำและสูงกว่าวิธี W ตามลำดับ (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

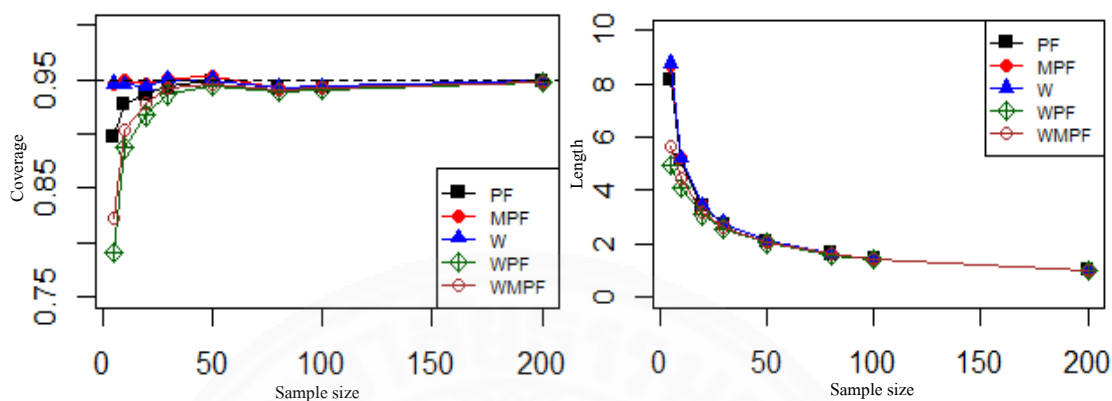


ภาพที่ 4.4 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=0.5, \beta=1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

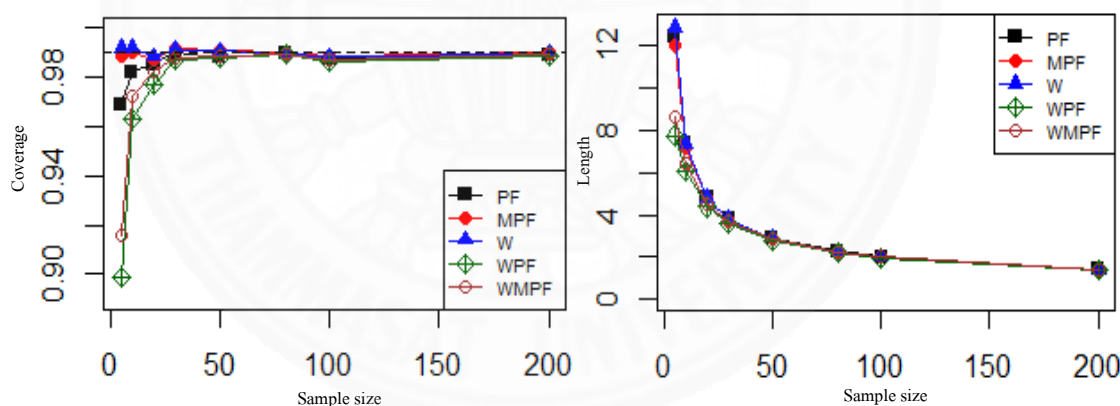
4.3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha=0.5$ และ $\beta=5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.5 และ 4.6 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha=0.5$ และ $\beta=5$ สำหรับกรณีนี้มี $E(X)=0.4591, Var(X)=0.0111$ และมีค่าของความแปรปรวน 2 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF, WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n \leq 30$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n=50$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% เมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่าวิธี PF, MPF และ W ให้ค่าช่วงที่มีความยาวมากกว่าวิธี WPF และ WMPF เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีนี้ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (8.1492, 8.6658, 8.7716, 4.9738, 5.6545)$ จะได้ว่า $l_W = 1.08l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 1.76l_{WPF}, 1.55l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W สำหรับในกรณีนี้ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (12.4670, 12.0620, 12.8618, 7.7565, 8.5982)$ จะได้ว่า $l_W = 1.03l_{PF}, 1.07l_{MPF}, 1.66l_{WPF}, 1.50l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่า

วิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W (ค่าประมาณความน่าจะเป็น ค) รวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.5 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้รวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=0.5, \beta=5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

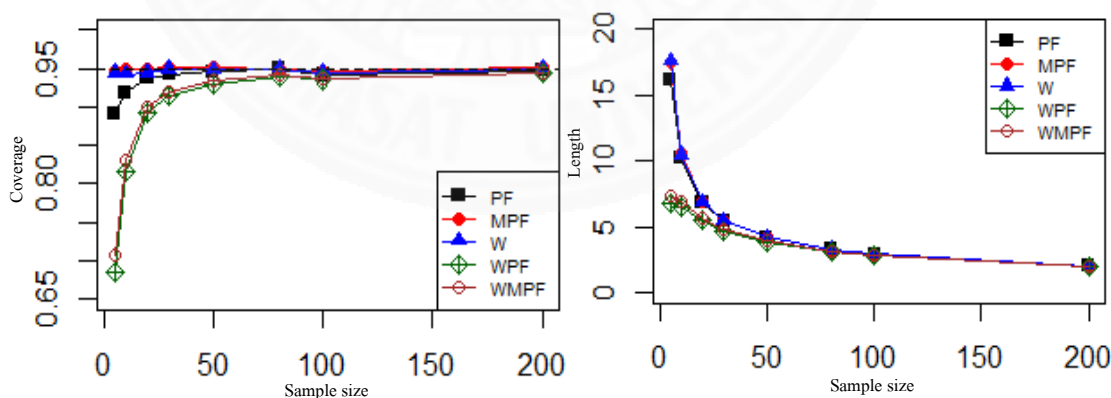


ภาพที่ 4.6 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้รวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=0.5, \beta=5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

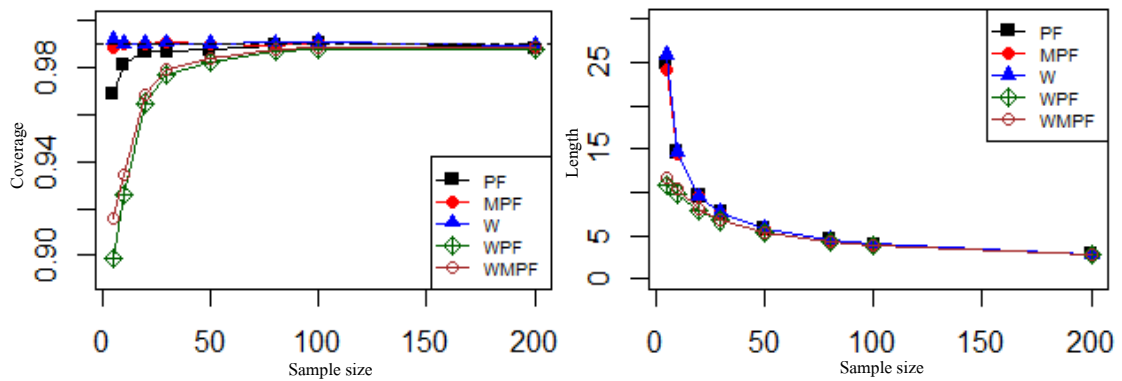
4.4 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้รวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที $\alpha=0.5$ และ $\beta=10$ ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.7 และ 4.8 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นค้รวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที $\alpha=0.5$ และ $\beta=10$

สำหรับกรณีนี้มี $E(X) = 0.4757, Var(X) = 0.0033$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ -0.6376 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี W และ MPF ทุกค่าของขนาดตัวอย่างจะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี PF วิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 50$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมก็เพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n = 100$ ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมจึงเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี W และ MPF มีแนวโน้มจะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมสูงกว่า 3 วิธีที่เหลือ ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากันและเมื่อพิจารณาถึงความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่าวิธี PF, WPF และ W จะให้ความยาวของช่วงที่ใกล้เคียงกันและมากกว่าวิธี MPF และวิธี WMPF และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (16.1700, 17.4631, 17.6300, 6.7904, 7.4142)$ จะได้ว่า $l_W = 1.09l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 2.60l_{WPF}, 2.38l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W และต่ำกว่าเยอะมาก สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (24.8742, 24.0607, 25.8776, 10.7583, 11.6988)$ จะได้ว่า $l_W = 1.04l_{PF}, 1.08l_{MPF}, 2.41l_{WPF}, 2.21l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W และต่ำกว่าเยอะมาก (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.7 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

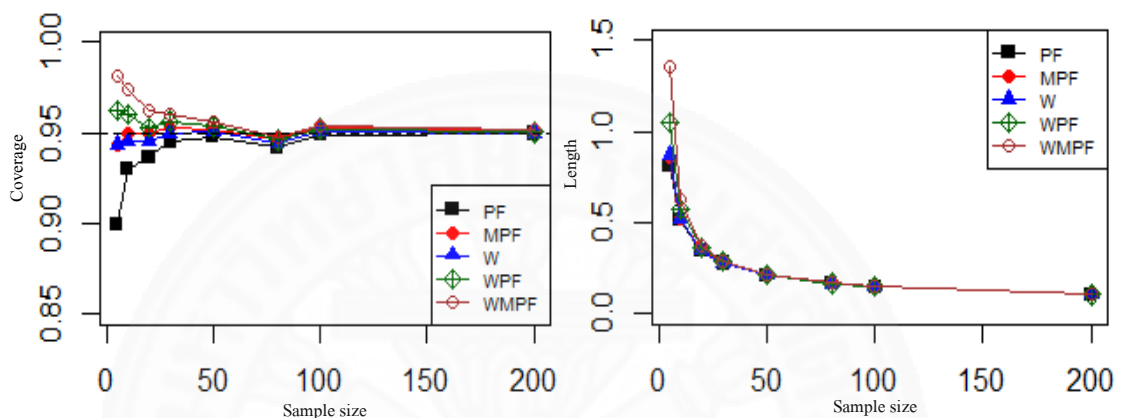


ภาพที่ 4.8 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 0.5, \beta = 10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

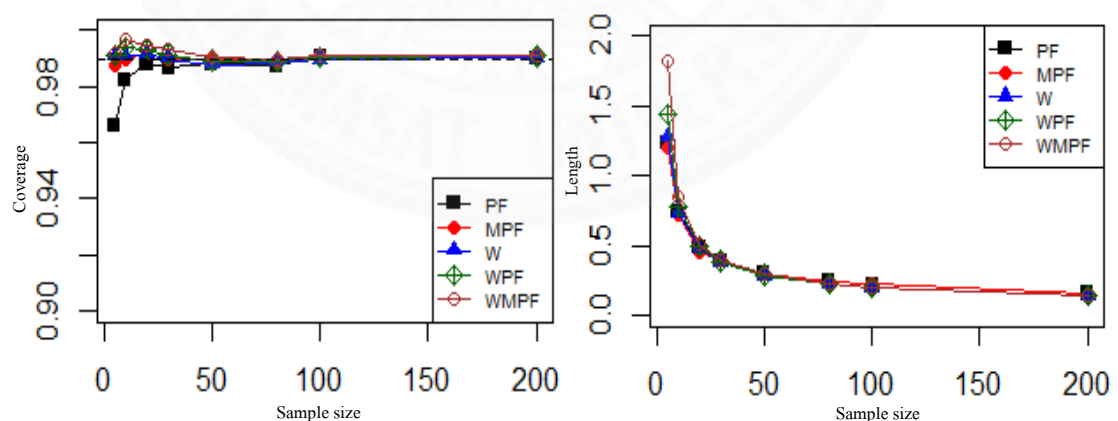
4.5 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 1$ และ $\beta = 0.5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.9 และ 4.10 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha = 1$ และ $\beta = 0.5$ สำหรับกรณีมี $E(X) = 2$, $Var(X) = 20$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ 6.6188 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็จะเข้าใกล้ช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n = 100$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นที่มีความยาวมากกว่าอีก 4 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (0.8130, 0.8587, 0.8694, 1.0531, 1.3590)$ จะได้ว่า $l_W = 1.07l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 0.83l_{WPF}, 0.64l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่

สูงกว่าเพียงเล็กน้อย สำหรับในกรณีที่ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (1.2412, 1.1981, 1.2803, 1.4447, 1.8212)$ จะได้ว่า $l_W = 1.03l_{PF}, 1.07l_{MPF}, 0.89l_{WPF}, 0.70l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่สูงกว่าเพียงเล็กน้อย (ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



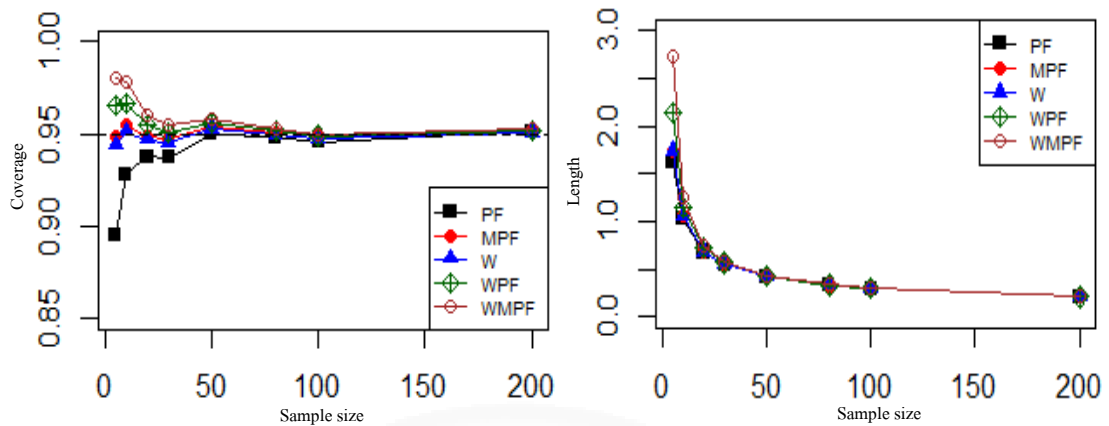
ภาพที่ 4.9 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200



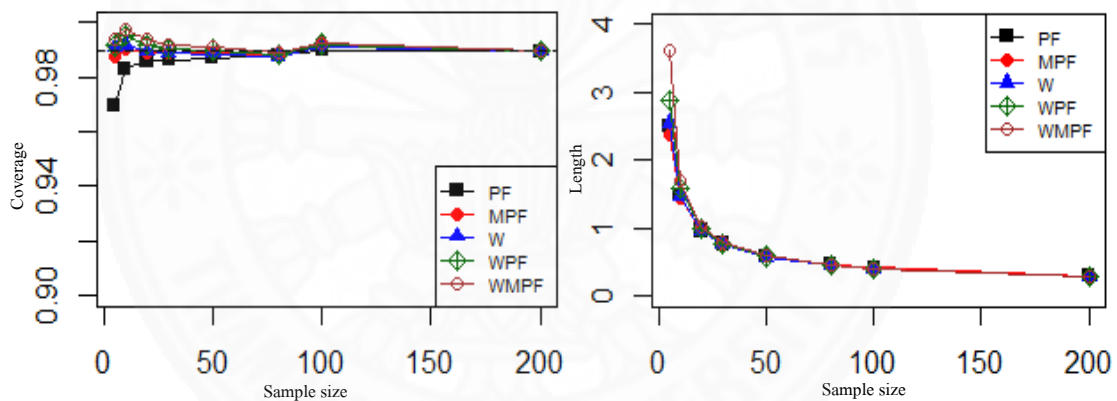
ภาพที่ 4.10 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

4.6 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha=1$ และ $\beta=1$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.11 และ 4.12 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha=1$ และ $\beta=1$ สำหรับกรณีนี้มี $E(X)=1, Var(X)=1$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ 2 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 30$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมก็จะเข้าใกล้ช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n=80$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นค้ำรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF ให้ค่าของช่วงที่มีความยาวมากกว่าช่วงจากอีก 4 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (1.6143, 1.7323, 1.7425, 2.1328, 2.7376)$ จะได้ว่า $l_W = 1.08l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 0.82l_{WPF}, 0.64l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่สูงกว่าเพียงเล็กน้อย สำหรับในกรณีที่ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (2.4937, 2.3864, 2.5463, 2.8784, 3.6092)$ จะได้ว่า $l_W = 1.02l_{PF}, 1.07l_{MPF}, 0.88l_{WPF}, 0.71l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่สูงกว่าเพียงเล็กน้อย (ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.11 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

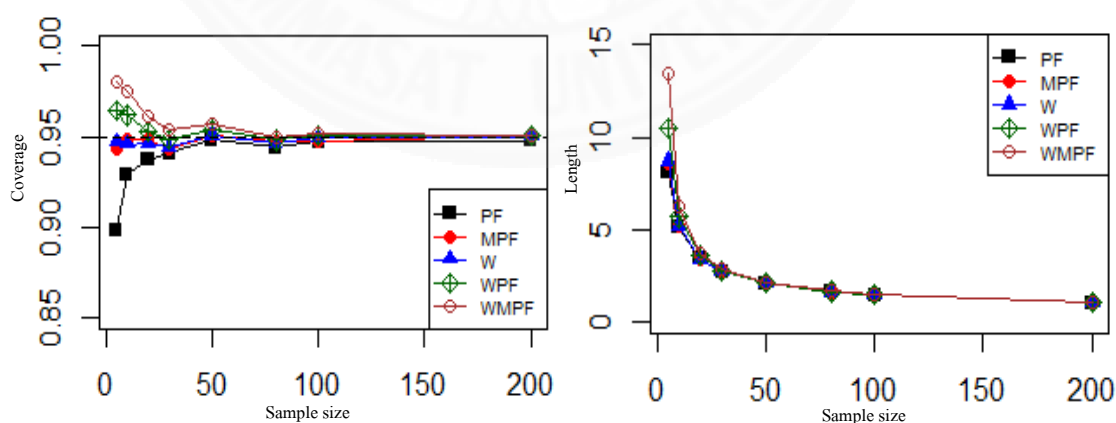


ภาพที่ 4.12 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=1)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

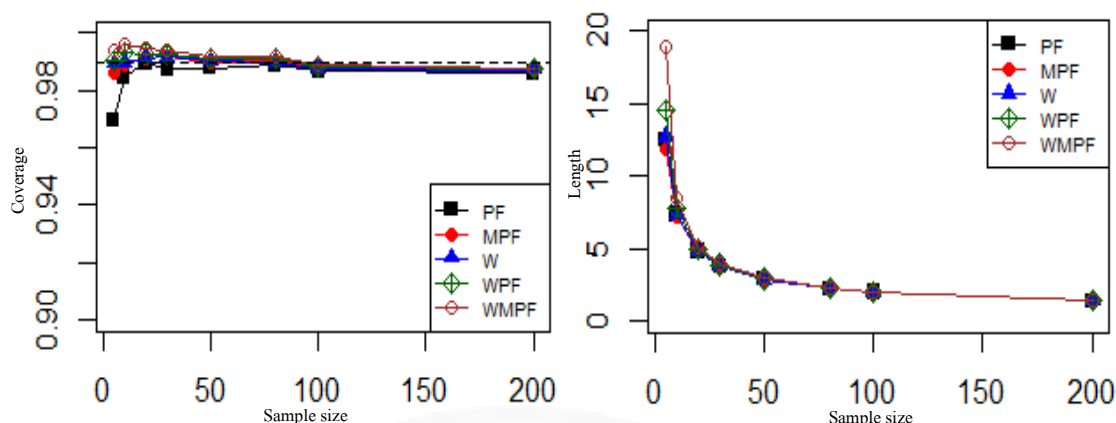
4.7 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที $\alpha=1$ และ $\beta=5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.13 และ 4.14 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที $\alpha=1$ และ $\beta=5$ สำหรับกรณีนี้มี $E(X)=0.9182, Var(X)=0.0442$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ -0.2541

เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นเป็นคัมรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมก็จะเข้าใกล้ช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนด สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n = 80$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่าวิธี WMPF ให้ค่าของช่วงที่มีความยาวมากกว่าช่วงอีก 4 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีนี้ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (8.0908, 8.5691, 8.7179, 10.4933, 13.4442)$ จะได้ว่า $l_W = 1.08l_{PF}, 1.02l_{MPF}, 0.83l_{WPF}, 0.65l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่สูงกว่าเพียงเล็กน้อย สำหรับในกรณีนี้ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (12.4853, 11.9241, 12.7346, 14.5068, 18.8702)$ จะได้ว่า $l_W = 1.02l_{PF}, 1.07l_{MPF}, 0.88l_{WPF}, 0.67l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่สูงกว่าเพียงเล็กน้อย (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.13 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

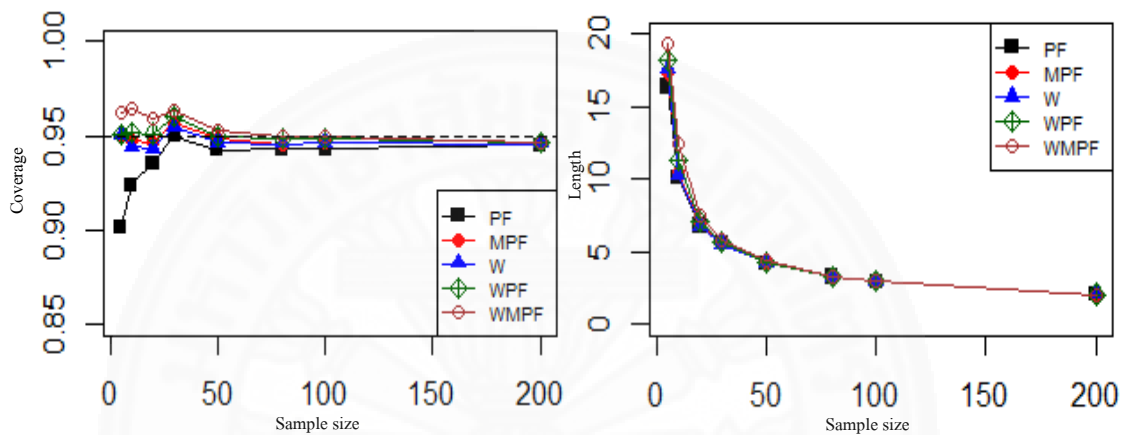


ภาพที่ 4.14 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

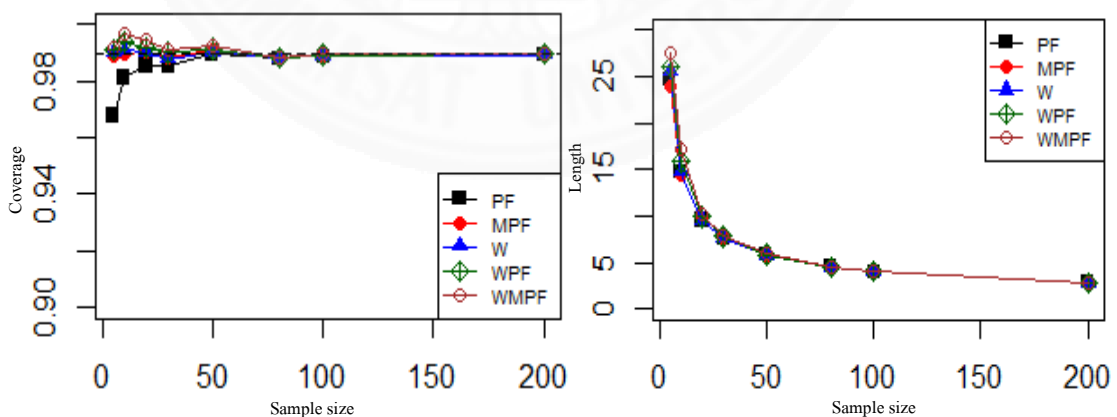
4.8 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha=1$ และ $\beta=10$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.15 และ 4.16 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha=1$ และ $\beta=10$ สำหรับกรณีนี้มี $E(X) = 0.9514$, $Var(X) = 0.0131$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ -0.6376 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มที่ต่ำความช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n = 80$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF ให้ค่าช่วงที่มีความยาวมากกว่าช่วงอีก 4 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณี ที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (16.3760, 17.3933, 17.6217, 18.2015, 19.3254)$ จะได้ว่า $l_W = 1.08l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 0.97l_{WPF}, 0.93l_{WMPF}$

สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่สูงกว่าเพียงเล็กน้อย สำหรับในกรณีที่ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (24.7416, 23.9337, 25.6093, 26.1451, 27.5231)$ จะได้ว่า $l_W = 1.04l_{PF}, 1.07l_{MPF}, 0.98l_{WPF}, 0.93l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W แต่สูงกว่าเพียงเล็กน้อย (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



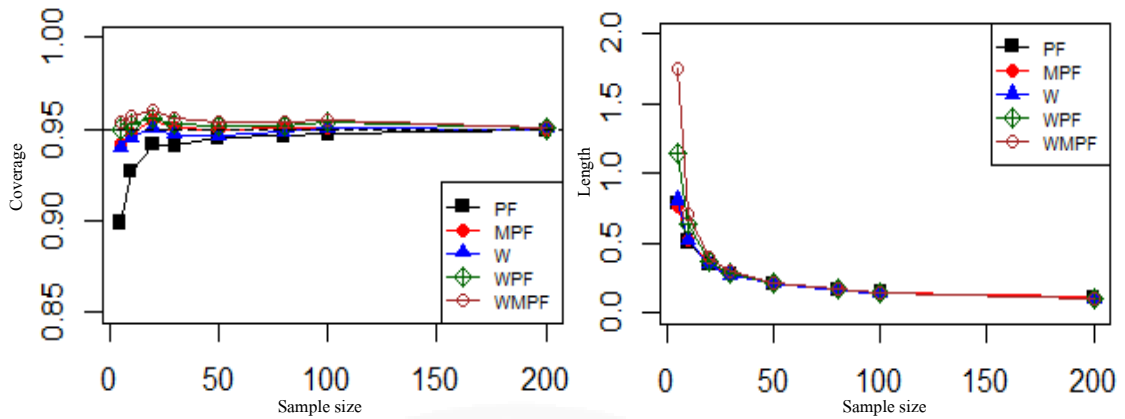
ภาพที่ 4.15 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200



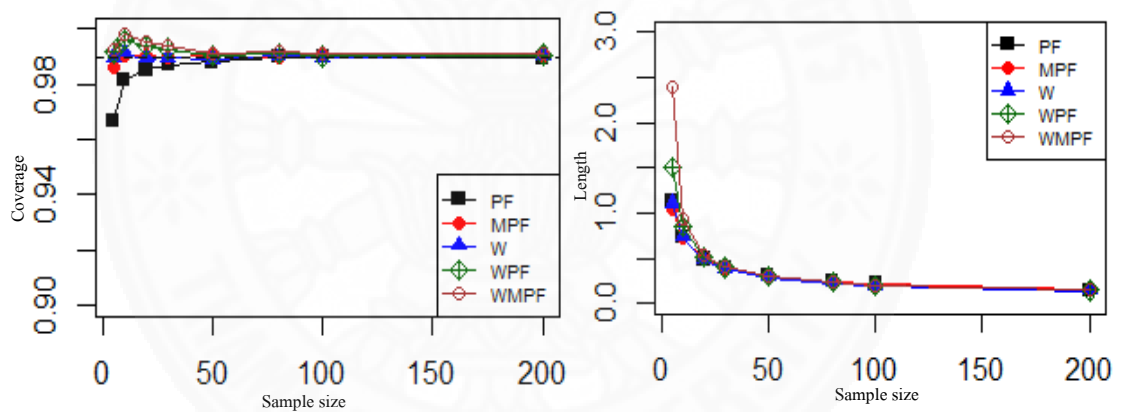
ภาพที่ 4.16 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=1, \beta=10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

4.9 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha = 5$ และ $\beta = 0.5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.17 และ 4.18 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha = 5$ และ $\beta = 0.5$ สำหรับกรณีนี้มีค่า $E(X) = 10, \text{Var}(X) = 500$ และมีค่าของความแปรปรวน 6.6188 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มที่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n = 80$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นที่มีความยาวมากกว่าช่วงอีก 4 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (0.7852, 0.7699, 0.8076, 1.1435, 1.7530)$ จะได้ว่า $l_W = 1.03l_{PF}, 1.05l_{MPF}, 0.71l_{WPF}, 0.46l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W สำหรับในกรณีที่ $n = 5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (1.1387, 1.0368, 1.1030, 1.5071, 2.3980)$ จะได้ว่า $l_W = 0.97l_{PF}, 1.06l_{MPF}, 0.73l_{WPF}, 0.46l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่สูงกว่าวิธี W (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.17 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=5, \beta=0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

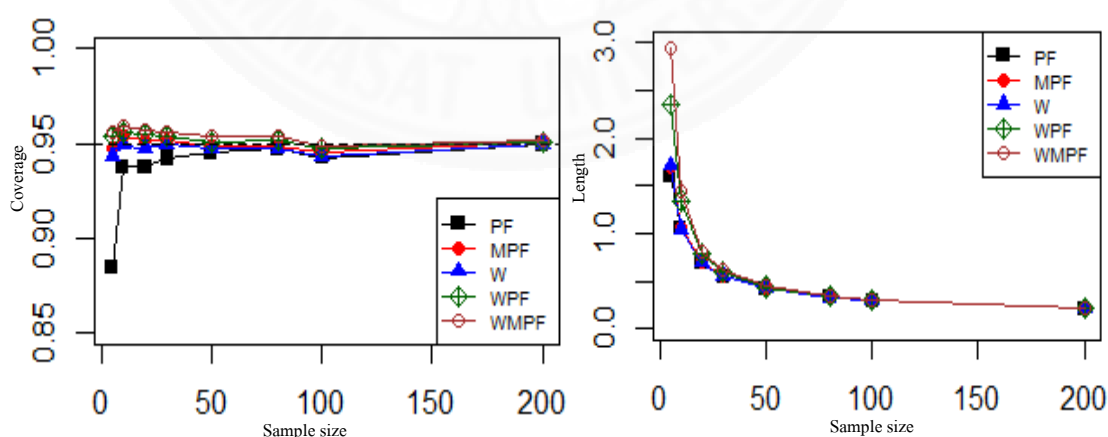


ภาพที่ 4.18 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=5, \beta=0.5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

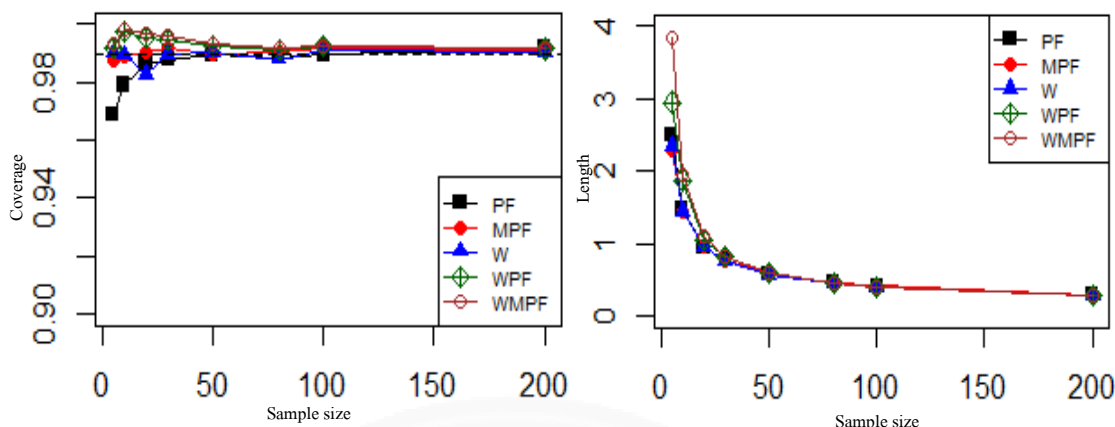
4.10 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่มี $\alpha = 5$ และ $\beta = 1$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.19 และ 4.20 เมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่มี $\alpha = 5$ และ $\beta = 1$ สำหรับกรณีนี้มีค่า $E(X) = 5, Var(X) = 25$ และมีค่าของความแปรปรวน 2 เมื่อพิจารณาภาพ

ดังกล่าวพบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n=80$ และ $n=100$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นที่มีความยาวมากกว่าช่วงอีก 4 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (1.6034, 1.6947, 1.7056, 2.3546, 2.9456)$ จะได้ว่า $l_W = 1.06l_{PF}, 1.00l_{MPF}, 0.72l_{WPF}, 0.58l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W สำหรับในกรณีที่ $n=5$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (2.4984, 2.3851, 2.3541, 2.9512, 3.8412)$ จะได้ว่า $l_W = 0.94l_{PF}, 0.99l_{MPF}, 0.80l_{WPF}, 0.61l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.19 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=5, \beta=1)$ ที่ $n=5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

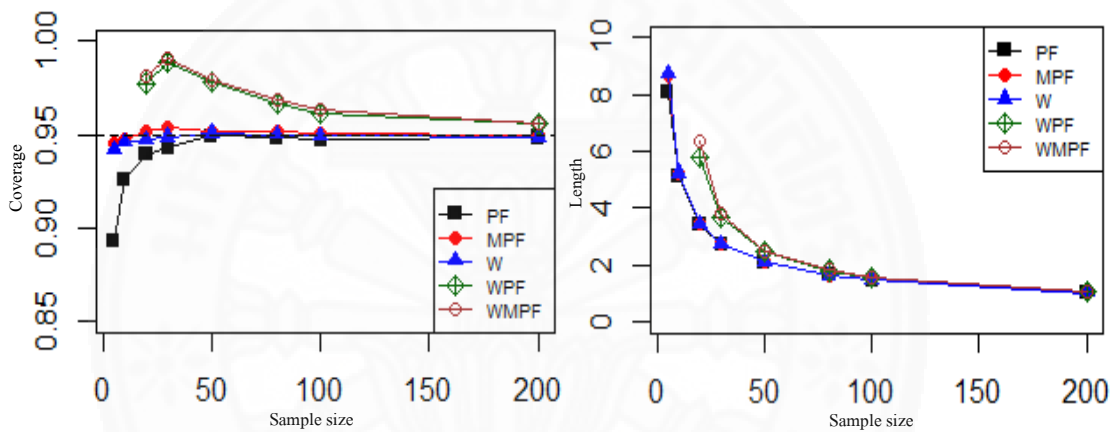


ภาพที่ 4.20 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=5, \beta=1)$ ที่ $n=5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

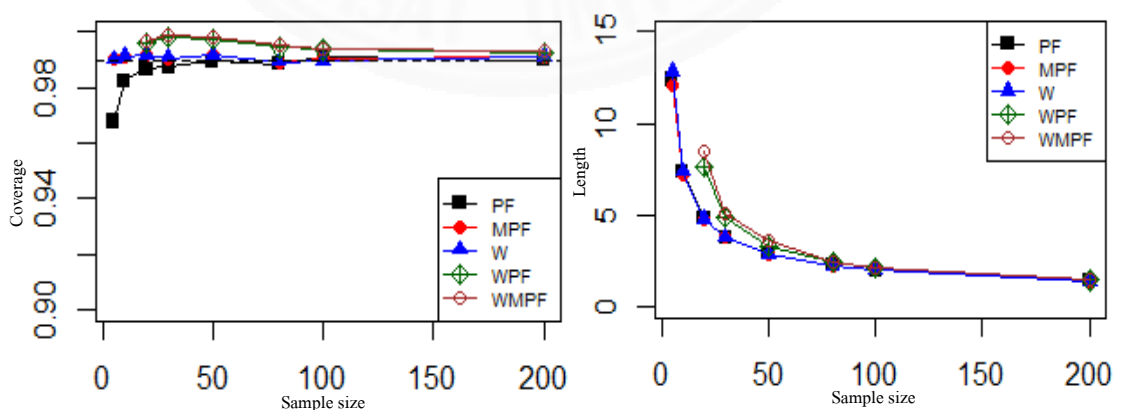
4.11 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่มี $\alpha=5$ และ $\beta=5$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.21 และ 4.22 สังเกตได้ว่ามีข้อมูลของวิธี WPF และ WMPF ในกรณีที่ $n=5$ และ 10 ไม่ได้นำมาเปรียบเทียบ (สามารถดูค่าที่ได้ในภาคผนวก ค ตารางที่ 6.4, 6.5, 6.9 และ 6.10) เพราะว่าการนี้ดังกล่าวไม่สามารถใช้วิธี WPF และ WMPF หาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ได้ เนื่องจากการนำ n, α และ β แทนในสมการทฤษฎีบทที่ 3.1 และ 3.2 ทำให้ในรากของสมการมีค่าติดลบเมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha=5$ และ $\beta=5$ สำหรับกรณีนี้มีค่า $E(X)=4.5908, Var(X)=1.1057$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ -0.2541 พบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 50$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมที่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 40$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n=50$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF และ WPF ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นที่มีความยาวมากกว่าช่วงอีก 3 วิธีที่เหลือและเมื่อ

ขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n = 20$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (3.4222, 3.4690, 3.4428, 5.7753, 6.3894)$ จะได้ว่า $l_W = 1.01l_{PF}, 0.99l_{MPF}, 0.60l_{WPF}, 0.54l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W สำหรับในกรณีที่ $n = 20$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (4.7979, 4.7628, 4.7947, 7.6669, 8.4992)$ จะได้ว่า $l_W = 1.00l_{PF}, 1.01l_{MPF}, 0.63l_{WPF}, 0.56l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



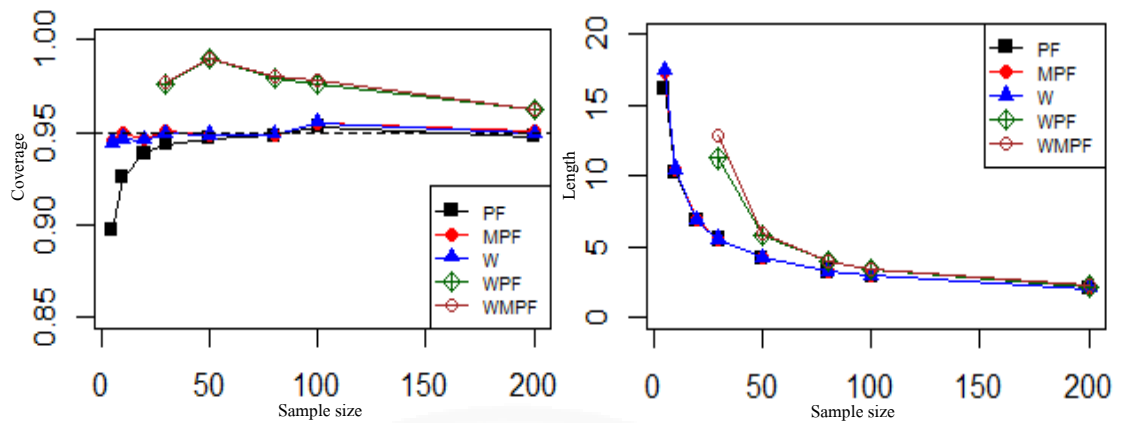
ภาพที่ 4.21 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200



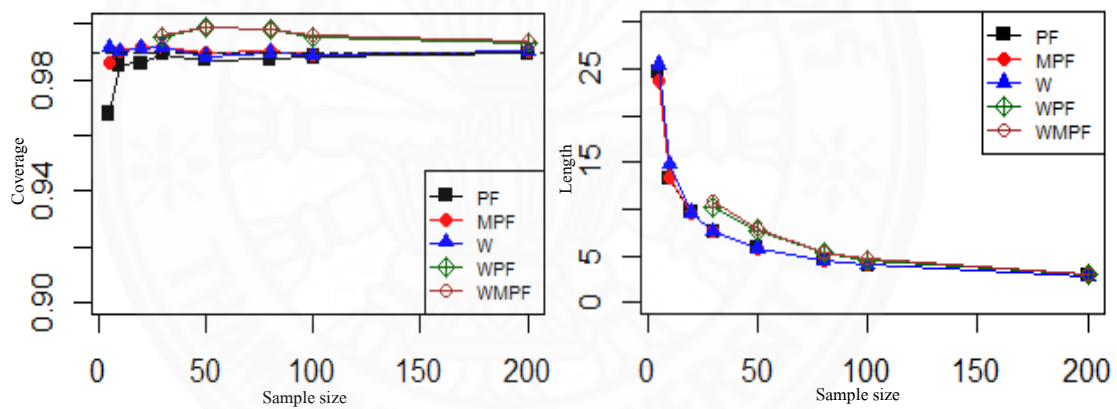
ภาพที่ 4.22 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha = 5, \beta = 5)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

4.12 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β ในกรณีที่ $\alpha=5$ และ $\beta=10$ ทุกๆค่าของขนาดตัวอย่าง

จากภาพที่ 4.23 และ 4.24 สังเกตได้ว่ามีข้อมูลของวิธี WPF และ WMPF ในกรณีที่ $n=5, 10$ และ 20 ไม่ได้นำมาเปรียบเทียบ (สามารถดูค่าที่ได้ในภาคผนวก ค ตารางที่ 6.4, 6.5, 6.9 และ 6.10) เพราะว่ากรณีดังกล่าวไม่สามารถใช้วิธี WPF และ WMPF หาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β ได้ เนื่องจากการนำ n, α และ β แทนในสมการทฤษฎีบทที่ 3.1 และ 3.2 ทำให้ในรากของสมการมีค่าติดลบเมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% และ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี ในกรณีที่ $\alpha=5$ และ $\beta=10$ สำหรับกรณีนี้มีค่า $E(X)=4.7568, Var(X)=0.3275$ และมีค่าของความเบ้ประมาณ -0.6376 เมื่อพิจารณาภาพดังกล่าวพบว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมสูงกว่า 95% และ 99% แม้ขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 50$) เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นจะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% สำหรับวิธี MPF และ W จะให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมใกล้เคียง 95% และ 99% ทุกค่าของขนาดตัวอย่าง สำหรับวิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มที่ต่ำกว่าช่วงความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อขนาดตัวอย่างขนาดเล็ก ($n \leq 30$) แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมก็จะเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง $n=80$ และ $n=100$ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมจึงจะเข้าใกล้ 95% และ 99% ตามลำดับ นอกจากนี้ยังพบว่าวิธี PF และ WMPF มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุด และเมื่อพิจารณาถึงค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่นพบว่า วิธี WMPF และ WPF ให้ค่าช่วงความเชื่อมั่นที่มีความยาวมากกว่าช่วงอีก 3 วิธีที่เหลือและเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นทั้ง 5 วิธีจะให้ความยาวของช่วงไม่แตกต่างกัน สำหรับในกรณีที่ $n=30$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (5.5167, 5.5485, 5.5351, 11.2528, 12.8188)$ จะ ได้ ้ ว่า $l_W = 1.00l_{PF}, 1.00l_{MPF}, 0.49l_{WPF}, 0.43l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W สำหรับในกรณีที่ $n=30$ ความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% โดย $(l_{PF}, l_{MPF}, l_W, l_{WPF}, l_{WMPF}) = (7.6183, 7.5748, 7.6104, 10.1142, 10.7464)$ จะ ได้ ้ ว่า $l_W = 1.00l_{PF}, 1.00l_{MPF}, 0.75l_{WPF}, 0.71l_{WMPF}$ สังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF ให้ความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าวิธี W (ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสามารถดูได้ในภาคผนวก ค)



ภาพที่ 4.23 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=5, \beta=10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200



ภาพที่ 4.24 ค่าประมาณความน่าจะเป็นค้ำรวม (ซ้าย) และความยาว (ขวา) ของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี เมื่อ $X \sim Wb(\alpha=5, \beta=10)$ ที่ $n = 5, 10, 20, 30, 50, 80, 100$ และ 200

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยครั้งนี้ได้นำเสนอสูตรการหาช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald) ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์และโปรไฟล์แบบปรับปรุงของพารามิเตอร์รูปร่าง β ของการแจกแจงไวบูลซึ่งแสดงไว้ในทฤษฎีบทที่ 3.1 และ 3.2 ซึ่งมีสูตรอย่างง่ายดังนี้

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{1}{1.6449n - 0.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)}$$

และ

$$\hat{\beta}_{ML} \pm z_{\frac{(1+\gamma)}{2}} \hat{\beta}_{ML} \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{1}{-\frac{2}{n} + 1.6449n - 2.4904 - 2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})}\right)}$$

ตามลำดับ แล้วนำมาเปรียบเทียบกับช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์, ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง และแบบวัลด์ โดยพิจารณาจากค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จากการจำลอง

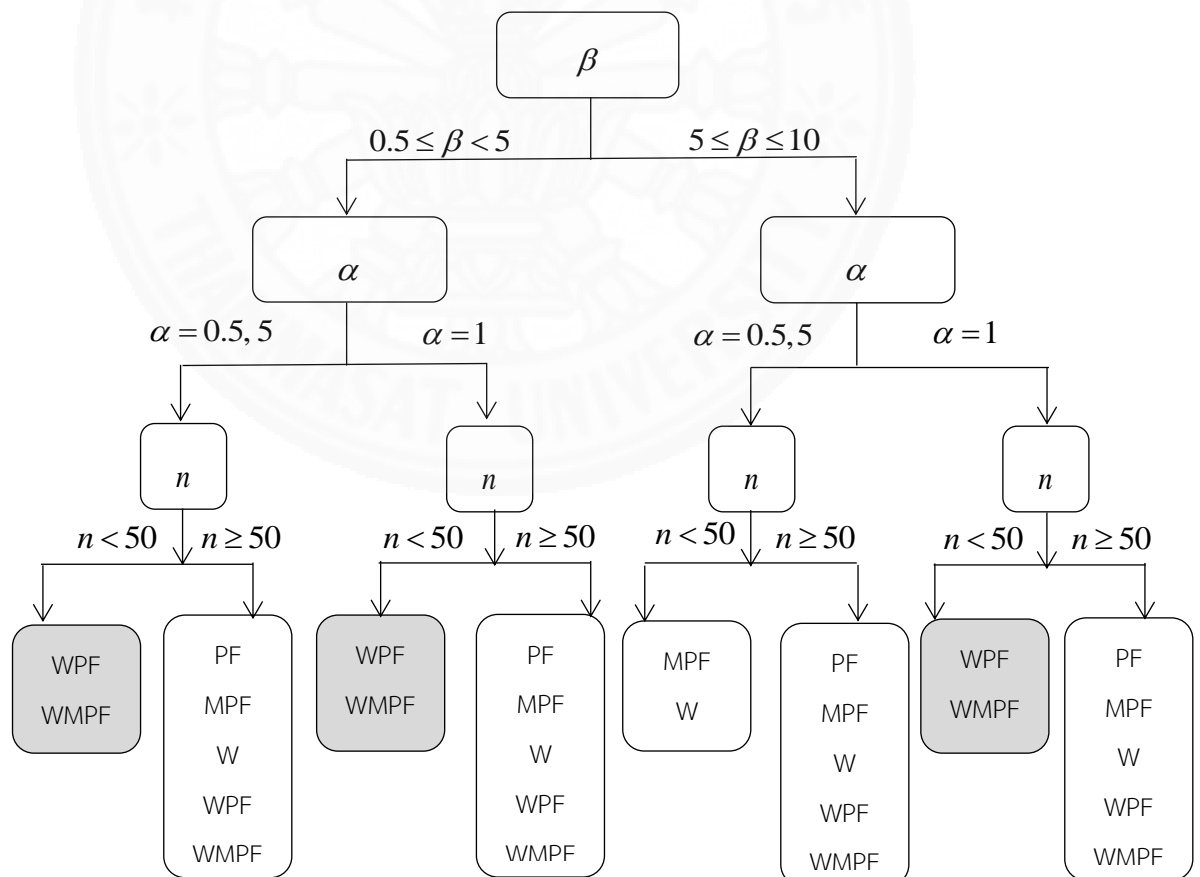
5.1 สรุปผลการวิจัย

การสรุปผลจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ 5.1.1 สรุปผลของค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β และ 5.1.2 สรุปผลของค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β ดังนี้

5.1.1 สรุปผลของค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β

ผลของการศึกษาพบว่า β, α ขนาดตัวอย่างและวิธีที่ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่น จะมีผลกับการประมาณช่วงความเชื่อมั่น จากภาพที่ 5.1 ได้สรุปวิธีที่ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละสถานการณ์ จะสังเกตได้ว่าวิธี WPF และ WMPF เมื่อ β มีค่าน้อย (ไม่เกิน 5) ทุกค่าของ α จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมไม่ต่ำกว่าระดับที่กำหนดแม้กระทั่งตัวอย่างขนาดเล็ก และเมื่อขนาด

ตัวอย่างใหญ่ขึ้น (ไม่ต่ำกว่า 50) ทั้ง 5 วิธีก็จะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมที่ใกล้เคียงกัน แต่วิธี WPF และ WMPF เมื่อ β มีค่ามาก (ไม่ต่ำกว่า 5 และไม่เกิน 10) $\alpha = 0.5$ (เล็ก) ขนาดตัวอย่างเล็ก (ไม่เกิน 10) จะให้ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมต่ำกว่าระดับที่กำหนด และวิธี WPF กับ WMPF เมื่อ β มีค่ามาก (ไม่ต่ำกว่า 5 และไม่เกิน 10) $\alpha = 5$ (ใหญ่) ขนาดตัวอย่างเล็ก (ไม่เกิน 10) จะไม่สามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่นได้เพราะว่าจากสมการในทฤษฎีบทที่ 3.1 และ 3.2 เมื่อแทนค่า $\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML}$ ที่มีค่าสูงและ n ค่าน้อยลงไปจะทำให้ $2\hat{\beta}_{ML} \log(\hat{\alpha}_{ML})$ มีค่าบวกขนาดใหญ่ซึ่งค่านี้ปรากฏในรากที่สองจึงทำให้เทอมในรากที่สองมีค่าเป็นลบ ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\beta}$ ไม่สามารถหาได้ แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้น (ไม่ต่ำกว่า 20) ก็จะสามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่นได้ จึงสรุปว่าเมื่อ β มีค่ามาก (ไม่ต่ำกว่า 5 และไม่เกิน 10) $\alpha = 0.5, 5$ ขนาดตัวอย่างเล็ก (ไม่เกิน 10) ใช้วิธี MPF และ W ประมาณช่วงความเชื่อมั่น นอกจากนี้ยังพบว่าในกรณีที่พารามิเตอร์ α ระดับกลาง ($\alpha = 1$) ไม่ว่า β จะมีค่าน้อยหรือมากวิธี WPF และ WMPF ยังใช้ได้ดีถึงแม้จะมีตัวอย่างขนาดเล็ก โดยภาพรวมวิธี WPF และ WMPF ที่ได้นำเสนอในงานวิจัยครั้งนี้เป็นเพียง 2 วิธีที่ใช้ได้ดีเมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก



ภาพที่ 5.1 วิธีที่ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β สำหรับแต่ละสถานการณ์

การเลือกวิธีที่เหมาะสมโดยใช้ภาพที่ 5.1 ช่วยในการเลือกวิธีประมาณช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จะพบว่าไม่มีบาง α และ β ที่อยู่ในช่วงของ α และ β ที่ศึกษา เช่น $\beta = 3$ และ $\alpha = 0.5$ เป็นต้น เพราะว่าในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาแค่บางค่าของ α และ β ดังนั้นถ้าต้องการประมาณค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β ที่อยู่ในช่วงของ α และ β ที่ศึกษาสามารถใช้สมการถดถอยมาประมาณค่าความน่าจะเป็นคัมรวมได้ดังนี้

5.1.1.1 ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β

การประมาณค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β สำหรับแต่ละวิธี โดยที่ $0.5 \leq \beta \leq 10$, $0.5 \leq \alpha \leq 5$ และ $5 \leq n \leq 200$ สามารถประมาณโดยใช้สมการถดถอยได้ดังนี้

1. ช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับวิธีที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (PF) คือ

$$\hat{Y}_{PF} = 0.9274 - 1.73 \times 10^{-4} \alpha - 1.64 \times 10^{-4} \beta + 1.71 \times 10^{-4} n + 5.4 \times 10^{-5} \alpha \beta - 2.86 \times 10^{-6} \alpha n - 2.92 \times 10^{-6} \beta n + 0.64 \times 10^{-6} \alpha \beta n \quad (5.1)$$

โดย \hat{Y}_{PF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ใช้วิธี PF

2. ช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับวิธีที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF) คือ

$$\hat{Y}_{MPF} = 0.949 + 1.24 \times 10^{-4} \alpha - 2.34 \times 10^{-5} \beta + 2.68 \times 10^{-5} n - 2.16 \times 10^{-5} \alpha \beta - 5.12 \times 10^{-6} \alpha n - 4.11 \times 10^{-6} \beta n + 1.22 \times 10^{-6} \alpha \beta n \quad (5.2)$$

โดย \hat{Y}_{MPF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ใช้วิธี MPF

3. ช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับแบบวัลด์ (W) คือ

$$\hat{Y}_W = 0.947 - 2.39 \times 10^{-4} \alpha - 7.67 \times 10^{-5} \beta + 2.21 \times 10^{-5} n + 4.08 \times 10^{-5} \alpha \beta - 0.34 \times 10^{-6} \alpha n - 1.94 \times 10^{-6} \beta n + 0.45 \times 10^{-6} \alpha \beta n \quad (5.3)$$

โดย \hat{Y}_W คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ใช้วิธี W

4. ช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับแบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (WPF) คือ

$$\hat{Y}_{WPF} = 0.94 - 13.46 \times 10^{-4} \alpha - 9.17 \times 10^{-3} \beta - 4.61 \times 10^{-5} n + 3.05 \times 10^{-5} \alpha \beta + 0.74 \times 10^{-5} \alpha n + 5.93 \times 10^{-5} \beta n - 0.65 \times 10^{-6} \alpha \beta n \quad (5.4)$$

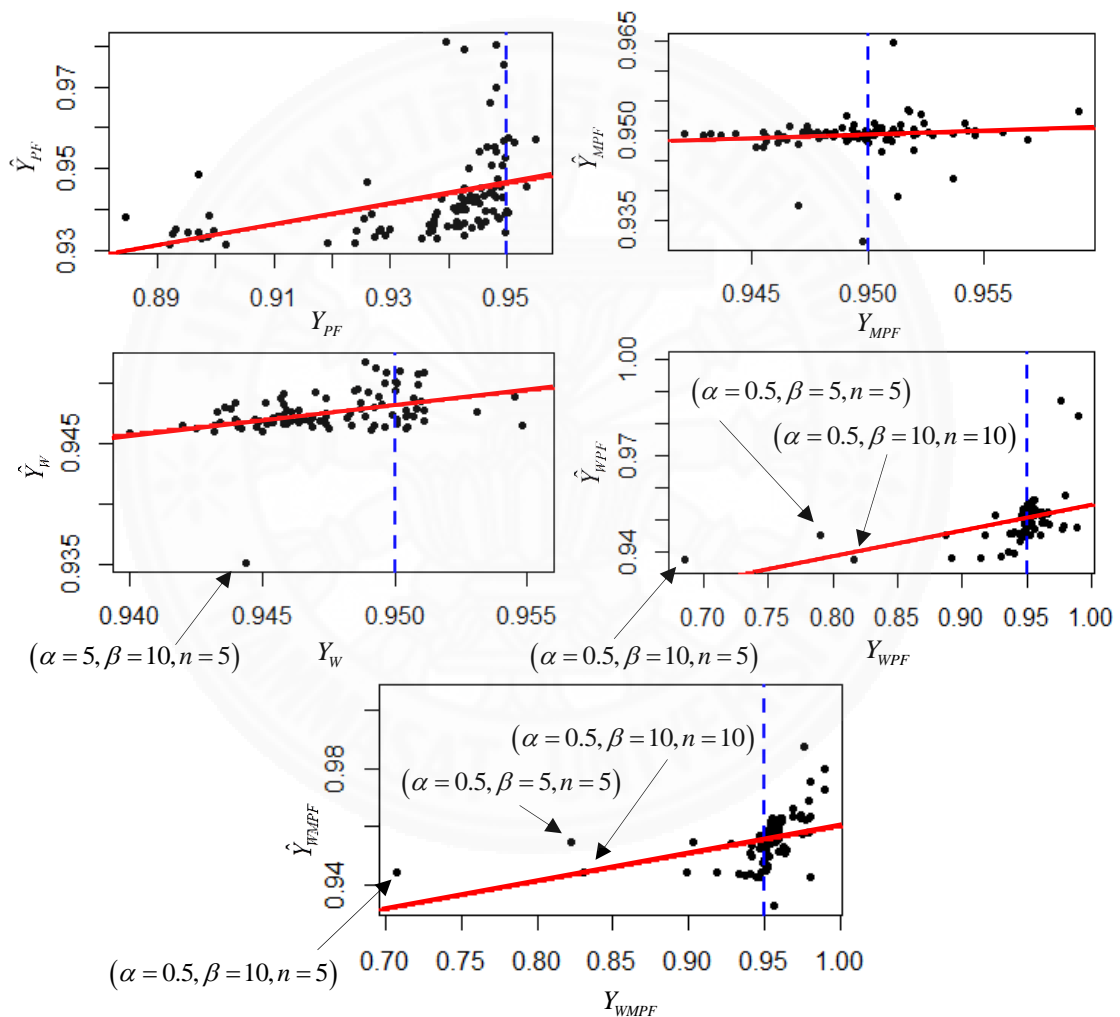
โดย \hat{Y}_{WPF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ใช้วิธี WPF

5. ช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับแบบวัดโดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) คือ

$$\hat{Y}_{WMPF} = 0.971 - 3.38 \times 10^{-3} \alpha - 9.27 \times 10^{-3} \beta - 1.38 \times 10^{-4} n + 3.02 \times 10^{-3} \alpha \beta + 2.28 \times 10^{-5} \alpha n + 6.02 \times 10^{-5} \beta n - 1.74 \times 10^{-5} \alpha \beta n$$

(5.5)

โดย \hat{Y}_{WMPF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ใช้วิธี WMPF



ภาพที่ 5.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมกับความน่าจะเป็นคุ่มรวมจริงของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี

จากภาพที่ 5.2 (บนซ้าย) จะสังเกตได้ว่าค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (PF) มีการกระจายตัวในขอบเขตที่กว้างและมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.95 คิดเป็น 7.29% และจากสมการ (5.1) วิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ต่ำกว่าค่าความน่าจะเป็นคัมรวมจริง ภาพที่ 5.2 (บนขวา) สังเกตได้ว่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นของวิธี MPF ในช่วง 0.945 ถึง 0.955 มีการกระจายตัวที่แคบและวิธี MPF ให้จำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.95 คิดเป็น 47.92% และจากสมการ (5.2) วิธี MPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงที่สูงกว่าค่าความน่าจะเป็นคัมรวมจริง จากภาพที่ 5.2 (กลางซ้าย) จะเห็นว่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W) มีการกระจายตัวในช่วงที่แคบซึ่งมีลักษณะคล้ายคลึงกันกับวิธี MPF และมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.95 คิดเป็น 25% และจากสมการ (5.3) วิธี W ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงที่สูงกว่าค่าความน่าจะเป็นคัมรวมจริง สำหรับภาพที่ 5.2 (กลางขวา) ความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (WPF) มีการกระจายตัวในช่วงที่กว้างและมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.95 คิดเป็น 62.5% และจากสมการ (5.4) วิธี WPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงที่ต่ำกว่าค่าความน่าจะเป็นคัมรวมจริง สำหรับภาพที่ 5.2 (ล่าง) ความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) มีการกระจายตัวคล้ายกับวิธี WPF และมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.95 คิดเป็น 70.83% และจากสมการ (5.5) วิธี WPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงที่สูงกว่าค่าความน่าจะเป็นคัมรวมจริง

5.1.1.2 ค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β

การประมาณค่าความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β สำหรับแต่ละวิธี โดยที่ $0.5 \leq \beta \leq 10$, $0.5 \leq \alpha \leq 5$ และ $5 \leq n \leq 200$ สามารถประมาณโดยใช้สมการถดถอยได้ดังนี้

1. ช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับวิธีที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (PF) คือ

$$\hat{Y}_{PF} = 0.9846 + 1.64 \times 10^{-4} \alpha + 3.12 \times 10^{-5} \beta + 3.10 \times 10^{-5} n + 0.85 \times 10^{-6} \alpha \beta \quad (5.6)$$

โดย \hat{Y}_{PF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ใช้วิธี PF

2. ช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับวิธีที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF) คือ

$$\hat{Y}_{MPF} = 0.9897 + 5.17 \times 10^{-5} \alpha - 3.87 \times 10^{-5} \beta + 2.83 \times 10^{-6} n + 7.54 \times 10^{-6} \alpha \beta \quad (5.7)$$

โดย \hat{Y}_{MPF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ใช้วิธี MPF

3. ช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับแบบวัลด์ (W) คือ

$$\hat{Y}_W = 0.9904 - 1.07 \times 10^{-4} \alpha - 1.33 \times 10^{-5} \beta - 4.54 \times 10^{-6} n + 2.21 \times 10^{-5} \alpha \beta \quad (5.8)$$

โดย \hat{Y}_W คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ใช้วิธี W

4. ช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับแบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์ (WPF) คือ

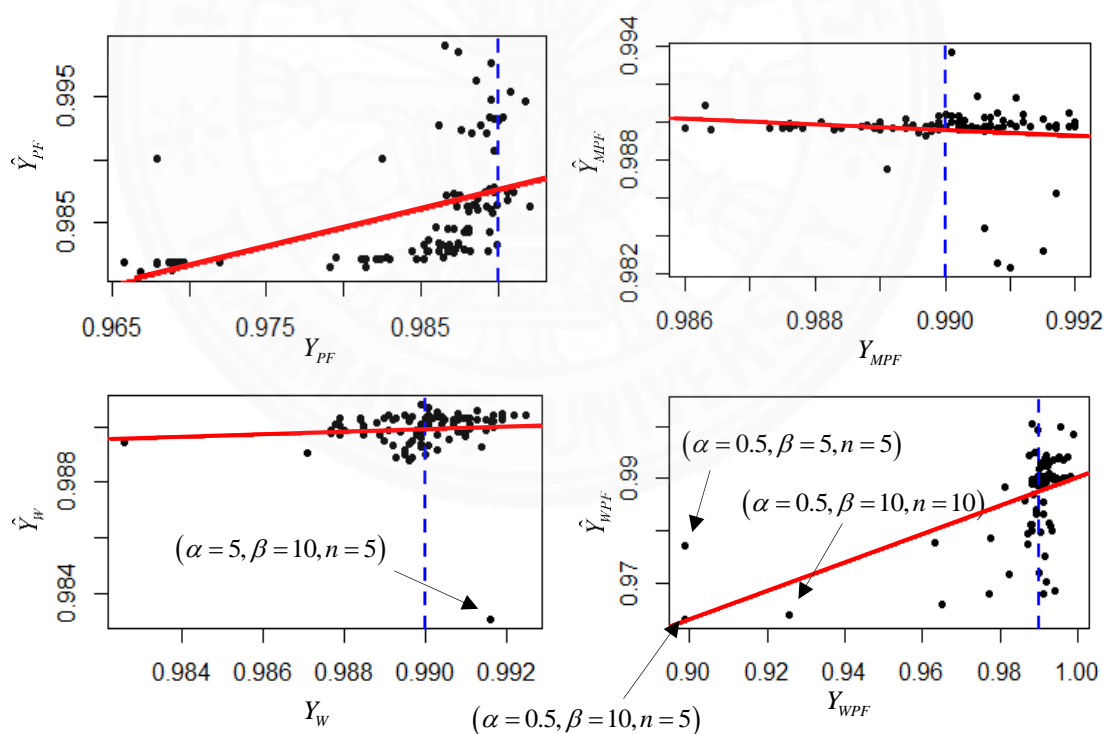
$$\hat{Y}_{WPF} = 0.9906 + 5.02 \times 10^{-4} \alpha - 3.83 \times 10^{-4} \beta - 0.87 \times 10^{-5} n + 1.74 \times 10^{-4} \alpha \beta \quad (5.9)$$

โดย \hat{Y}_{WPF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ใช้วิธี WPF

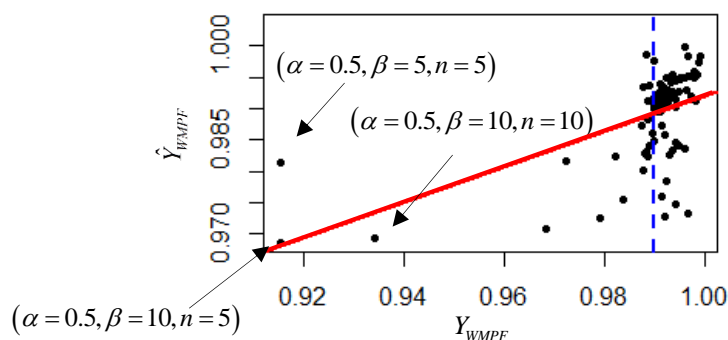
5. ช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับแบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโพรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) คือ

$$\hat{Y} = 0.9921 + 3.06 \times 10^{-4} \alpha - 4.30 \times 10^{-4} \beta - 1.97 \times 10^{-5} n + 1.79 \times 10^{-4} \alpha \beta \quad (5.10)$$

โดย \hat{Y}_{WMPF} คือ ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ใช้วิธี WMPF



ภาพที่ 5.3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมกับความน่าจะเป็นคุ่มรวมจริงของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี



ภาพที่ 5.3 ค่าประมาณกับความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี (ต่อ)

จากภาพที่ 5.3 (บนซ้าย) จะสังเกตเห็นได้ว่าค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF) มีการกระจายตัวในขอบเขตที่กว้างและมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.99 คิดเป็น 8.33% และจากสมการ (5.6) วิธี PF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมที่ต่ำกว่าค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวม ภาพที่ 5.3 (บนขวา) สังเกตได้ว่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่นของวิธี MPF ในช่วง 0.9860 ถึง 0.9920 มีการกระจายตัวที่แคบและวิธี MPF ให้จำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.99 คิดเป็น 54.17% และจากสมการ (5.7) วิธี MPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงที่สูงกว่าค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวม จากภาพที่ 5.3 (กลางซ้าย) จะเห็นว่าความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์ (W) มีการกระจายตัวในช่วงที่แคบซึ่งมีลักษณะคล้ายคลึงกันกับวิธี MPF และมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.99 คิดเป็น 53.13% และจากสมการ (5.8) วิธี W ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงที่สูงกว่าค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวม สำหรับภาพที่ 5.3 (กลางขวา) ความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF) มีการกระจายตัวในช่วงที่กว้างและมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.99 คิดเป็น 60.42% และจากสมการ (5.9) วิธี WPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงที่ต่ำกว่าค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวม สำหรับภาพที่ 5.3 (ล่าง) ความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์รูปร่าง β แบบวัลด์โดยใช้ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF) มีการกระจายตัวคล้ายกับวิธี WPF และมีจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.99 คิดเป็น 68.75% และจากสมการ (5.10) วิธี WPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ่มรวมของช่วงที่สูงกว่าค่าความน่าจะเป็นคุ่มรวม

5.1.2 สรุปผลของค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β

การสรุปผลของค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ β จะแบ่งเป็น 2 หัวข้อ คือ 5.1.2.1 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β และ 5.1.2.2 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

5.1.2.1 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β

ผลของค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β ซึ่งพบว่าขึ้นกับพารามิเตอร์รูปร่าง β ขนาดตัวอย่างและวิธีที่ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่นของ β ซึ่งสรุปไว้ในตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 5.1 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	0.8034	0.5140	0.3435	0.2754	0.2113	0.1661	0.1491	0.1078
1	1.6129	1.0361	0.6849	0.5513	0.4200	0.3317	0.2951	0.2103
5	8.1087	5.1236	3.4223	2.7442	2.1025	1.6391	1.4640	1.0329
10	16.2557	10.2072	6.8286	5.5167	4.2037	3.2825	2.9300	2.0611

ตารางที่ 5.2 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	0.8317	0.5250	0.3481	0.2775	0.2123	0.1668	0.1496	0.1081
1	1.7227	1.0560	0.6928	0.5570	0.4235	0.3323	0.2961	0.2108
5	8.6390	5.2352	3.4611	2.7634	2.1091	1.6437	1.4665	1.0347
10	17.3932	10.4969	6.9048	5.5537	4.2232	3.2865	2.9413	2.0659

ตารางที่ 5.3 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	0.8513	0.5275	0.3497	0.2779	0.2100	0.1645	0.1472	0.1032
1	1.7371	1.0569	0.6983	0.5577	0.4206	0.3283	0.2930	0.2068
5	8.7385	5.2442	3.4690	2.7707	2.1026	1.6395	1.4645	1.0330
10	17.5708	10.4987	6.9596	5.5631	4.2055	3.2833	2.9372	2.0623

ตารางที่ 5.4 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้
ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.0518	0.5849	0.3623	0.2842	0.2141	0.1664	0.1485	0.1037
1	2.0634	1.1851	0.7307	0.5738	0.4298	0.3326	0.2961	0.2079
5	-	-	4.1474	3.0314	2.2098	1.6875	1.4968	1.0439
10	-	-	-	7.2301	4.6544	3.4614	3.0513	2.0994

ตารางที่ 5.5 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้
ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.4357	0.6451	0.3786	0.2919	0.2176	0.1680	0.1496	0.1041
1	2.5877	1.2845	0.7606	0.5896	0.4366	0.3360	0.2984	0.2087
5	-	-	4.4487	3.1255	2.2464	1.7048	1.5087	1.0480
10	-	-	-	7.8399	4.7404	3.4965	3.0763	2.1072

จากตารางที่ 5.1-5.5 จะสังเกตได้ว่าเมื่อ $n \leq 30$ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ 95% ของพารามิเตอร์ β จากตารางทั้ง 5 สามารถเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นได้ว่า $l_{PF} < l_{MPF} < l_W < l_{WPF} < l_{WMPF}$ นั่นคือวิธี PF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่น้อยที่สุด สำหรับวิธี MPF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นน้อยกว่าวิธี

W แต่จะแตกต่างกันประมาณ 0.0258 ส่วนวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นมากกว่าวิธี W ซึ่งจะแตกต่างกันประมาณ 0.0975 และ 0.1422 ตามลำดับ แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้น ($n > 30$) ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธีจะมีค่าที่ใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 5.6 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	0.9948	0.5583	0.3555	0.2808	0.2131	0.1663	0.1488	0.1054
1	1.9448	1.1217	0.7115	0.5649	0.4265	0.3322	0.2958	0.2089
5	*8.4954	*5.2010	3.7837	2.8830	2.1541	1.6629	1.4801	1.0385
10	*17.0732	*10.4009	*6.8977	6.3347	4.4055	3.3621	2.9874	2.0792

หมายเหตุ * คือ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากวิธี PF,MPF และ W

จากตารางที่ 5.6 พบว่าค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธีขึ้นกับค่าของ β และขนาดตัวอย่าง พบว่าเมื่อ β มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นมีค่าเพิ่มขึ้นซึ่งเพิ่มในอัตราการเพิ่มที่เยอะและเมื่อขนาดตัวอย่างที่มีขนาดที่เพิ่มขึ้นจาก $n = 5$ ถึง $n = 30$ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นจะมีอัตราการลดลงที่มาก แต่เมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดที่เพิ่มขึ้นจาก $n = 50$ ถึง $n = 200$ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นจะมีอัตราการลดลงที่น้อย ในภาพรวมวิธี PF, MPF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ที่น้อยกว่าอีก 3 วิธี และวิธี PF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นของ β ที่น้อยกว่า MPF แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธีก็จะมีค่าใกล้เคียงกัน

5.1.2.2 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β

ผลของค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β ซึ่งพบว่าขึ้นกับพารามิเตอร์รูปร่าง β ขนาดตัวอย่างและวิธีที่ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่น ซึ่งสรุปไว้ในตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 5.7 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธี
ภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.2102	0.7277	0.4763	0.3942	0.3059	0.2467	0.224	0.149
1	2.4807	1.4557	0.9551	0.7687	0.5865	0.4632	0.4154	0.3003
5	12.4515	7.3255	4.791	3.8028	2.9012	2.2612	2.016	1.4203
10	24.7705	14.1915	9.5432	7.6025	5.7863	4.5339	4.0323	2.8392

ตารางที่ 5.8 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธี
ภาวน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.1446	0.7246	0.4732	0.3932	0.3054	0.2463	0.2238	0.1487
1	2.3538	1.4476	0.9549	0.7648	0.5846	0.4624	0.4151	0.3001
5	12.0043	7.2026	4.7598	3.7942	2.8958	2.2573	2.0133	1.4207
10	23.8843	14.0605	9.4998	7.5884	5.7734	4.5270	4.0257	2.8388

ตารางที่ 5.9 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์ (W)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.2199	0.7333	0.478	0.3944	0.2887	0.2259	0.2014	0.1418
1	2.4858	1.4622	0.9552	0.7707	0.5767	0.4517	0.403	0.2829
5	12.8108	7.3358	4.7914	3.8078	2.898	2.2567	2.0113	1.4171
10	25.6386	14.7212	9.5493	7.6151	5.7778	4.5282	4.0282	2.8368

ตารางที่ 5.10 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้
ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.4285	0.7986	0.4983	0.3959	0.2935	0.2282	0.2030	0.1423
1	2.7650	1.6452	1.0048	0.7852	0.5876	0.4568	0.4068	0.2842
5	-	-	5.6677	4.1326	3.0211	2.3127	2.0484	1.4294
10	-	-	-	8.2045	6.3182	4.7385	4.1672	2.8794

ตารางที่ 5.11 ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% สำหรับพารามิเตอร์ β แบบวัลด์โดยใช้
ภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (WMPF)

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.9371	0.8661	0.5164	0.4012	0.2994	0.2301	0.2044	0.1428
1	3.4485	1.7443	1.0398	0.8040	0.5974	0.4607	0.4096	0.2851
5	-	-	6.0539	4.2451	3.1390	2.3328	2.0628	1.4343
10	-	-	-	8.5177	6.4340	4.7811	4.1966	2.8896

จากตารางที่ 5.7-5.11 จะสังเกตได้ว่าเมื่อ $n \leq 30$ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ 99% ของพารามิเตอร์ β จากตารางทั้ง 5 สามารถเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นได้ว่า $l_{MPF} < l_{PF} < l_W < l_{WPF} < l_{WMPF}$ นั่นคือวิธีของ MPF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่น้อยที่สุด สำหรับวิธี PF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นน้อยกว่าวิธี W ซึ่งแตกต่างกันประมาณ 0.1139 ส่วนวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นมากกว่าวิธี W ซึ่งจะแตกต่างกันประมาณ 0.1028 และ 0.1795 ตามลำดับ แต่เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้น ($n > 30$) ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นที่ 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธีจะมีค่าที่ใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 5.12 ค่าประมาณความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธี

β	n							
	5	10	20	30	50	80	100	200
0.5	1.3881	0.7721	0.4913	0.3925	0.2986	0.2355	0.2113	0.1449
1	2.7088	1.5550	0.9836	0.7767	0.5866	0.4590	0.4100	0.2905
5	*12.4222	*7.3013	5.2164	3.9585	2.9710	2.2842	2.0303	1.4244
10	*24.7645	*14.3244	*9.5374	7.9096	6.0179	4.6217	4.0900	2.8568

หมายเหตุ * คือ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากวิธี PF,MPF และ W

จากตารางที่ 5.12 พบว่าค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β จากทั้ง 5 วิธีขึ้นกับค่าของ β และขนาดตัวอย่าง และพบว่าเมื่อ β มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นมีค่าเพิ่มขึ้นซึ่งเพิ่มขึ้นในอัตราการเพิ่มขึ้นที่มากและเมื่อขนาดตัวอย่างที่มีขนาดที่เพิ่มขึ้นจาก $n=5$ ถึง $n=30$ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นจะลดลงในอัตราการลดลงที่มาก แต่เมื่อขนาดตัวอย่างที่มีขนาดที่เพิ่มขึ้นจาก $n=50$ ถึง $n=200$ ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นก็จะลดลงในอัตราการลดลงที่น้อย ในภาพรวมวิธี PF, MPF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ที่น้อยกว่าอีก 3 วิธี และวิธี MPF ให้ค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงที่น้อยกว่า PF แต่เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 5 วิธีก็จะมีค่าใกล้เคียงกัน

5.2 วิจัยและข้อเสนอแนะ

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นของการแจกแจงไวบูลสำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β จากทั้งหมด 5 วิธีคือ PF, MPF, W, WPF และ WMPF ซึ่งผลวิจัยได้ข้อสรุปว่าใช้วิธี WPF และ WMPF ในการประมาณช่วงความเชื่อมั่นถึงแม้ว่าค่าเฉลี่ยความยาวของช่วงความเชื่อมั่นจะมากกว่า 3 วิธีที่เหลือเพียงเล็กน้อย แต่สำหรับค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมของช่วงความเชื่อมั่นแล้ววิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ไม่ต่ำกว่าระดับที่กำหนดแม้ขนาดตัวอย่างจะมีขนาดเล็ก แต่วิธี WPF และ WMPF จะมีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นที่ไม่ดี 8 สถานการณ์จากทั้งหมด 96 ดังนี้

1. $\alpha = 0.5, \beta = 5$ และ $n = 5$ (ใช้วิธี MPF)
2. $\alpha = 0.5, \beta = 10$ และ $n = 5$ (ใช้วิธี MPF)
3. $\alpha = 0.5, \beta = 10$ และ $n = 10$ (ใช้วิธี MPF และ W)
4. $\alpha = 5, \beta = 5$ และ $n = 5$ (ใช้วิธี MPF)
5. $\alpha = 5, \beta = 5$ และ $n = 10$ (ใช้วิธี MPF และ W)
6. $\alpha = 5, \beta = 10$ และ $n = 5$ (ใช้วิธี MPF)
7. $\alpha = 5, \beta = 10$ และ $n = 10$ (ใช้วิธี MPF และ W)
8. $\alpha = 5, \beta = 10$ และ $n = 20$ (ใช้วิธี MPF และ W)

ในกรณีที่ 1-3 เกิดจากวิธี WPF และ WMPF ให้ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมที่ต่ำกว่าระดับที่กำหนด ส่วนกรณีที่ 4-8 เกิดจากสูตรอย่างง่ายในทฤษฎีบทที่ 3.1 และ 3.2 ซึ่งถ้านำค่าของ α, β และ n ในกรณีที่ 4-8 แทนลงไปในสมการของทฤษฎีบทที่ 3.1 และ 3.2 ทำให้ในรากที่สองมีค่าเป็นลบจึงทำให้ไม่สามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่นได้

ด้านการวิจัยสามารถนำไปศึกษาเงื่อนไขโดยละเอียดที่ทำให้วิธี WPF และ WMPF ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่นของการแจกแจงไวบูลสำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β ว่าสามารถปรับปรุงสูตรในการประมาณช่วงได้หรือไม่และนำไปศึกษาว่าค่าของ α, β และ n ที่ทำให้วิธี WPF และ WMPF ที่ใช้ประมาณช่วงความเชื่อมั่นของการแจกแจงไวบูลสำหรับพารามิเตอร์รูปร่าง β ที่ไม่สามารถประมาณช่วงความเชื่อมั่นได้

รายการอ้างอิง

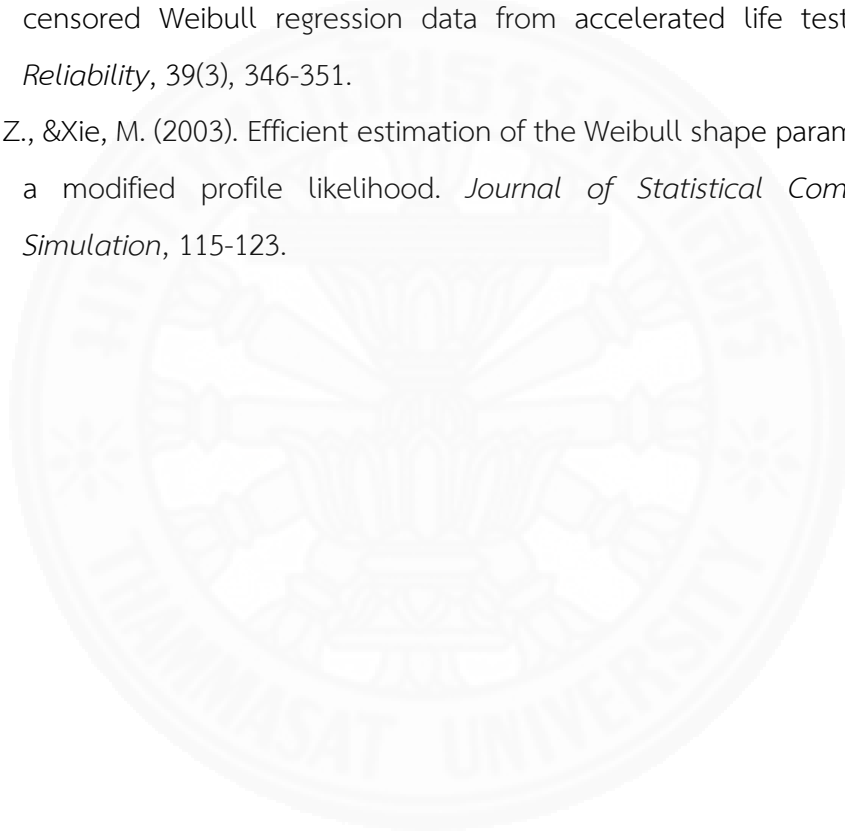
หนังสือและบทความในหนังสือ

- ประชุม สุวัตถิ. (2553). ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ: โครงการส่งเสริมเอกสารวิชาการสถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์. กรุงเทพฯ: สำนักงานกิจการโรงพิมพ์ องค์การสงเคราะห์ทหารผ่านศึก.
- Bandyopadhyay, P. S., &Forster, M. R. (2011). Handbook of the philosophy of statistics. Amsterdam: North-Holland.
- De Bruno, F. (1992). *Foresight: Its logical laws, Its subjective sources*. In Kotz, S., &Johnson, N. L. (Eds.), *Breakthroughs in statistics* (pp. 93–158). New York: Springer New York.
- Fisher, R. A. (1973). *Statistical methods and scientific inference*. New York: Macmillan.
- Held, L., &Bové, S. D. (2014). *Applied statistical inference: Likelihood and Bayes*. Heidelberg, Berlin: Springer – Verlag.
- Jeffreys, H. (1939). *The theory of probability*. Oxford University Press.
- Kotz, S., Read, C. B., Balakrishnan, N., &Vidakovic, B. (2005). *Encyclopedia of Statistical Sciences* (2nd ed., Vol. 16). Wiley.
- Lawless, J. F. (1982). *Statistical model and methods for lifetime data*. (2nd ed.). New York: Wiley.
- Lehmann, E. L. (2011). *Fisher, Neyman and the creation of classical statistics*. New York: Springer – Verlag.
- Pawitan, Y. (2013). *In all likelihood statistical modelling and inference using likelihood*. Oxford, England: Oxford University Press.
- Savage, L. J. (1972). *Foundations of statistics* (2nd ed.).

บทความวารสาร

- Bhattacharya, P. (2011). Weibull distribution for estimating the parameters. *Department of Mathematics, College of Engineering & Management, Kolaghat India.*
- Cox, D. R., & Reid, N. (1987). Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 49(1), 1-39.
- Cox, D. R., & Reid, N. (1989). On the stability of maximum-likelihood estimators of orthogonal parameters. *Canadian J. Statist.*, 17, 229-233.
- Cox, D. R., & Reid, N. (1992). A note on the difference between profile and modified profile likelihood. *Biometrika*, 79, 408-411.
- Drapella, A., & Kosznik, S. (1999). An alternative rule for placement of empirical points on Weibull probability paper. *Quality and Reliability Eng. Int.*, 15, 57-59.
- Efron, B., & Hinkley, D. V. (1978). Assessing the accuracy of the maximum likelihood estimator: Observed versus expected Fisher information. *Biometrika*, 65, 457-87.
- Heo, J.-H., Salas, J. D., & Kim K.-D. (2001). Estimation of confidence intervals of quantiles for the weibull distribution. *Springer – Verlag*, 284-309.
- Mackisack, M. S., & Stillman, R. H. (1996). A cautionary tale about Weibull analysis. *IEEE Trans. Reliability*, 45, 244-248.
- Mahdi, S. (2004). One-sided confidence interval estimation for Weibull shape and scale parameter. 61-72.
- Pendey, M., & Singh, U. S. (1993). Shrunken estimators of Weibull shape parameter from type II censored samples. *IEEE Trans. Reliability*, 42, 81-86.
- Phan, L. D., & McCool, J. I. (2009). Exact confidence intervals for Weibull parameters and percentiles. *Diamond Power International Inc.*, 223, 387-394.
- Ross, R. (1994). Formulas to describe the bias and standard deviation of the ML-estimation Weibull shape parameter. *IEEE Trans. Dielectrics and Electrical Insulation*, 3, 28-42.
- Ross, R. (1996). Bias and standard deviation due to Weibull parameter estimation for small data sets. *IEEE Trans. Dielectrics and Electrical Insulation*. 3, 28-42.

- Scholz, F. (2008). Inference for the Weibull distribution. *Stat 498B Industrial Statistics*, 1-59.
- Sebah, P. & Gourdon, X. (2002). Introduction to the gamma function. 1-20.
- Vrieze, S. I. (2012). Model selection and psychological theory: A discussion of the differences between the Akaike Information Criterion (AIC) and the Bayesian Information Criterion (BIC). *Psychological Methods*, 17(2), 228–243.
- Wiel, S. A. V., & Meeker, W. Q. (1990). Accuracy of approx confidence bounds using censored Weibull regression data from accelerated life tests. *IEEE Trans. Reliability*, 39(3), 346-351.
- Yang, Z., & Xie, M. (2003). Efficient estimation of the Weibull shape parameter based on a modified profile likelihood. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 115-123.



ภาคผนวก



ภาคผนวก ก

โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัย

งานวิจัยครั้งนี้ใช้โปรแกรม R Studio เวอร์ชัน 1.0.136 ในการจำลองข้อมูล คำนวณค่า
ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงความเชื่อมั่น และเกณฑ์ที่ใช้ในการวิจัย

ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของทั้ง 5 วิธี

```
###confidence interval 95% for weibull distribution by 5 methods#####
require(stats)
require(utils)
options(warn=-1)
li<- function(th,like,alpha=0.15){
  that <- mean(th[like==max(like)])
  lowth <- th[th < that]
  lowlik <- like[th < that]
  if (length(lowth)<2) {lowval <- min(th) }
  if (length(lowth)>1)
  { lowval <- approx(lowlik,lowth,xout=alpha)$y}

  upth <- th[th > that]
  if (length(upth)<2 ) {return(c(lowval,max(th))) }
  if (length(upth)> 1){
    uplik <- like[th > that]
    upval <- approx(uplik,upth,xout=alpha)$y
    return(c(lowval,upval))
  }
}

#function MLE of weibull distribution
wb.mle <- function(sams){
  weibullLik <- function(alphabeta,x){
    beta <- alphabeta[1]
    alpha <- alphabeta[2]
    n = nrow(x)
    log.lik <-n*log(beta/alpha)+(beta-1)*sum(log(x/alpha))-
sum((x/alpha)^beta)
    return(-log.lik)
  }

  dat <- data.frame(x=sams)
  est <- optim(c(0.05,0.05),weibullLik,x=dat ,method="BFGS")
  beta.hat <- est$par[1]
  alpha.hat <- est$par[2]
  return(c(alpha.hat,beta.hat))
}

#partial gamma function
fpg2 <-digamma(2)*gamma(2)
```

```

fpg3 <- digamma(3)*gamma(3)
spg2 <- (trigamma(2)+(fpg2 /gamma(2))^2)*gamma(2)
spg3 <- (trigamma(3)+(fpg3 /gamma(3))^2)*gamma(3)

#interval of wald type likelihood
wald.likval <- function(sams){
  n <- length(sams)
  beta.hat <- wb.mle(sams)[2]
  lowval <- beta.hat+qnorm(0.025)*sqrt((beta.hat^2)*(1/(n*(1+spg2-
((fpg2)^2))))))
  upval <- beta.hat-qnorm(0.025)*sqrt((beta.hat^2)*(1/(n*(1+spg2-
((fpg2)^2))))))
  return(c(lowval,upval))
}

#interval of wald type profile likelihood
wald.prlikval <- function(sams){
  n <- length(sams)
  alpha.hat <- wb.mle(sams)[1]
  beta.hat <- wb.mle(sams)[2]

  p1 <- n/(beta.hat^2)
  p2 <-
(n/(beta.hat^2))*(spg2+2*beta.hat*fpg2*log(alpha.hat)+(beta.hat^2)*
((log(alpha.hat))^2))
  p3 <- -(n/((n+1)*(beta.hat^2)))*(spg3+(n-1)*((fpg2)^2)+2*beta.hat*
log(alpha.hat)*(fpg3 +(n-
1)*fpg2)+(n+1)*(beta.hat^2)*((log(alpha.hat))^2) )
  lowval <- beta.hat+qnorm(0.025)*sqrt(1/(p1+p2+p3))
  upval <- beta.hat-qnorm(0.025)*sqrt(1/(p1+p2+p3))
  return(c(lowval,upval))
}

#interval of wald type modified profile likelihood
wald.moprlikval <- function(sams){
  n <- length(sams)
  alpha.hat <- wb.mle(sams)[1]
  beta.hat <- wb.mle(sams)[2]

  p1modified <- (n-2)/(beta.hat^2)
  p2 <-
(n/(beta.hat^2))*(spg2+2*beta.hat*fpg2*log(alpha.hat)+(beta.hat^2)*
((log(alpha.hat))^2))
  p3 <- -(n/((n+1)*(beta.hat^2)))*(spg3+(n-1)*((fpg2)^2)+2*beta.hat*
log(alpha.hat)*(fpg3 +(n-
1)*fpg2)+(n+1)*(beta.hat^2)*((log(alpha.hat))^2) )
  lowval <- beta.hat+qnorm(0.025)*sqrt(1/(p1modified +p2+p3))
  upval <- beta.hat-qnorm(0.025)*sqrt(1/(p1modified +p2+p3))
  return(c(lowval,upval))
}

alpha.delta <- function(beta,dat){
  n <- length(dat)
  np <- length(beta)

```



```

alpha.del <- ((sum(((dat)^beta)))/n)^(1/beta)
return(alpha.del)
}

#profile function
pr.lik <- function(beta, dat) {
  n <- length(dat)
  np <- length(beta)
  prlik <- numeric(np)
  for (i in 1:np) {
    p1 <- n*(log(beta[i])-log(alpha.delta(beta[i], dat )))
    p2 <- (beta[i]-1)*sum(log(dat/alpha.delta(beta[i], dat )))
    p3 <- sum(((dat /alpha.delta(beta[i], dat ))^(beta[i])))
    prlik[i] <- exp(p1+p2-p3)
  }
  return(prlik)
}

#modified profile function
mopr.lik <- function(beta, dat) {
  n <- length(dat)
  np <- length(beta)
  moprlik <- numeric(np)
  for (i in 1:np) {
    p1 <- n*(log(beta[i])-log(alpha.delta(beta[i], dat )))
    p2 <- (beta[i]-1)*sum(log(dat/alpha.delta(beta[i], dat )))
    p3 <- sum(((dat /alpha.delta(beta[i], dat ))^(beta[i])))
    p4 <- -2*log(beta[i])
    moprlik[i] <- exp(p1+p2-p3+p4)
  }
  return(moprlik)
}

#profile likelihood interval
pr.likval <- function(beta, sams) {
  lik.vec<- pr.lik(beta, sams)
  lik.vec<- lik.vec/max(lik.vec)
  lowval <- li(beta, lik.vec, exp(-qchisq(1-.05,1)/2))[1]
  upval <- li(beta, lik.vec, exp(-qchisq(1-.05,1)/2))[2]
  return(c(lowval, upval))
}

#modified profile likelihood interval
mopr.likval <- function(beta, sams) {
  molik.vec<- mopr.lik(beta, sams)
  molik.vec<- molik.vec/max(molik.vec)
  lowval <-li(beta, molik.vec, exp(-qchisq(1-.05,1)/2))[1]
  upval <-li(beta, molik.vec, exp(-qchisq(1-.05,1)/2))[2]
  return(c(lowval, upval))
}

conf.5method <- function(alpha, beta, size.samp, N) {
  res <- numeric(10)
  population <- rweibull(100000, shape = beta, scale = alpha)
  vec.beta <- seq(0.05, beta+20, by=0.05)

```

```

cover.pr <- 0
cover.mpr <- 0
cover.w <- 0
cover.wpr <- 0
cover.wmpr <- 0
l.pr <- numeric(N)
l.mpr <- numeric(N)
l.w <- numeric(N)
l.wpr <- numeric(N)
l.wmpr <- numeric(N)

for(i in 1:N){
  sam.wb<- sample(population, size = size.samp, replace = TRUE)

  # Profile Like CI (method 1)
  CI.pr <- pr.likval(vec.beta,sam.wb)
  LCI.pr <- CI.pr[1]
  UCI.pr <- CI.pr[2]
  if(is.na(LCI.pr == TRUE||UCI.pr==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.pr<beta& beta<UCI.pr){
      cover.pr=cover.pr+1
      l.pr[i] <- UCI.pr-LCI.pr
    }
  }

  # Modified Profile Like CI (method 2)
  CI.mpr <- mopr.likval(vec.beta,sam.wb)
  LCI.mpr <- CI.mpr[1]
  UCI.mpr <- CI.mpr[2]
  if(is.na(LCI.mpr == TRUE||UCI.mpr==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.mpr<beta& beta<UCI.mpr){
      cover.mpr=cover.mpr+1
      l.mpr[i] <- UCI.mpr-LCI.mpr
    }
  }

  # Wald CI (method 3)
  CI.w <- wald.likval(sam.wb)
  LCI.w <- CI.w[1]
  UCI.w <- CI.w[2]
  if(is.na(LCI.w == TRUE||UCI.w==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.w<beta& beta<UCI.w){
      cover.w=cover.w+1
      l.w[i] <- UCI.w-LCI.w
    }
  }

  #Wald Profile Like CI (method 4)
  CI.wpr <- wald.prlikval(sam.wb)
  LCI.wpr <- CI.wpr[1]
  UCI.wpr <- CI.wpr[2]
  if(is.na(LCI.wpr == TRUE||UCI.wpr==TRUE)){ break }
  else{

```

```

    if(LCI.wpr<beta& beta<UCI.wpr){
      cover.wpr=cover.wpr+1
      l.wpr[i] <- UCI.wpr-LCI.wpr
    }
  }

  #Wald Modified Profile Like CI (method 5)
  CI.wmpr <- wald.moprlikval(sam.wb)
  LCI.wmpr <- CI.wmpr[1]
  UCI.wmpr <- CI.wmpr[2]
  if(is.na(LCI.wmpr == TRUE||UCI.wmpr==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.wmpr<beta& beta<UCI.wmpr){
      cover.wmpr=cover.wmpr+1
      l.wmpr[i] <- UCI.wmpr-LCI.wmpr
    } }
  }

  # Method 1
  coverage.pr <- cover.pr/N
  res[1] <- coverage.pr
  res[6] <- mean(l.pr)

  # Method 2
  coverage.mpr <- cover.mpr/N
  res[2] <- coverage.mpr
  res[7] <- mean(l.mpr)

  # Method 3
  coverage.w <- cover.w/N
  res[3] <- coverage.w
  res[8] <- mean(l.w)

  # Method 4
  coverage.wpr <- cover.wpr/N
  res[4] <- coverage.wpr
  res[9] <- mean(l.wpr)

  # Method 5
  coverage.wmpr <- cover.wmpr/N
  res[5] <- coverage.wmpr
  res[10] <- mean(l.wmpr)

  return(res)
}
options(warn=0)

```

ช่วงความเชื่อมั่น 99% ของทั้ง 5 วิธี

```

###confidence interval 99% for weibull distribution by 5
methods#####
require(stats)
require(utils)
options(warn=-1)
li<- function(th,like,alpha=0.04){
  that <- mean(th[like==max(like)])
  lowth <- th[th < that]
  lowlik <- like[th < that]
  if (length(lowth)<2) {lowval <- min(th) }
  if (length(lowth)>1)
  { lowval <- approx(lowlik,lowth,xout=alpha)$y}
  upth <- th[th > that]
  if (length(upth)<2 ) {return(c(lowval,max(th))) }
  if (length(upth)> 1){
    uplik <- like[th > that]
    upval <- approx(uplik,upth,xout=alpha)$y
    return(c(lowval,upval))
  }
}

#function MLE of weibull distribution
wb.mle <- function(sams){
  weibullLik <- function(alphabeta,x){
    beta <- alphabeta[1]
    alpha <- alphabeta[2]
    n = nrow(x)
    log.lik <- n*log(beta/alpha)+(beta-1)*sum(log(x/alpha))-
sum((x/alpha)^beta)
    return(-log.lik)
  }

  dat <- data.frame(x=sams)
  est <- optim(c(0.05,0.05),weibullLik,x=dat ,method="BFGS")
  beta.hat <- est$par[1]
  alpha.hat <- est$par[2]
  return(c(alpha.hat,beta.hat))
}

#partial gamma function
fpg2 <-digamma(2)*gamma(2)
fpg3 <-digamma(3)*gamma(3)
spg2 <- (trigamma(2)+(fpg2 /gamma(2))^2)*gamma(2)
spg3 <- (trigamma(3)+(fpg3 /gamma(3))^2)*gamma(3)

#interval of wald type likelihood
wald.likval <- function(sams){
  n <- length(sams)
  beta.hat <- wb.mle(sams)[2]
  lowval <- beta.hat+qnorm(0.005)*sqrt((beta.hat^2)*(1/(n*(1+spg2-
((fpg2)^2))))))

```

```

    upval <- beta.hat-qnorm(0.005)*sqrt((beta.hat^2)*(1/(n*(1+spg2-
((fpg2)^2))))))
    return(c(lowval,upval))
}

#interval of wald type profile likelihood
wald.prlikval <- function(sams){
  n <- length(sams)
  alpha.hat <- wb.mle(sams)[1]
  beta.hat <- wb.mle(sams)[2]

  p1 <- n/(beta.hat^2)
  p2 <-
(n/(beta.hat^2))*(spg2+2*beta.hat*fpg2*log(alpha.hat)+(beta.hat^2)*((
log(alpha.hat))^2))
  p3 <- -(n/((n+1)*(beta.hat^2)))*(spg3+(n-1)*((fpg2)^2)+2*beta.hat*
log(alpha.hat)*(fpg3+(n-
1)*fpg2)+(n+1)*(beta.hat^2)*((log(alpha.hat))^2))
  lowval <- beta.hat+qnorm(0.005)*sqrt(1/(p1+p2+p3))
  upval <- beta.hat-qnorm(0.005)*sqrt(1/(p1+p2+p3))
  return(c(lowval,upval))
}

#interval of wald type modified profile likelihood
wald.moprlikval <- function(sams){
  n <- length(sams)
  alpha.hat <- wb.mle(sams)[1]
  beta.hat <- wb.mle(sams)[2]

  plmodified <- (n-2)/(beta.hat^2)
  p2 <- (n/(beta.hat^2))*(spg2+2*beta.hat*fpg2*
log(alpha.hat)+(beta.hat^2)*((log(alpha.hat))^2))
  p3 <- -(n/((n+1)*(beta.hat^2)))*(spg3+(n-1)*((fpg2)^2)+2*beta.hat*
log(alpha.hat)*(fpg3+(n-1)*fpg2)+(n+1)*(beta.hat^2)*
((log(alpha.hat))^2))
  lowval <- beta.hat+qnorm(0.005)*sqrt(1/(plmodified+p2+p3))
  upval <- beta.hat-qnorm(0.005)*sqrt(1/(plmodified+p2+p3))
  return(c(lowval,upval))
}

alpha.delta <- function(beta,dat){
  n <- length(dat)
  np <- length(beta)
  alpha.del <- ((sum(((dat)^beta)))/n)^(1/beta)
  return(alpha.del)
}

#profile function
pr.lik <- function(beta,dat){
  n <- length(dat)
  np <- length(beta)
  prlik <- numeric(np)
  for (i in 1:np){

```

```

    p1 <- n*(log(beta[i])-log(alpha.delta(beta[i],dat )))
    p2 <- (beta[i]-1)*sum(log(dat/alpha.delta(beta[i],dat )))
    p3 <- sum(((dat /alpha.delta(beta[i],dat ))^(beta[i])))
    prlik[i] <- exp(p1+p2-p3)
  }
  return(prlik)
}

#modified profile function
mopr.lik <- function(beta,dat){
  n <- length(dat)
  np <- length(beta)
  moprlik <- numeric(np)
  for (i in 1:np){
    p1 <- n*(log(beta[i])-log(alpha.delta(beta[i],dat )))
    p2 <- (beta[i]-1)*sum(log(dat/alpha.delta(beta[i],dat )))
    p3 <- sum(((dat /alpha.delta(beta[i],dat ))^(beta[i])))
    p4 <- -2*log(beta[i])
    moprlik[i] <- exp(p1+p2-p3+p4)
  }
  return(moprlik)
}

#profile likelihood interval
pr.likval <- function(beta,sams){
  lik.vec<- pr.lik(beta, sams)
  lik.vec<- lik.vec/max(lik.vec)
  lowval <- li(beta, lik.vec, exp(-qchisq(1-.01,1)/2))[1]
  upval <- li(beta, lik.vec, exp(-qchisq(1-.01,1)/2))[2]
  return(c(lowval,upval))
}

#modified profile likelihood interval
mopr.likval <- function(beta,sams){
  molik.vec<- mopr.lik(beta, sams)
  molik.vec<- molik.vec/max(molik.vec)
  lowval <-li(beta, molik.vec, exp(-qchisq(1-.01,1)/2))[1]
  upval <-li(beta, molik.vec, exp(-qchisq(1-.01,1)/2))[2]
  return(c(lowval,upval))
}

conf.5method <- function(alpha,beta,size.samp,N){
  res <- numeric(10)
  population <- rweibull(100000,shape = beta,scale = alpha)
  vec.beta <- seq(0.05,beta+20,by=0.05)
  cover.pr <- 0
  cover.mpr <- 0
  cover.w <- 0
  cover.wpr <- 0
  cover.wmpr <- 0
  l.pr <- numeric(N)
  l.mpr <- numeric(N)
  l.w <- numeric(N)
  l.wpr <- numeric(N)

```

```

l.wmpr <- numeric(N)

for(i in 1:N){
  sam.wb<- sample(population, size = size.samp, replace = TRUE)

  # Profile Like CI (method 1)
  CI.pr <- pr.likval(vec.beta,sam.wb)
  LCI.pr <- CI.pr[1]
  UCI.pr <- CI.pr[2]
  if(is.na(LCI.pr == TRUE||UCI.pr==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.pr<beta& beta<UCI.pr){
      cover.pr=cover.pr+1
      l.pr[i] <- UCI.pr-LCI.pr
    }
  }

  # Modified Profile Like CI (method 2)
  CI.mpr <- mopr.likval(vec.beta,sam.wb)
  LCI.mpr <- CI.mpr[1]
  UCI.mpr <- CI.mpr[2]
  if(is.na(LCI.mpr == TRUE||UCI.mpr==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.mpr<beta& beta<UCI.mpr){
      cover.mpr=cover.mpr+1
      l.mpr[i] <- UCI.mpr-LCI.mpr
    } }

  # Wald CI (method 3)
  CI.w <- wald.likval(sam.wb)
  LCI.w <- CI.w[1]
  UCI.w <- CI.w[2]
  if(is.na(LCI.w == TRUE||UCI.w==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.w<beta& beta<UCI.w){
      cover.w=cover.w+1
      l.w[i] <- UCI.w-LCI.w
    } }

  #Wald Profile Like CI (method 4)
  CI.wpr <- wald.prlikval(sam.wb)
  LCI.wpr <- CI.wpr[1]
  UCI.wpr <- CI.wpr[2]
  if(is.na(LCI.wpr == TRUE||UCI.wpr==TRUE)){ break }
  else{
    if(LCI.wpr<beta& beta<UCI.wpr){
      cover.wpr=cover.wpr+1
      l.wpr[i] <- UCI.wpr-LCI.wpr
    }
  }

  #Wald Modified Profile Like CI (method 5)
  CI.wmpr <- wald.moprlikval(sam.wb)
  LCI.wmpr <- CI.wmpr[1]
  UCI.wmpr <- CI.wmpr[2]

```

```

if(is.na(LCI.wmpr == TRUE||UCI.wmpr==TRUE)){ break }
else{
  if(LCI.wmpr<beta& beta<UCI.wmpr){
    cover.wmpr=cover.wmpr+1
    l.wmpr[i] <- UCI.wmpr-LCI.wmpr
  } }
}

# Method 1
coverage.pr <- cover.pr/N
res[1] <- coverage.pr
res[6] <- mean(l.pr)

# Method 2
coverage.mpr <- cover.mpr/N
res[2] <- coverage.mpr
res[7] <- mean(l.mpr)

# Method 3
coverage.w <- cover.w/N
res[3] <- coverage.w
res[8] <- mean(l.w)

# Method 4
coverage.wpr <- cover.wpr/N
res[4] <- coverage.wpr
res[9] <- mean(l.wpr)

# Method 5
coverage.wmpr <- cover.wmpr/N
res[5] <- coverage.wmpr
res[10] <- mean(l.wmpr)

return(res)
}
options(warn=0)

```

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล

```

#####plot graph density function of Weibull distribution###
par(mar=c(3, 3, 1, 1))
x <- seq(0, 2.5, length.out=10000)
plot(x, dweibull(x, .5), type="l",xlab="Variable", ylab="Probability",
xlim=c(0, 2.5), ylim=c(0, 4), xaxs="i", yaxs="i")
lines(x, dweibull(x, 1), type="l", lty=2)
#lines(x, dweibull(x, 1.5), type="l", col="magenta")
lines(x, dweibull(x, 5), type="l",lty=3)
lines(x, dweibull(x, 10), type="l",lty=5)
#lines(x, dweibull(x, 10), type="b",pch=0, lty=.2, lwd=.1)

```



```

legend("topright", legend=paste("\u03B1 = 1,\u03B2 =", c(.5, 1,
5,10)), lwd=1,
      lty=c(1, 2, 3, 5),cex=.5,pt.cex=2)

```

การเปรียบเทียบความน่าจะเป็นคุ่มรวมกับความยาวของช่วงความเชื่อมั่นของทั้ง 5 วิธี

```

#####plot graph coverage and length 95% 99% by 5 methods###
library(Cairo)
require(stats)
require(graphics)
require(grDevices)

c <- read.csv("D:/coverandlength/110cov5conf95.csv ",header = T)
#coverage
coverage.m1 <- c$cov_M1
coverage.m2 <- c$cov_M2
coverage.m3 <- c$cov_M3
coverage.m4 <- c$cov_M4
coverage.m5 <- c$cov_M5
#jpeg(filename = "D:/coverandlength/110cov95_E.jpg",width = 650,
height = 450)
par(mar=c(3, 3, 1, 1))
plot(c$n,coverage.m1,ylim=c(0.90,0.97),lty=1,cex=1,type="o",pch=15)
lines(c$n,coverage.m2,col="red",lwd=0.03,lty=1,cex=1,type="o",pch=16,
add=T)
lines(c$n,coverage.m3,col="blue",lwd=0.03,lty=1,cex=1,type="o",pch=17
,add=T)
lines(c$n,coverage.m4,col="darkgreen",lwd=0.03,lty=1,cex=1,type="o",p
ch=9,add=T)
lines(c$n,coverage.m5,col="brown",lwd=0.03,lty=1,cex=1,type="o",pch=1
,add=T)
abline(h = .95,lty=2,col="black")
legend("bottomright", legend=paste(c("PF","MPF","W","WPF","WMPF")),
lwd=1, col=c("black","red","blue","darkgreen","brown")
      ,pch = c(15,16,17,9,1),cex=0.6,pt.cex=1)
#dev.off()

#length
len.m1 <- c$len_M1
len.m2 <- c$len_M2
len.m3 <- c$len_M3
len.m4 <- c$len_M4
len.m5 <- c$len_M5
#jpeg(filename = "D:/coverandlength/110len95_E.jpg",width = 650,
height = 450)
par(mar=c(3, 3, 1, 1))
plot(c$n,len.m1,ylim=c(0,20),lty=1,cex=1,type="o",pch=15)
lines(c$n,len.m2,col="red",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=16,add=T)
lines(c$n,len.m3,col="blue",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=17,add=T)
lines(c$n,len.m4,col="darkgreen",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=9,ad
d=T)
lines(c$n,len.m5,col="brown",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=1,add=T)

```

```

legend("topright",      legend=paste(c("PF", "MPF", "W", "WPF", "WMPF")),
lwd=1, col=c("black", "red", "blue", "darkgreen", "brown")
      ,pch = c(15,16,17,9,1),cex=0.6,pt.cex=1)
#dev.off()

#plot99%
c <- read.csv("D:/coverandlength/110cov5conf99.csv ",header = T)
#coverage
coverage.m1 <- c$cov_M1
coverage.m2 <- c$cov_M2
coverage.m3 <- c$cov_M3
coverage.m4 <- c$cov_M4
coverage.m5 <- c$cov_M5
#jpeg(filename = "D:/coverandlength/0510cov99_E.jpg",width = 650,
height = 450)
par(mar=c(3, 3, 1, 1))
plot(c$n,coverage.m1,ylim=c(0.96,1),lty=1,cex=1,type="o",lwd=0.3,pch=
15)
lines(c$n,coverage.m2,col="red",lwd=0.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=16,a
dd=T)
lines(c$n,coverage.m3,col="blue",lwd=0.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=17,
add=T)
lines(c$n,coverage.m4,col="darkgreen",lwd=0.3,lty=1,cex=1,type="o",pc
h=9,add=T)
lines(c$n,coverage.m5,col="brown",lwd=0.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=1,
add=T)
abline(h = .99,lty=2,col="black")
legend("bottomright",  legend=paste(c("PF", "MPF", "W", "WPF", "WMPF")),
lwd=.3, col=c("black", "red", "blue", "darkgreen", "brown")
      ,pch = c(15,16,17,9,1),cex=0.6,pt.cex=1)

#dev.off()

#length
len.m1 <- c$len_M1
len.m2 <- c$len_M2
len.m3 <- c$len_M3
len.m4 <- c$len_M4
len.m5 <- c$len_M5
#jpeg(filename = "D:/coverandlength/0505len99_E.jpg",width = 650,
height = 450)
par(mar=c(3, 3, 1, 1))
plot(c$n,len.m1,ylim=c(0,28),lty=1,cex=1,type="o",pch=15)
lines(c$n,len.m2,col="red",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=16,add=T)
lines(c$n,len.m3,col="blue",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=17,add=T)
lines(c$n,len.m4,col="darkgreen",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=9,ad
d=T)
lines(c$n,len.m5,col="brown",lwd=.3,lty=1,cex=1,type="o",pch=1,add=T)
legend("topright",      legend=paste(c("PF", "MPF", "W", "WPF", "WMPF")),
lwd=1, col=c("black", "red", "blue", "darkgreen", "brown")
      ,pch = c(15,16,17,9,1),cex=0.6,pt.cex=1)
#dev.off()

```

ภาคผนวก ข

บทพิสูจน์

ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงไวบูล คือ

$$E(X) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

ความแปรปรวนของการแจกแจงไวบูล คือ

$$\text{Var}(X) = \alpha^2 \left(\frac{2}{\beta} \Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right) - \left(\frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right)$$

ความเบ้ของการแจกแจงไวบูล คือ

$$\left(\frac{2}{\beta} \Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right) - \left(\frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right)^{-3/2} \left(\frac{3}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) - \frac{6}{\beta^2} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right) + 2 \left(\frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \right)^3 \right)$$

ฟังก์ชันแกมมา คือ

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

ซึ่ง $\Gamma(n+1) = n!$

อนุพันธ์ย่อยหลายตัวแปรของฟังก์ชันแกมมา (The partial derivatives of the gamma function)

คือ

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \log(t) dt \quad (6.1)$$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \log^n(t) dt \quad (6.2)$$

The psi or digamma function คือ

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{d}{dx} (\log(\Gamma(x))) \\ &= \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d}{dx} (\Gamma(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ &= \xi + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x+p-1} \right) \quad ; x \neq 0, -1, -2, \dots\end{aligned}$$

The trigamma function.

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) \\ &= \frac{\Gamma(x) \frac{d}{dx}(\Gamma'(x)) - \Gamma'(x) \frac{d}{dx}(\Gamma(x))}{(\Gamma(x))^2} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x)}{(\Gamma(x))^2} - \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)^2 \\ &= \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(p+x-1)^2}\end{aligned}$$

ค่าคงที่ของออยเลอร์ (Euler's constant) คือ

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n) \right) \quad \text{ซึ่ง } \xi \approx 0.5772156649$$

จาก Sebah และ Gourdon (2002)

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\Psi(x) \quad \text{และ} \quad \Gamma''(x) = \Gamma(x) \left(\Psi'(x) + \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)^2 \right)$$

$$\text{พิสัยจันน์ } E \left[\left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right]$$

$$\text{จาก } E \left[\left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right] = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta} dx$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } u &= \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \\ \frac{du}{dx} &= \beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \\ dx &= \frac{1}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} du \end{aligned} \tag{6.3}$$

จากสมการ (6.3)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right] &= \int_0^\infty u \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-u} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\ &= \int_0^\infty u e^{-u} du \\ &= \int_0^\infty u^{2-1} e^{-u} du \\ &= \Gamma(2) \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\text{พิสูจน์ } E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx \end{aligned}$$

จากสมการ (6.3)

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] &= \int_0^\infty u \log(u) \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-u} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty u \log(u) e^{-u} du \end{aligned}$$

จากสมการ (6.1)

ดังนั้น

$$E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] = \frac{1}{\beta} \Gamma'(2) \quad (6.5)$$

พิสูจน์ $E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2\right]$

จาก $E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2\right] = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx$

จากสมการ (6.3)

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2\right] &= \int_0^\infty u \frac{1}{\beta^2} \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-u} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty u (\log(u))^2 e^{-u} du \end{aligned}$$

จากสมการ (6.2)

ดังนั้น

$$E\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)^2\right] = \frac{1}{\beta^2} \Gamma''(2) \quad (6.6)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}\right] &= \frac{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right]}{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]} + \left(\frac{-cov\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i), \sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)}{E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^2\right]} + \right. \\ &\quad \left. \frac{var\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right) E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right]}{E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^3\right]} \right) \end{aligned}$$

จากการจำลองหลายสถานการณ์ 2 พจน์สุดท้ายมีค่าน้อยมาก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}\right] &\approx \frac{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right]}{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]} \\
&= \frac{\left(\frac{n\alpha^\beta}{\beta^2}\right)(\Gamma''(2) + 2\beta\Gamma'(2)\log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha))}{n\alpha^\beta} \quad (6.7)
\end{aligned}$$

พิสูจน์ไว้ในสมการ (6.9) และ (6.10)

พิจารณา

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta (\log(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}\right] &= \frac{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right]}{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]} + \left(\frac{-\text{cov}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right)^2, \left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^2\right)}{E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^4\right]} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\text{var}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^2\right)E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right)^2\right]}{E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^6\right]}\right)
\end{aligned}$$

จากการจำลองหลายสถานการณ์ 2 พจน์สุดท้ายมีค่าน้อยมาก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\beta}\right)^2\right] &\approx \frac{E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right)^2\right]}{E\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right)^2\right]} \\
&= \frac{\left(\frac{n\alpha^{2\beta}}{\beta^2}\right)(\Gamma''(3) + (n-1)(\Gamma'(2))^2 + 2\beta\log(\alpha)(\Gamma'(3) + (n-1)\Gamma'(2)) + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha))}{n(n+1)\alpha^{2\beta}} \quad (6.8)
\end{aligned}$$

พิสูจน์ไว้ในสมการ (6.19) และ (6.22)

พิสูจน์สมการ (6.7)

ขั้นที่ 1 พิสูจน์ $E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right]$

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right] &= nE\left[x^\beta \log^2(x)\right] \\
&= n \int_0^\infty x^\beta \log^2(x) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx
\end{aligned}$$

จากสมการ (6.3)

$$\begin{aligned}
 E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right] &= n \int_0^\infty x^\beta \log^2(x) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\
 &= n \int_0^\infty x^\beta \log^2(x) e^{-u} du \\
 &= n \alpha^\beta \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \log^2\left(\frac{\alpha}{x}\right) e^{-u} du \\
 &= n \alpha^\beta \int_0^\infty u \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \log(\alpha)\right)^2 e^{-u} du \\
 &= n \alpha^\beta \int_0^\infty u \left(\log^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) + 2\log\left(\frac{x}{\alpha}\right)\log(\alpha) + \log^2(\alpha)\right) e^{-u} du \\
 &= n \alpha^\beta \left(\int_0^\infty u \log^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du + 2\log(\alpha) \int_0^\infty u \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du + \log^2(\alpha) \int_0^\infty u e^{-u} du \right)
 \end{aligned}$$

จากสมการ (6.4) (6.5) และ (6.6)

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log^2(x_i)\right] &= n \alpha^\beta \left(\frac{1}{\beta^2} \Gamma''(2) + 2\log(\alpha) \left(\frac{1}{\beta} \Gamma'(2) \right) + \log^2(\alpha) \Gamma(2) \right) \\
 &= \frac{n \alpha^\beta}{\beta^2} \left(\Gamma''(2) + 2\beta \Gamma'(2) \log(\alpha) + \beta^2 \log^2(\alpha) \right) \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ $E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]$

$$\begin{aligned}
 E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right] &= n E\left[x^\beta\right] \\
 &= n \int_0^\infty x^\beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx
 \end{aligned}$$

จากสมการ (6.3)

$$\begin{aligned}
 E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right] &= n \int_0^\infty x^\beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\
 &= n \int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta x^\beta e^{-u} du \\
 &= n \alpha^\beta \int_0^\infty u e^{-u} du
 \end{aligned}$$

จากสมการ (6.1)

ดังนั้น

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right] &= n\alpha^\beta \Gamma(2) \\ &= n\alpha^\beta \end{aligned} \quad (6.10)$$

พิสูจน์สมการ (6.8)

ขั้นที่ 1 พิสูจน์ $E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]^2$

$$\text{จาก } E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]^2 = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right] + \left(E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]\right)^2$$

(6.11)

จากสมการ (6.11) พิจารณา $\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]$

$$\text{จะได้ } \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}\left(x_i^\beta \log(x_i)\right) + 2\sum_{i \neq j} \text{Cov}\left(x_i^\beta \log(x_i), x_j^\beta \log(x_j)\right)$$

เนื่องจาก x_i, x_j เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $\text{Cov}\left(x_i^\beta \log(x_i), x_j^\beta \log(x_j)\right) = 0$

$$\text{จะได้ } \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}\left(x_i^\beta \log(x_i)\right)$$

$$= nE\left[x^\beta \log(x)\right]^2 - n\left(E\left[x^\beta \log(x)\right]\right)^2$$

$$= nE\left[x^{2\beta} \log^2(x)\right] - n\left(E\left[x^\beta \log(x)\right]\right)^2$$

จากสมการ (6.10) จะได้

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]^2 &= nE\left[x^{2\beta} \log^2(x)\right] - n\left(E\left[x^\beta \log(x)\right]\right)^2 + \left(E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]\right)^2 \\ &= nE\left[x^{2\beta} \log^2(x)\right] + n(n-1)\left(E\left[x^\beta \log(x)\right]\right)^2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

จากสมการ (6.12) พิจารณา $E\left[x^{2\beta} \log^2(x)\right]$

$$E\left[x^{2\beta} \log^2(x)\right] = \int_0^\infty x^{2\beta} \log^2(x) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx$$

จากสมการ (6.3) จะได้

$$E[x^{2\beta} \log^2(x)] = \int_0^\infty x^{2\beta} \log^2(x) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

$$\begin{aligned} E[x^{2\beta} \log^2(x)] &= \int_0^\infty x^{2\beta} \log^2(x) e^{-u} du \\ &= \alpha^{2\beta} \int_0^\infty u^2 \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \log(\alpha) \right)^2 e^{-u} du \\ &= \alpha^{2\beta} \left\{ \int_0^\infty u^2 \log^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du + 2\log(\alpha) \int_0^\infty u^2 \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du + \log^2(\alpha) \int_0^\infty u^2 e^{-u} du \right\} \quad (6.13) \end{aligned}$$

จากสมการ (6.13) พิจารณา $\int_0^\infty u^2 \log^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du$

$$\int_0^\infty u^2 \log^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du = \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty u^2 \log^2(u) e^{-u} du$$

จากสมการ (6.2) จะได้

$$\int_0^\infty u^2 \log^2\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du = \frac{1}{\beta^2} \Gamma''(3) \quad (6.14)$$

จากสมการ (6.13) พิจารณา $\int_0^\infty u^2 \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du$

$$\int_0^\infty u^2 \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty u^{3-1} \log(u) e^{-u} du$$

จากสมการ (6.1) จะได้

$$\int_0^\infty u^2 \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du = \frac{1}{\beta} \Gamma'(3) \quad (6.15)$$

จากสมการ (6.12) พิจารณา $\int_0^\infty u^2 e^{-u} du$

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u} du = \int_0^\infty u^{3-1} e^{-u} du$$

จากสมการ (6.1) จะได้

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u} du = \Gamma(3) \quad (6.16)$$

นำสมการ (6.14), (6.15) และ (6.16) แทนในสมการ (6.13) ดังนั้น

$$E[x^{2\beta} \log^2(x)] = \alpha^{2\beta} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \Gamma''(3) + 2\log(\alpha) \frac{1}{\beta} \Gamma'(3) + \log^2(\alpha) \Gamma(3) \right\} \quad (6.17)$$

จากสมการ (6.12) พิจารณา $E[x^\beta \log(x)]$

$$E[x^\beta \log(x)] = \int_0^\infty x^\beta \log(x) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx$$

จากสมการ (6.3) จะได้

$$\begin{aligned} E[x^\beta \log(x)] &= \int_0^\infty x^\beta \log(x) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\ &= \int_0^\infty x^\beta \log(x) e^{-u} du \\ &= \alpha^\beta \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \left(\log\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \log(\alpha)\right) e^{-u} du \\ &= \alpha^\beta \left\{ \int_0^\infty u \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{-u} du + \log(\alpha) \int_0^\infty u e^{-u} du \right\} \end{aligned}$$

จากสมการ (6.4) และ (6.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E[x^\beta \log(x)] &= \alpha^\beta \left(\frac{1}{\beta} \Gamma'(2) + \log(\alpha) \Gamma(2) \right) \\ &= \frac{\alpha^\beta}{\beta} (\Gamma'(2) + \beta \log(\alpha)) \end{aligned} \tag{6.18}$$

นำสมการ (6.17) และ (6.18) แทนในสมการ (6.12) จะได้

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]^2 &= n \left(\alpha^{2\beta} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \Gamma''(3) + 2 \log(\alpha) \frac{1}{\beta} \Gamma'(3) + \log^2(\alpha) \Gamma(3) \right\} \right. \\ &\quad \left. + n(n-1) \left(\frac{\alpha^\beta}{\beta} (\Gamma'(2) + \beta \log(\alpha)) \right)^2 \right) \\ &= \frac{n\alpha^{2\beta}}{\beta^2} (\Gamma''(3) + 2\beta \log(\alpha) \Gamma'(3) + \beta^2 \log^2(\alpha) \Gamma(3)) \\ &\quad + (n-1) \left(\frac{n\alpha^{2\beta}}{\beta^2} \right) \left((\Gamma'(2))^2 + 2\beta \log(\alpha) \Gamma'(2) + \beta^2 \log^2(\alpha) \right) \\ &= \frac{n\alpha^{2\beta}}{\beta^2} \left(\Gamma''(3) + (n-1) (\Gamma'(2))^2 + 2\beta \Gamma'(3) \log(\alpha) + 2(n-1) \beta \Gamma'(2) \log(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + 2\beta^2 \log^2(\alpha) + (n-1) \beta^2 \log^2(\alpha) \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta \log(x_i)\right]^2 = \frac{n\alpha^{2\beta}}{\beta^2} \left(\Gamma''(3) + (n-1)(\Gamma'(2))^2 + 2\beta \log(\alpha)(\Gamma'(3) + (n-1)\Gamma'(2)) \right. \\ \left. + (n+1)\beta^2 \log^2(\alpha) \right) \quad (6.19)$$

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ $E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]^2$

$$\text{จาก } E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]^2 = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right] + \left(E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]\right)^2 \\ = \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i^\beta) + 2\sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^n \text{Cov}(x_i^\beta, x_j^\beta) + \left(E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]\right)^2$$

เนื่องจาก x_i, x_j เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $\text{Cov}(x_i^\beta, x_j^\beta) = 0$

$$\text{จะได้ } E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]^2 = \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i^\beta) + \left(E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]\right)^2 \\ = nE[x^\beta]^2 - n(E[x^\beta])^2 + \left(E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]\right)^2 \\ = nE[x^{2\beta}] + n(n-1)(E[x^\beta])^2$$

จากสมการ (6.9) จะได้

$$E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]^2 = nE[x^{2\beta}] + n(n-1)\alpha^{2\beta} \quad (6.20)$$

จากสมการ (6.20) พิจารณา $E[x^{2\beta}]$

$$\text{จะได้ } E[x^{2\beta}] = \int_0^\infty x^{2\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} dx$$

จากสมการ (6.3) จะได้

$$E[x^{2\beta}] = \int_0^\infty x^{2\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \frac{du}{\beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)} \\ = \int_0^\infty x^{2\beta} e^{-u} du$$

$$\begin{aligned}
 E[x^{2\beta}] &= \alpha^{2\beta} \int_0^{\infty} u^2 e^{-u} du \\
 &= \alpha^{2\beta} \Gamma(3) \\
 \text{ดังนั้น } E[x^{2\beta}] &= 2\alpha^{2\beta}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

นำสมการ (6.21) แทนในสมการ (6.20)

$$\text{จะได้ } E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]^2 = 2n\alpha^{2\beta} + n(n-1)\alpha^{2\beta}$$

ดังนั้น

$$E\left[\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right]^2 = n(n+1)\alpha^{2\beta} \tag{6.22}$$

$$\text{พิสูจน์ } \Gamma'(2) = 0.4228, \Gamma''(2) = 0.8237, \Gamma'(3) = 1.8456 \text{ และ } \Gamma''(3) = 2.4929 \tag{6.23}$$

$$\text{จาก } \Gamma'(X) = \Psi(X)\Gamma(X)$$

จะได้

$$1. \Gamma'(2) = \Psi(2)\Gamma(2)$$

$$= 1 - \xi$$

$$= 1 - 0.5772$$

$$= 0.4228$$

$$2. \Gamma'(3) = \Psi(3)\Gamma(3)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \xi\right)(2!)$$

$$= 3 - 2\xi$$

$$= 3 - 1.7331$$

$$= 1.8456$$

$$\text{จาก } \Gamma''(X) = \Gamma(X) \left(\Psi'(X) + \left(\frac{\Gamma'(X)}{\Gamma(X)} \right)^2 \right)$$

$$3. \Gamma''(2) = \Gamma(2) \left(\Psi'(2) + \left(\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} \right)^2 \right)$$

$$\Gamma''(2) = (1) \left(0.6449 + \left(\frac{0.4228}{1} \right)^2 \right)$$

$$= 0.6449 + 0.1788$$

$$= 0.8237$$

$$4. \Gamma''(3) = \Gamma(3) \left(\Psi'(3) + \left(\frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)} \right)^2 \right)$$

$$= (2!) \left(0.3949 + \left(\frac{1.8456}{2!} \right)^2 \right)$$

$$= 2(0.3949 + 0.8516)$$

$$= 2(1.2465)$$

$$= 2.4929$$

ภาคผนวก ค

ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น

ตารางที่ 6.1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.8971	0.8925	0.8976	0.8920	0.8116	1.6211	8.1492	16.1700
	10	0.9242	0.9282	0.9273	0.9192	0.5156	1.0297	5.1163	10.2169
	20	0.9398	0.9420	0.9367	0.9379	0.3433	0.6883	3.4227	6.8534
	30	0.9413	0.9465	0.9441	0.9426	0.2750	0.5543	2.7533	5.4853
	50	0.9464	0.9503	0.9487	0.9457	0.2112	0.4252	2.1081	4.2102
	80	0.9493	0.9449	0.9424	0.9499	0.1670	0.3360	1.6303	3.2955
	100	0.9534	0.9478	0.9437	0.9417	0.1493	0.2972	1.4561	2.9205
	200	0.9503	0.9551	0.9482	0.9475	0.1065	0.2142	1.0311	2.0600
1	5	0.8996	0.8952	0.8985	0.9018	0.8130	1.6143	8.0908	16.3760
	10	0.9300	0.9283	0.9291	0.9238	0.5149	1.0272	5.1269	10.1191
	20	0.9366	0.9376	0.9372	0.9354	0.3427	0.6819	3.4220	6.7994
	30	0.9451	0.9374	0.9411	0.9498	0.2768	0.5485	2.7301	5.5481
	50	0.9478	0.9501	0.9484	0.9427	0.2116	0.4212	2.0925	4.1989
	80	0.9423	0.9482	0.9442	0.9430	0.1655	0.3296	1.6405	3.2674
	100	0.9489	0.9457	0.9473	0.9432	0.1492	0.2944	1.4657	2.9274
	200	0.9496	0.9514	0.9480	0.9453	0.1059	0.2083	1.0332	2.0588
5	5	0.8989	0.8945	0.8932	0.8970	0.7852	1.6034	8.0861	16.2210
	10	0.9268	0.9377	0.9259	0.9256	0.5116	1.0513	5.1275	10.2857
	20	0.9414	0.9379	0.9395	0.9388	0.3446	0.6845	3.4222	6.8329
	30	0.9409	0.9422	0.9428	0.9435	0.2743	0.5512	2.7493	5.5167
	50	0.9453	0.9453	0.9494	0.9467	0.2111	0.4195	2.1068	4.2019
	80	0.9460	0.9476	0.9482	0.9481	0.1658	0.3294	1.6464	3.2847
	100	0.9474	0.9426	0.9472	0.9531	0.1487	0.2938	1.4701	2.9450
	200	0.9492	0.9497	0.9485	0.9477	0.1111	0.2085	1.0343	2.0645

ตารางที่ 6.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9486	0.9481	0.9461	0.9463	0.8664	1.7411	8.6658	17.4631
	10	0.9501	0.9503	0.9493	0.9492	0.5294	1.0507	5.2396	10.5549
	20	0.9513	0.9512	0.9464	0.9499	0.3472	0.6939	3.4549	6.9449
	30	0.9472	0.9558	0.9520	0.9508	0.2766	0.5593	2.7763	5.5277
	50	0.9505	0.9546	0.9528	0.9510	0.2122	0.4267	2.1167	4.2331
	80	0.9514	0.9474	0.9432	0.9500	0.1674	0.3369	1.6319	3.2946
	100	0.9542	0.9503	0.9443	0.9470	0.1494	0.2981	1.4573	2.9375
	200	0.9517	0.9591	0.9493	0.9506	0.1067	0.2150	1.0322	2.0673
1	5	0.9437	0.9482	0.9429	0.9496	0.8587	1.7323	8.5691	17.3933
	10	0.9494	0.9546	0.9485	0.9479	0.5238	1.0542	5.2226	10.4139
	20	0.9496	0.9483	0.9490	0.9465	0.3476	0.6895	3.4594	6.8880
	30	0.9526	0.9478	0.9429	0.9569	0.2791	0.5546	2.7343	5.5850
	50	0.9520	0.9543	0.9509	0.9491	0.2125	0.4230	2.0980	4.2255
	80	0.9466	0.9506	0.9474	0.9456	0.1663	0.3303	1.6467	3.2764
	100	0.9524	0.9494	0.9475	0.9461	0.1497	0.2956	1.4661	2.9367
	200	0.9518	0.9523	0.9504	0.9452	0.1062	0.2086	1.0360	2.0586
5	5	0.9421	0.9472	0.9456	0.9455	0.7699	1.6947	8.2354	17.3231
	10	0.9475	0.9537	0.9470	0.9498	0.5219	1.0632	5.2434	10.5220
	20	0.9546	0.9521	0.9513	0.9461	0.3494	0.6949	3.4690	6.8815
	30	0.9503	0.9520	0.9537	0.9506	0.2769	0.5572	2.7796	5.5485
	50	0.9500	0.9482	0.9520	0.9489	0.2122	0.4209	2.1127	4.2111
	80	0.9504	0.9486	0.9514	0.9491	0.1667	0.3298	1.6524	3.2886
	100	0.9510	0.9455	0.9511	0.9546	0.1498	0.2947	1.4760	2.9498
	200	0.9499	0.9511	0.9498	0.9511	0.1115	0.2088	1.0358	2.0719

ตารางที่ 6.3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β แบบวีลด์ (W)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9473	0.9468	0.9459	0.9442	0.8770	1.7631	8.7716	17.6300
	10	0.9447	0.9466	0.9452	0.9425	0.5261	1.0462	5.2040	10.4649
	20	0.9474	0.9482	0.9440	0.9448	0.3440	0.6886	3.4358	6.8831
	30	0.9458	0.9505	0.9501	0.9496	0.2746	0.5529	2.7650	5.5084
	50	0.9487	0.9511	0.9504	0.9484	0.2099	0.4218	2.1074	4.2128
	80	0.9510	0.9451	0.9433	0.9501	0.1652	0.3282	1.6296	3.2889
	100	0.9545	0.9457	0.9438	0.9454	0.1471	0.2924	1.4548	2.9286
	200	0.9502	0.9511	0.9490	0.9489	0.1034	0.2074	1.0310	2.0636
1	5	0.9434	0.9441	0.9474	0.9505	0.8694	1.7425	8.7179	17.6217
	10	0.9449	0.9511	0.9458	0.9441	0.5202	1.0524	5.2049	10.3521
	20	0.9454	0.9469	0.9461	0.9432	0.3440	0.6873	3.4385	6.8390
	30	0.9499	0.9456	0.9440	0.9548	0.2763	0.5518	2.7289	5.5558
	50	0.9504	0.9531	0.9507	0.9464	0.2105	0.4211	2.0954	4.2017
	80	0.9440	0.9495	0.9461	0.9458	0.1639	0.3288	1.6415	3.2759
	100	0.9507	0.9474	0.9492	0.9464	0.1472	0.2937	1.4667	2.9336
	200	0.9497	0.9509	0.9500	0.9459	0.1031	0.2063	1.0346	2.0566
5	5	0.9400	0.9432	0.9420	0.9444	0.8076	1.7056	8.7062	17.4607
	10	0.9450	0.9491	0.9458	0.9464	0.5211	1.0422	5.2337	10.4992
	20	0.9504	0.9475	0.9470	0.9458	0.3462	0.6891	3.4428	6.8567
	30	0.9469	0.9492	0.9486	0.9494	0.2739	0.5535	2.7582	5.5351
	50	0.9464	0.9472	0.9509	0.9485	0.2096	0.4189	2.1049	4.2020
	80	0.9483	0.9474	0.9500	0.9489	0.1643	0.3279	1.6474	3.2852
	100	0.9508	0.9436	0.9493	0.9554	0.1472	0.2928	1.4720	2.9494
	200	0.9501	0.9496	0.9487	0.9492	0.1032	0.2068	1.0334	2.0667

ตารางที่ 6.4 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลติโดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9506	0.9260	0.7905	0.6858	0.9588	1.7029	4.9738	6.7904
	10	0.9518	0.9460	0.8870	0.8164	0.5525	1.0587	4.1257	6.5102
	20	0.9517	0.9498	0.9171	0.8919	0.3531	0.6963	3.0829	5.4802
	30	0.9498	0.9519	0.9364	0.9142	0.2798	0.5575	2.5887	4.7254
	50	0.9508	0.9521	0.9438	0.9304	0.2122	0.4240	2.0311	3.8537
	80	0.9516	0.9457	0.9395	0.9398	0.1662	0.3293	1.5936	3.1142
	100	0.9551	0.9463	0.9405	0.9357	0.1478	0.2933	1.4287	2.7974
	200	0.9509	0.9514	0.9475	0.9442	0.1037	0.2077	1.0218	2.0170
1	5	0.9620	0.9657	0.9647	0.9510	1.0531	2.1328	10.4933	18.2015
	10	0.9605	0.9662	0.9618	0.9519	0.5692	1.1500	5.6901	11.3212
	20	0.9529	0.9547	0.9531	0.9512	0.3586	0.7166	3.5840	7.1345
	30	0.9565	0.9504	0.9484	0.9601	0.2846	0.5671	2.8027	5.7120
	50	0.9534	0.9557	0.9541	0.9495	0.2140	0.4278	2.1310	4.2717
	80	0.9460	0.9514	0.9481	0.9482	0.1656	0.3322	1.6587	3.3116
	100	0.9522	0.9491	0.9505	0.9483	0.1484	0.2962	1.4782	2.9588
	200	0.9502	0.9520	0.9506	0.9463	0.1035	0.2073	1.0386	2.0641
5	5	0.9501	0.9542	-	-	1.1435	2.3546	-	-
	10	0.9523	0.9561	-	-	0.6329	1.3465	-	-
	20	0.9561	0.9545	0.9776	-	0.3753	0.7791	5.7753	-
	30	0.9525	0.9535	0.9886	0.9762	0.2882	0.5967	3.7027	11.2528
	50	0.9519	0.9505	0.9778	0.9900	0.2162	0.4375	2.4674	5.8379
	80	0.9518	0.9518	0.9668	0.9791	0.1673	0.3363	1.8101	3.9584
	100	0.9536	0.9472	0.9617	0.9764	0.1494	0.2989	1.5836	3.3977
	200	0.9502	0.9511	0.9555	0.9625	0.1040	0.2088	1.0713	2.2170

หมายเหตุ - คือ วิธี WPF ไม่สามารถประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β ได้

ตารางที่ 6.5 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลติโดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WMPF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9741	0.9557	0.8220	0.7070	1.1951	2.0799	5.6545	7.4142
	10	0.9691	0.9614	0.9032	0.8309	0.6079	1.1582	4.4239	6.8825
	20	0.9604	0.9563	0.9284	0.8986	0.3689	0.7248	3.2124	5.6536
	30	0.9543	0.9560	0.9417	0.9191	0.2873	0.5721	2.6548	4.8320
	50	0.9541	0.9536	0.9466	0.9336	0.2157	0.4300	2.0611	3.9095
	80	0.9535	0.9479	0.9411	0.9412	0.1679	0.3327	1.6082	3.1408
	100	0.9561	0.9476	0.9423	0.9377	0.1489	0.2955	1.4400	2.8196
	200	0.9516	0.9522	0.9478	0.9449	0.1041	0.2085	1.0252	2.0245
1	5	0.9809	0.9798	0.9799	0.9621	1.3590	2.7376	13.4442	19.3254
	10	0.9744	0.9777	0.9753	0.9646	0.6264	1.2602	6.2664	12.4941
	20	0.9619	0.9605	0.9611	0.9595	0.3751	0.7467	3.7442	7.4512
	30	0.9606	0.9553	0.9535	0.9639	0.2923	0.5830	2.8815	5.8690
	50	0.9560	0.9585	0.9572	0.9529	0.2173	0.4346	2.1659	4.3427
	80	0.9472	0.9531	0.9501	0.9499	0.1671	0.3354	1.6753	3.3435
	100	0.9534	0.9501	0.9517	0.9492	0.1495	0.2984	1.4893	2.9804
	200	0.9515	0.9527	0.9510	0.9469	0.1039	0.2080	1.0431	2.0718
5	5	0.9542	0.9561	-	-	1.7530	2.9456	-	-
	10	0.9569	0.9593	-	-	0.7011	1.4351	-	-
	20	0.9601	0.9572	0.9811	-	0.3918	0.8104	6.3894	-
	30	0.9557	0.9556	0.9904	0.9769	0.2962	0.6138	3.8402	12.8188
	50	0.9536	0.9535	0.9797	0.9903	0.2198	0.4451	2.5123	5.9691
	80	0.9540	0.954	0.9692	0.9804	0.1690	0.3398	1.8309	4.0052
	100	0.9545	0.9487	0.9630	0.9777	0.1505	0.3013	1.5968	3.4289
	200	0.9508	0.9517	0.9563	0.9628	0.1044	0.2096	1.0757	2.2252

หมายเหตุ – คือ วิธี WMPF ไม่สามารถประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 95% ของพารามิเตอร์ β ได้

ตารางที่ 6.6 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9720	0.9691	0.9689	0.9687	1.2507	2.4800	12.4670	24.8742
	10	0.9795	0.9828	0.9821	0.9821	0.7412	1.4708	7.3516	13.2293
	20	0.9868	0.9844	0.9854	0.9871	0.4887	0.9625	4.8085	9.5485
	30	0.9862	0.9874	0.9899	0.9868	0.3953	0.7671	3.8124	7.6439
	50	0.9880	0.9868	0.9881	0.9878	0.3069	0.5854	2.8978	5.7733
	80	0.9921	0.9886	0.9896	0.9897	0.2470	0.4632	2.2662	4.5408
	100	0.9892	0.9906	0.9875	0.9906	0.2236	0.4153	2.0183	4.0380
	200	0.9898	0.9900	0.9889	0.9883	0.1435	0.3002	1.4186	2.8363
1	5	0.9658	0.9694	0.9697	0.9679	1.2412	2.4937	12.4853	24.7416
	10	0.9824	0.9830	0.9847	0.9812	0.7396	1.4768	7.3626	14.7218
	20	0.9882	0.9862	0.9894	0.9855	0.4927	0.9645	4.8210	9.5538
	30	0.9869	0.9864	0.9874	0.9852	0.3954	0.7678	3.8203	7.6054
	50	0.9881	0.9871	0.9879	0.9895	0.3050	0.5864	2.8921	5.7932
	80	0.9873	0.9880	0.9887	0.9881	0.2467	0.4628	2.2613	4.5130
	100	0.9910	0.9898	0.9867	0.9887	0.2245	0.4156	2.0095	4.0237
	200	0.9907	0.9895	0.9862	0.9893	0.1433	0.3005	1.4237	2.8320
5	5	0.9669	0.9689	0.9679	0.9679	1.1387	2.4984	12.4021	24.6958
	10	0.9814	0.9791	0.9825	0.9855	0.7322	1.4794	7.3823	13.1916
	20	0.9852	0.9865	0.9893	0.9860	0.4895	0.9621	4.7863	9.5873
	30	0.9872	0.9878	0.9874	0.9893	0.3935	0.7713	3.8058	7.6183
	50	0.9881	0.9895	0.9896	0.9871	0.3059	0.5878	2.9137	5.7923
	80	0.9899	0.9884	0.9886	0.9876	0.2465	0.4636	2.2561	4.5479
	100	0.9898	0.9895	0.9908	0.9883	0.2238	0.4152	2.0201	4.0353
	200	0.9896	0.9918	0.9898	0.9895	0.1430	0.3002	1.4185	2.8493

ตารางที่ 6.7 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β ที่ใช้วิธีภาชนะน่าจะเป็นโปรไฟล์แบบปรับปรุง (MPF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9919	0.9920	0.9889	0.9889	1.1989	2.3898	12.0620	24.0607
	10	0.9889	0.9909	0.9900	0.9897	0.7295	1.4426	7.2039	13.2658
	20	0.9904	0.9887	0.9873	0.9899	0.4846	0.9552	4.7556	9.4884
	30	0.9906	0.9894	0.9917	0.9908	0.3945	0.7625	3.7867	7.6155
	50	0.9902	0.9877	0.9913	0.9902	0.3065	0.5834	2.8953	5.7642
	80	0.9910	0.9890	0.9903	0.9898	0.2462	0.4623	2.2616	4.5290
	100	0.9912	0.9901	0.9890	0.9906	0.2236	0.4142	2.0177	4.0303
	200	0.9901	0.9907	0.9899	0.9897	0.1434	0.3002	1.4188	2.8376
1	5	0.9875	0.9876	0.9860	0.9892	1.1981	2.3864	11.9241	23.9337
	10	0.9897	0.9907	0.9892	0.9894	0.7251	1.4456	7.1709	14.4408
	20	0.9920	0.9889	0.9911	0.9903	0.44887	0.9562	4.7609	9.4841
	30	0.9898	0.9887	0.9916	0.9884	0.3937	0.7635	3.8062	7.575
	50	0.9895	0.9888	0.9900	0.9908	0.3044	0.5851	2.8857	5.7749
	80	0.9890	0.9881	0.9902	0.9883	0.2466	0.4616	2.2589	4.5016
	100	0.9909	0.9920	0.9875	0.9890	0.2241	0.4158	2.0076	4.0172
	200	0.9916	0.9900	0.9876	0.9896	0.1433	0.3004	1.4243	2.8298
5	5	0.9864	0.9878	0.9907	0.9863	1.0368	2.3851	12.0269	23.6585
	10	0.9905	0.9889	0.9908	0.9903	0.7193	1.4547	7.2330	13.3511
	20	0.9902	0.9907	0.9927	0.9915	0.4862	0.9532	4.7440	9.5268
	30	0.9895	0.9917	0.9906	0.9915	0.3913	0.7684	3.7896	7.5748
	50	0.9902	0.9899	0.9917	0.9894	0.3054	0.5854	2.9064	5.7812
	80	0.9899	0.9902	0.9891	0.9906	0.2460	0.4634	2.2515	4.5504
	100	0.9908	0.9919	0.9901	0.9891	0.2236	0.4154	2.0145	4.0297
	200	0.9905	0.9911	0.9910	0.9904	0.1430	0.2997	1.4190	2.8490

ตารางที่ 6.8 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β แบบวีลด์ (W)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9925	0.9922	0.9919	0.9919	1.2764	2.5570	12.8618	25.8776
	10	0.9891	0.9917	0.9917	0.9918	0.7348	1.4655	7.3465	14.6485
	20	0.9900	0.9890	0.9884	0.9904	0.4762	0.9554	4.7882	9.5079
	30	0.9908	0.9892	0.9913	0.9905	0.3827	0.7587	3.8006	7.6415
	50	0.9899	0.9878	0.9907	0.9904	0.2900	0.5767	2.8960	5.7735
	80	0.9915	0.9891	0.9898	0.9909	0.2259	0.4520	2.2593	4.5381
	100	0.9899	0.9898	0.9885	0.9910	0.2015	0.4020	2.0134	4.0381
	200	0.9900	0.9895	0.9897	0.9896	0.1420	0.2829	1.4157	2.8353
1	5	0.9909	0.9910	0.9895	0.9923	1.2803	2.5463	12.7346	25.6093
	10	0.9907	0.9919	0.9897	0.9908	0.7312	1.4703	7.2982	14.7352
	20	0.9917	0.9896	0.9911	0.9901	0.4805	0.9572	4.7912	9.5516
	30	0.9900	0.9888	0.9915	0.9879	0.3817	0.7595	3.8188	7.5934
	50	0.9879	0.9885	0.9901	0.9901	0.2876	0.5767	2.8902	5.7770
	80	0.9885	0.9877	0.9899	0.9880	0.2261	0.4504	2.2565	4.5066
	100	0.9898	0.9910	0.9877	0.9889	0.2015	0.4037	2.0075	4.0169
	200	0.9916	0.9895	0.9871	0.9893	0.1420	0.2832	1.4197	2.8286
5	5	0.9899	0.9901	0.9901	0.9916	1.1030	2.3541	12.8360	25.4288
	10	0.9914	0.9896	0.9911	0.9901	0.7339	1.4507	7.3627	14.7856
	20	0.9892	0.9906	0.9929	0.9913	0.4773	0.9530	4.7768	9.5885
	30	0.9899	0.9906	0.9907	0.9919	0.3799	0.7639	3.8041	7.6104
	50	0.9890	0.9897	0.9916	0.9884	0.2886	0.5766	2.9078	5.7828
	80	0.9903	0.9897	0.9893	0.9899	0.2258	0.4526	2.2543	4.5400
	100	0.9894	0.9908	0.9899	0.9889	0.2012	0.4032	2.0129	4.0296
	200	0.9903	0.9908	0.9911	0.9904	0.1414	0.2825	1.4160	2.8464

ตารางที่ 6.9 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลติโดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WPF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9884	0.9810	0.8989	0.8989	1.3336	2.4653	7.7565	10.7583
	10	0.9911	0.9904	0.9630	0.9256	0.7646	1.4781	6.0319	9.8706
	20	0.9915	0.9895	0.9774	0.965	0.4869	0.9639	4.3792	7.8346
	30	0.9915	0.9898	0.9872	0.977	0.3883	0.7640	3.5995	6.7215
	50	0.9906	0.9880	0.9879	0.9824	0.2928	0.5793	2.8024	5.3428
	80	0.9921	0.9893	0.9893	0.987	0.2272	0.4532	2.2172	4.3267
	100	0.9902	0.9899	0.9862	0.9881	0.2024	0.4029	1.9791	3.8873
	200	0.9901	0.9898	0.9889	0.988	0.1423	0.2833	1.4042	2.7806
1	5	0.9912	0.9915	0.9905	0.9912	1.4447	2.8784	14.5068	26.1451
	10	0.9937	0.9952	0.9931	0.9940	0.7843	1.5778	7.8249	15.8150
	20	0.9935	0.9918	0.9928	0.9919	0.4972	0.9917	4.9570	9.8863
	30	0.9914	0.9902	0.9925	0.9901	0.3907	0.7774	3.9071	7.7778
	50	0.9893	0.9900	0.9910	0.9914	0.2918	0.5851	2.9306	5.8598
	80	0.9892	0.9883	0.9909	0.9882	0.2281	0.4543	2.2773	4.5445
	100	0.9904	0.9921	0.9885	0.9893	0.2029	0.4068	2.0222	4.0447
	200	0.9908	0.9899	0.9873	0.9896	0.1425	0.2843	1.4246	2.8388
5	5	0.9915	0.9917	-	-	1.5071	2.9512	-	-
	10	0.9962	0.9973	-	-	0.8470	1.8797	-	-
	20	0.9938	0.9952	0.9988	-	0.51087	1.0514	7.6046	-
	30	0.9928	0.9949	0.9982	0.9955	0.3966	0.8141	4.8913	10.1142
	50	0.9903	0.9926	0.9974	0.9989	0.2958	0.5984	3.3303	7.7520
	80	0.9911	0.9912	0.9943	0.9980	0.2293	0.4629	2.4436	5.3442
	100	0.9901	0.9923	0.9936	0.9956	0.2037	0.4107	2.1440	4.5696
	200	0.9907	0.9915	0.9926	0.9934	0.1423	0.2850	1.4594	3.0189

หมายเหตุ - คือ วิธี WPF ไม่สามารถประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β ได้

ตารางที่ 6.10 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β แบบวัลติโดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (WMPF)

α	n	ค่าประมาณความน่าจะเป็นคัมรวม				ค่าประมาณความยาว			
		β				β			
		0.5	1	5	10	0.5	1	5	10
0.5	5	0.9937	0.9905	0.9155	0.9155	1.5921	2.8952	8.5982	11.6988
	10	0.9947	0.9941	0.9723	0.9723	0.8250	1.5878	6.4011	10.3141
	20	0.9930	0.9916	0.9822	0.9684	0.5040	0.9977	4.5241	8.0469
	30	0.9929	0.9914	0.9880	0.9791	0.3974	0.7816	3.6715	6.8502
	50	0.9916	0.9887	0.9889	0.9838	0.2968	0.5869	2.8383	5.4085
	80	0.9925	0.9897	0.9897	0.9877	0.2291	0.4570	2.2347	4.3605
	100	0.9904	0.9906	0.9873	0.9883	0.2037	0.4058	1.9932	3.9105
	200	0.9902	0.9901	0.9891	0.9884	0.1428	0.2842	1.4087	2.7901
1	5	0.9918	0.9940	0.9937	0.9920	1.8212	3.6092	18.8702	27.5231
	10	0.9964	0.9973	0.9959	0.9967	0.8481	1.7036	8.4528	17.0781
	20	0.9949	0.9937	0.9948	0.9943	0.5150	1.0278	5.1384	10.2578
	30	0.9929	0.9919	0.9942	0.9913	0.3998	0.7959	4.0003	7.9564
	50	0.9906	0.9911	0.9921	0.9922	0.2959	0.5933	2.9713	5.9394
	80	0.9899	0.9893	0.9915	0.9886	0.2301	0.4583	2.2966	4.5821
	100	0.9909	0.9926	0.9887	0.9899	0.2043	0.4096	2.0352	4.0719
	200	0.9919	0.9900	0.9878	0.9899	0.1429	0.2852	1.4298	2.8484
5	5	0.9922	0.9935	-	-	2.3980	3.8412	-	-
	10	0.9978	0.9984	-	-	0.9252	1.9415	-	-
	20	0.9952	0.9965	0.9990	-	0.5303	1.0940	8.3924	-
	30	0.9941	0.9959	0.9987	0.9961	0.4063	0.8345	5.0636	10.7464
	50	0.9912	0.9934	0.9978	0.9992	0.6068	3.3858	3.6075	0.2312
	80	0.9916	0.9917	0.9950	0.9981	0.2312	0.4669	2.4672	5.4008
	100	0.9911	0.9926	0.9942	0.9961	0.2052	0.4134	2.1600	4.6073
	200	0.9908	0.9916	0.9929	0.9937	0.1427	0.2859	1.4645	3.0302

หมายเหตุ – คือ วิธี WMPF ไม่สามารถประมาณความน่าจะเป็นคัมรวมและความยาวของช่วงความเชื่อมั่น 99% ของพารามิเตอร์ β ได้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ	นายจตุพร สมสมัย
วันเดือนปีเกิด	14 กรกฎาคม พ.ศ. 2535
ตำแหน่ง	นักศึกษาปริญญาโท
ทุนการศึกษา	พ.ศ. 2558: ทุนบัณฑิตเรียนดีเพื่อศึกษาต่อ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ประสบการณ์ทำงาน	พ.ศ. 2558: เจ้าหน้าที่สถิติ บมจ. กรุงเทพประกันภัย

